

Podobnost a shodnost

2. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. LISTOPADU 2013

Řekneme-li, že trojúhelníky ABC a XYZ jsou podobné, znamená to, že jejich vrcholy si odpovídají v tomto pořadí.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Alča jednou ve svém sešitě našla naryšované dva trojúhelníky, které se shodovaly ve velikostech všech vnitřních úhlů a v délkách dvou stran, ale přesto nebyly shodné. Nalezněte dva takové trojúhelníky.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

V trojúhelníku ABC leží body D, E po řadě na stranách AB a AC tak, že trojúhelníky ABC, CBD a BEC jsou podobné. Dokažte, že pokud jsou přímky BC a DE rovnoběžné, pak je trojúhelník ABC rovnoramenný.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Na úhlopříčce BD rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod K tak, že přímka AK protne úsečku BC v bodě X a přímku CD v bodě Y . Dokažte, že $|AK|^2 = |KX| \cdot |KY|$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Na kružnici se středem O zvolme body A, B tak, aby platilo $|\sphericalangle AOB| = 60^\circ$. Na kratším oblouku AB zvolme bod M . Dokažte, že spojnice středů úseček BM a AO je kolmá na spojnici středů úseček AM a BO .

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Pepa si nakreslil konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž současně platilo $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle CAB|$ a $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADB|$. Dokažte, že z úseček AC, AD a BC se mu podaří sestavit pravoúhlý trojúhelník.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Středů kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a ACD označme postupně O_1 a O_2 , průsečík přímek AD a BC označme E . Dokažte, že přímky EO_1 a EO_2 jsou osově souměrné podle osy úhlu AEB .

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má strany AE a BC rovnoběžné a pro jeho vnitřní úhly platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BDC|$. Označme P průsečík úhlopříček AC a BE . Dokažte, že $|\sphericalangle EAD| = |\sphericalangle BDP|$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ADP|$.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Osa strany AC trojúhelníku ABC protne stranu BC v bodě M . Dále nechť K je průsečík osy úhlu AMB a kratšího oblouku AB kružnice opsané trojúhelníku ABC . Dokažte, že přímka spojující středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AMK a BMK je kolmá na osu úhlu AKB .