

Stereometrie

3. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. DUBNA 2014

Řešení obsahující pouze obrázek bez slovního popisu, proč je dané řešení správné, nebudou ohodnocena plným počtem bodů.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Obarvěte každý z osmi vrcholů krychle jednou ze dvou barev, a to tak, aby každá rovina procházející alespoň třemi body jedné barvy procházela i nějakým bodem druhé barvy.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Najděte čtyřboký jehlan,¹ jehož dvě protější stěny jsou obě kolmé na podstavu.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Rozmístěte do prostoru šest krychlí tak, aby se žádné dvě neprotínaly a aby se každé dvě dotýkaly nějakou plochou.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Rozhodněte, zda existuje čtyřstěn, jehož tělesové výšky mají délky 1, 2, 3 a 6 cm.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Mějme čtyřstěn s opsanou a vepsanou koulí. Označme R poloměr koule opsané, r poloměr koule vepsané, a délku nejdélnější hrany čtyřstěnu a h délku jeho nejkratší tělesové výšky. Dokažte nerovnost

$$\frac{R}{r} > \frac{a}{h}.$$

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

David vlastní pozemek ve městě, kde stojí několik výškových budov.² Řekneme, že jedna budova stíní jinou, pokud spojnice jejich horních konců svírá s rovinou města úhel větší než 45° . Dokažte, že pokud ve městě žádná budova nestíní jinou, může David na svém pozemku postavit budovu vysokou tak, že to bude platit i nadále.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká stěny ABC v bodě E . Koule jemu připsaná³ vzhledem k vrcholu D se stěny ABC dotýká v bodě F . Dokažte, že $|\angle ABE| = |\angle CBF|$.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Máme jehlan¹ s podstavou $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 4$) a hlavním vrcholem V . Nechť rovina ρ protíná hrany VA_1, VA_2, \dots, VA_n v bodech B_1, B_2, \dots, B_n . Dokažte, že pokud jsou mnohoúhelníky $A_1A_2 \dots A_n$ a $B_1B_2 \dots B_n$ podobné (vrcholy si odpovídají v tomto pořadí), pak je ρ rovnoběžná s podstavou.

¹Jehlan (n -boký) je těleso určené *podstavou*, což je ne nutně pravidelný n -úhelník, a *hlavním vrcholem*, což je bod mimo rovinu podstavy.

²Předpokládejme, že město je vodorovná rovina, výškové budovy jsou svislé úsečky se spodními konci v této rovině a pozemek je bod v této rovině.

³Koule dotýkající se rovin ABD , BCD a ACD mimo čtyřstěn a roviny ABC uvnitř příslušné stěny čtyřstěnu.