

# Funkce

3. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. PROSINCE 2013

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Z jednoho znaku  $x$ , tří jedniček, tří minusů a čtyř svislých čar (tj. symbolů použitelných pro zápis absolutní hodnoty) složte výraz, jehož hodnota je nulová pro alespoň čtyři reálná čísla  $x$ .

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Nalezněte nekonstantní funkci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že funkce  $f(2x)$  a  $(f(x))^2$  jsou periodické a mají stejnou nejkratší periodu.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Jsou dány **ryze**<sup>1</sup> monotónní funkce  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že funkce  $f(g(x))$  je rostoucí. Dokažte, že funkce  $g(f(x))$  je rovněž rostoucí.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Je dána funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  splňující současně následující dvě podmínky:

- (i) Pro každá dvě nesoudělná<sup>2</sup> kladná celá čísla  $a, b$  platí  $f(ab) = f(a) \cdot f(b)$ .
- (ii) Pro každá dvě (ne nutně různá) prvočísla  $p, q$  platí  $f(p+q) = f(p) + f(q)$ .

Dokažte, že  $f(3) = 3$ .

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Najděte všechna reálná čísla  $x$ , pro která platí<sup>3</sup>

$$x[x[x[x]]] = 2001.$$

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Pro daná dvě celá čísla  $p, q$  uvažme kvadratickou funkci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  určenou předpisem

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

Řekneme, že celé číslo  $t$  je *dobré*, jestliže čísla  $f(t)$  a  $f(t+1)$  jsou různá a jedno je násobkem druhého. Dokažte, že je-li počet dobrých čísel konečný, pak je sudý.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Rozhodněte, zda lze funkci  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  určenou předpisem  $f(x) = x^2$  zapsat jako součet dvou periodických funkcí.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Nalezněte všechny funkce  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že pro všechny čtveřice reálných čísel  $x, y, u, v$  splňujících  $x + y = u + v$  platí

$$(f(x) - f(y)) \cdot (u - v) = (f(u) - f(v)) \cdot (x - y).$$

<sup>1</sup>O funkci řekneme, že je ryze monotónní, pokud je rostoucí nebo klesající.

<sup>2</sup>Dvě celá čísla jsou *nesoudělná*, jestliže je jejich největší společný dělitel roven jedné.

<sup>3</sup>Symbol  $[x]$  značí dolní celou část čísla  $x$ , tedy největší celé číslo nepřevyšující  $x$ .