Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!

Po prázdninové pauze Ti posíláme první komentáře 34. ročníku. Jejich součástí je i první díl seriálu o teorii grafů a dvě nová zadání sérií, a tak nemusíš zoufat, zase chvíli nebudeš trpět nedostatkem matematiky. Můžeš se najít ve výsledkové listině, která letos obsahuje 217 středoškoláků. Z toho máme velkou radost, neboť PraSátek stále přibývá. Jen ta nejlepší ale pojedou na jarní soustředění. Vybírat se bude podle pořadí za podzimní část, proto Ti přejeme spoustu k řešení vedoucích nápadů.

Za ostatní organizátory zdraví

Bára Kociánová

Co je dále v komentářích?

- Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?
- Poznámky k bodování a výsledkovým listinám
- Povídání ke třetí podzimní sérii
- Povídání ke čtvrté podzimní sérii
- Vzorové řešení 1. podzimní série
- Seriál – Letem grafovým světem I
- Výsledková listina 1. podzimní série

- Příloha: Zadání 3. a 4. podzimní série a 1. seriálové série

Řešení úloh

Ať už řešíš dlouho, nebo s korespondenčním seminářem teprve začínáš, určitě si projdi opravené úlohy, aby ses mohl(a) poučit z chyb. Nenech se odradit a přečti si i vzorová řešení, třeba zjistíš, že se úloha dala řešit úplně jinak, než jak jsi ji udolal(a) Ty.

Především pro nováčky jsme připravili text **Jak řešit úlohy korespondenčního semináře**, z něhož se dozvíš, jak správně zapisovat myšlenky, aby sis zasloužil plný počet bodů. Opět ho však doporučujeme i zkušenějším řešitelům.

Anglická série

Již tradičně je 4. podzimní série zadaná anglicky. Chceme tím poukázat na to, že většina matematické literatury je psaná anglicky, a je tedy dobré začít si zvykat co nejdříve. Proto i **řešení budeme přijímat jen v angličtině**. Jiná opravíme, ale body za ně neudělíme. Nicméně se neboj nám vyřešené úlohy poslat. Stejně jako nehodnotíme českou a slovenskou gramatiku, nebudeme hodnotit ani tu anglickou. Stačí, když myšlenkám porozumíme. Také úvodní text k této sérii je napsán anglicky, takže pokud jsi doposud matematickou angličtinu nepotkal(a), můžeš z něj odpozorovat používané konstrukce a fráze.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Den otevřených dveří

Rádi bychom Tě pozvali na Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, pod niž patří náš seminář. Akce se uskuteční ve středu 26. listopadu, podrobnosti včetně programu najdeš na stránkách *www.mff.cuni.cz*. Kromě informací o studiu na fakultě si můžeš poslechnout i zajímavé přednášky vyučujících, prohlédnout prostory Matfyzu, udělat si výlet do Prahy a v neposlední řadě potkat PraSečí organizátory. Zúčastnit se můžeš samozřejmě i pokud nejsi v maturitním ročníku, na DOD se dozvíš i o dalších seminářích a akcích pořádaných pro středoškoláky.

Staří a noví organizátoři MKS

S koncem minulého ročníku maturanti vyřešili svou poslední sérii PraSete a z některých řešitelů se stali organizátoři. Vítáme mezi sebou ty, kteří se vydali studovat na Matfyz. *Tonda Češík*, *Kubo Dargaj*, *Martin Hora*, *Honza Krejčí*, *Anh Dung „Tonda“ Le*, *Tomáš Novotný*, *Anička Steinhauserová* a *Kuba Svoboda* už se zapojili do chodu semináře a jejich podpisy můžeš najít na opravených úlohách.

Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?

Tento text je primárně určen méně zkušeným řešitelům. Jeho cílem je v krátkosti popsat způsob uvažování a vyjadřování, bez kterého se při řešení matematických úloh nelze obejít.

Pokud se rozhodneš řešit úlohy korespondenčního semináře, nestačí je pouze vypočítat. Body získáš jen v případě, že svůj postup nějak rozumně dostaneš na papír. Je tedy dobré si uvědomit, co se vlastně s řešením děje poté, co jej odešleš. Dostane ho do ruky nedůvěřivý opravovatel, jehož snahou je jej pochopit a nechat se přesvědčit o jeho správnosti. Není to tedy jako opravování kvízových otázek, u nichž se dá rychle ověřit, zda byly zodpovězeny správně. Zkus si proto svá řešení přečíst očima někoho, kdo zadanou úlohu vidí poprvé v životě.

Co po Tobě úloha chce?

Úloha často vybízí *„Dokažte!“*, *„Ukažte!“*, *„Zdůvodněte!“*. To znamená, že chceme, abyste ze zadání vyvodili dokazované tvrzení pomocí logických kroků podložených pádnými argumenty. Nestačí tedy nakreslit obrázek, v němž úhel ze zadání vyjde pravý, či ověřit platnost nerovnosti na kalkulačce nebo na počítači pro 150 různých hodnot. Je totiž potřeba ukázat, že tvrzení platí pro všechny možné konstelace, kterých je obvykle nekonečně mnoho.

Jiné úlohy na řešitele apelují *„Rozhodněte!“*, například *„rozhodněte, zda platí“*, *„rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii“* nebo *„rozhodněte, které z čísel je větší“*. Samotné rozhodnutí nestačí, je třeba jej zdůvodnit. To znamená tvrzení dokázat, případně najít protipříklad.

Často se setkáš s úlohami typu *„Najděte!“*, *„Najděte všechny … !“*. V prvním případě stačí, když najdeš nějaké vyhovující řešení. Je potřeba ukázat, že odpovídá požadavkům v zadání, ale už není potřeba se zabývat dalšími řešeními. Druhý případ je složitější, neboť tehdy je potřeba najít všechna vyhovující řešení, a navíc dokázat, že žádné jiné už neexistuje. Obměnou může být například *„Najděte nejmenší … !“*, kde je potřeba najít řešení a ukázat, že menší neexistuje.

Co nemáme rádi?

Do řešení piš jasná tvrzení a zdůvodňuj je. Zadání opisovat nemusíš. Pokud tvrdíš něco, co není pravda, pak je to ideální příležitost pro opravovatele strhnout Ti body. Navíc to, co z nepravdivého tvrzení vyvodíš, nejspíš také neplatí. Máš-li hypotézu, kterou neumíš dokázat, přiznej, že je to hypotéza. Sice pravděpodobně nedostaneš plný počet bodů, ale opravovatel bude rád, že nemusí ve Tvém řešení zbytečně hledat vysvětlení.

Dej si pozor na následující formulace:

- *„je zřejmé“*, *„je vidět“* – Tyto obraty lze v řešení použít. Řešitelé je ale často používají v případech, kdy daná věc není vůbec zřejmá, ba dokonce, když neplatí.

- *„provedeme analogicky“* – Tuto formulaci můžeš použít pouze v případě, že stačí v předchozích argumentech lehká změna značení. Analogie rozhodně neznamená zobecnění, například z důkazu pro 3 nelze takto vyrobit důkaz pro 50, či dokonce pro obecné n.

- *„z obrázku je patrné“* – Obrázky jsou velmi dobré k tomu, aby se opravovatel lépe orientoval v řešení a mohl jej snáze pochopit. Postup by však měl být srozumitelný i bez něj, nikdy se na něho neodkazuj jako na nedílnou součást řešení. Pokud v obrázku zavedeš nějaké značení, měl bys ho vysvětlit v textu, ne ho jen začít používat.

• *„stačí prozkoumat nejhorší variantu“* – Sice by to mohlo stačit, ale dokud neprozkoumáme všechny varianty, nelze říct, že tato konkrétní je nejhorší. Můžeme si to myslet, ale musíme to dokázat. Stejný problém nastává i u dalších formulací (*„nejlepší bude, když“* a podobně).

Pokud tedy některou z těchto frází používáš, rozmysli si, zda se nejedná o jeden z výše uvedených nešvarů.

Co a jak dokazovat?

V této sekci se nejprve podíváme, jak správně interpretovat zadání, a poté uvedeme některé základní důkazové techniky, které můžeš ve svých řešeních použít.

Důkaz by měl vycházet z předpokladů a postupovat k závěrům úlohy. Dej si pozor, abys během řešení nepoužil něco, co nevyplývá z předpokladů nebo předchozích úvah, zejména ne dokazované tvrzení!

• *„jestliže, pak“, „pokud, pak“, „Dokažte, že pokud platí A, pak platí B.“* – Kdykoliv se v zadání vyskytne věta tohoto typu, znamená to, že A je předpoklad (to, z čeho vycházíme a co můžeme při řešení používat), zatímco B je závěr (to, co chceme dokázat).

Předpoklad a závěr nesmíš za žádných okolností zaměnit! Srovnej následující tvrzení:

> Jestliže je číslo dělitelné čtyřmi, pak je sudé. (platí)
> Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné čtyřmi. (neplatí, např. pro 2)

• *„právě když“, „právě tehdy, když“, „tehdy a jen tehdy, když“, „Dokažte, že A platí právě tehdy, když platí B.“* – V tomto případě se vlastně jedná o dvě úlohy. Je totiž potřeba dokázat následující dvě tvrzení:

(i) Pokud platí A, pak platí B.
(ii) Pokud platí B, pak platí A.

Platnost tvrzení se nezmění, když A a B prohodíme, viz následující příklad.

> Dané číslo je dělitelné deseti, právě když jeho poslední cifrou je nula.
> Poslední cifrou daného čísla je nula, právě když je dělitelné deseti.

Důkazových technik je mnoho a my si zde ukážeme dvě základní – přímý důkaz a důkaz sporem.

V přímém důkazu postupujeme od předpokladů, z nichž logickými úvahami vyvozujeme dílčí závěry, až dospějeme ke kýženému výsledku. Naproti tomu v důkazu sporem si na začátku představíme, co by se stalo, kdyby tvrzení neplatilo, a z tohoto předpokladu pak odvodíme evidentně neplatné tvrzení (spor). Použití této techniky si ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že každé prvočíslo větší než 2 je liché.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že jsme našli sudé prvočíslo p větší než 2. Dvojka je jeho dělitel, který není roven ani jedné, ani p. To je spor s předpokladem, že p je prvočíslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Význam výrazů

Když matematik napíše vzoreček, nepředstavuje si pod ním nic jiného než běžné tvrzení. Pro úpravy výrazů, rovnic apod. tedy platí stejná pravidla jako pro obyčejné dokazování.

Definuj všechny proměnné, které ve vzorečcích používáš a nejsou v zadání. Opravovatel jinak těžko pozná, co jsi jimi chtěl říct. Se značením to však není třeba přehánět, a proto si označ vždy jen to, co v řešení budeš potřebovat. Příliš mnoho písmenek přehlednosti neprospívá.

Dále připomínáme, že je v důkazu třeba vycházet z předpokladů, ne z dokazovaného tvrzení. To ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$.

Správné řešení může vypadat takto:

Řešení. Kdykoli umocníme reálné číslo na druhou, získáme nezáporné číslo. Tedy

$$\begin{aligned} 0 &\le (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b, \\ 2\sqrt{ab} &\le a+b, \\ \sqrt{ab} &\le \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiná možnost je tato:

Řešení. Pro spor předpokládejme, že máme dvojici čísel a, b, pro která tvrzení neplatí, tedy $\sqrt{ab} > (a+b)/2$. Pak ovšem

$$\begin{aligned} ab &> \frac{(a+b)^2}{4}, \\ 4ab &> (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ 0 &> a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2. \end{aligned}$$

To je spor, neboť umocněním reálného čísla nemůžeme dostat záporné číslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Oba tyto postupy byly v pořádku. První (přímý) důkaz vycházel pouze ze známých faktů a dobral se kýženého výsledku, druhý důkaz (sporem) předpokládal neplatnost tvrzení a došel k něčemu, co neplatí.

K řešení ale není možné přistupovat zcela přímočaře, tedy jen upravovat dokazovaný vzoreček. To proto, že jakmile do řešení napíšeš $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$, znamená to, že již předpokládáš, že daná nerovnost platí. Jenže to nemůžeš předpokládat, neboť Tvým cílem je to teprve dokázat.

Uveďme ještě jeden příklad, na kterém si ukážeme dvě různá použití proměnných.

Příklad. V závislosti na parametrech a, b, c vyřešte kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Zadání říká, že pro libovolná, ale pevně zvolená čísla a, b, c hledáme všechna x, která vyhovují zadané rovnici. Proměnné a, b, c označují v celém příkladu stále tatáž tři (ne nutně různá) reálná čísla. Každá konkrétní volba parametrů vlastně určuje jinou úlohu, ale přitom chceme vyřešit všechny tyto úlohy naráz, obecně. Proměnná x hraje zcela odlišnou roli – její hodnota je neznámá a naším cílem je ji určit.

Používání známých tvrzení

Může se stát, že v literatuře nebo na internetu narazíš na tvrzení, které Ti usnadní řešení úlohy. Pokud je to nějaká věta, která má jméno (například Cevova věta), nezapomeň její název do řešení uvést. Pravděpodobně ji budeme znát, a když ne, dovedeme ji alespoň najít. Důkaz přitom opisovat nemusíš. V případě, že se jedná o nepojmenované tvrzení, napiš nám zdroj, kde jsi ho našel.

Vzorová řešení

V neposlední řadě bychom Tě chtěli povzbudit k řešení našich úloh. Pokud náš seminář vidíš poprvé, nedej se odradit případnými počátečními neúspěchy. Prostuduj si svá opravená řešení a nezapomeň se podívat také na vzoráky. Vzorové řešení Ti má často co nabídnout i tehdy, když jsi úlohu vyřešil správně. Můžeš v něm najít různé zajímavé přístupy či myšlenky, a něco nového se tak naučit. V poznámkách opravovatele si pak můžeš přečíst, jak se s řešením potýkali ostatní.

Věříme, že Ti tento text usnadní řešení úloh v semináři i jinde a pomůže Ti osvojit si základy matematického uvažování. To, co se naučíš, není jen schopnost řešit matematické úlohy, ale také schopnost samostatně hlouběji přemýšlet. To se Ti určitě bude někdy hodit, a to i tehdy, když se matematikou dále zabývat nebudeš.

Přejeme Ti mnoho radosti při objevování tajů matematiky!

Poznámky k bodování a výsledkovým listinám

Nejprve se zaměříme na jednu zvláštnost našeho semináře. Protože opravování úloh je komplexní záležitost, jsou komplexní i body, které obdržíte od opravovatelů. Každé řešení ohodnotíme číslem tvaru $x + yi$, kde x představuje reálné body a y jsou body imaginární. Jaký je mezi nimi rozdíl? Reálné body jsou „solidní“; jsou to body za správnost řešení, které obvykle dostáváte ve škole, na olympiádách a podobně. Jde o nezáporné celé číslo. Za naprosto správné řešení jich dostanete tolik, kolik činí bodové ohodnocení dané úlohy.

Imaginární body představují druhou, nezávislou stupnici. Vyjadřují míru elegance daného řešení. Hodnota y je celé číslo od -2 do 2. Kladné imaginární body značí řešení, které je radost číst: obsahuje šikovné triky a originální myšlenky nebo nachází souvislosti mezi zdánlivě vzdálenými pojmy. Naopak záporné imaginární body vyjadřují, že jsi někde použil zbytečně složité formulace, několikrát dokazoval totéž, všechno řešil hrubou silou nebo třeba napsal jednoduchý důkaz na pět stránek.

Od komplexních bodů k výslednému hodnocení

Každou úlohu tedy hodnotíme komplexním číslem ve tvaru $x + yi$. Do výsledků celé série pak započítáme hodnocení pěti úloh, které jsi vyřešil nejlépe (měl jsi z nich nejvíce reálných bodů, v případě rovnosti rozhoduje počet imaginárních bodů). Hodnocení těchto příkladů sečteme a tím dostaneme komplexní číslo, které označíme b.

S číslem b se dále pracuje následovně: Nejprve vypočteme *hrubý bodový zisk* – to je reálné číslo, se kterým ve výpočtu všude dále pracujeme namísto komplexního čísla, kterým byly Tvé úlohy ohodnoceny opravovateli. Při zisku b bodů za sérii je výchozí hodnota hrubého bodového zisku dána vztahem[1]

$$\tilde{h} = \Re(b) + \left(2 - \sqrt{3}\right) \Im(b).$$

Jelikož by toto číslo mohlo být teoreticky záporné nebo větší, než je maximální počet bodů za sérii (označíme ho s, obvykle je $s = 25$), „ořízneme“ výchozí hodnotu do tohoto intervalu:

$$h = \begin{cases} s & \text{pokud } \tilde{h} \geq s, \\ 0 & \text{pokud } \tilde{h} \leq 0, \\ \tilde{h} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Aby byli při bodování úloh mírně zvýhodněni mladší a začínající řešitelé, určuje se u každého řešitele tzv. *koeficient*. Jeho výchozí hodnota se vypočte následovně:

$$\tilde{\kappa} = (r - 1) + \frac{2z}{450},$$

[1]Symboly $\Re(w), \Im(w)$ značí reálnou a imaginární část komplexního čísla w.

kde r je ročník[2] (přepočítaný tak, aby odpovídal čtyřletému gymnáziu, studenti a žáci plnící povinnou školní docházku mají $\frac{1}{2}$) a z je počet počet bodů, které řešitel získal během předchozích ročníků. Jelikož výsledný koeficient $\tilde{\kappa}$ je vždy číslo z intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 6\rangle$, položíme $\kappa = \min(\tilde{\kappa}, 6)$.

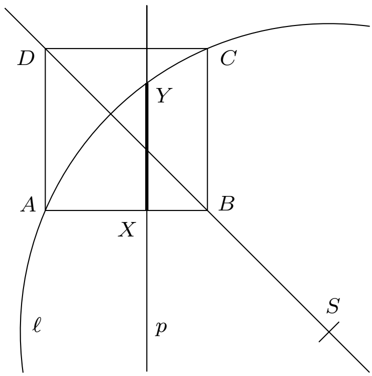
Předpokládejme dále, že $\kappa < 3$. Pro další výpočet bude podstatné číslo t definované jako

$$t = \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\kappa\pi}{6}\right).$$

Hledaný *výsledný bodový zisk* za sérii (což už je číslo, které se udává ve výsledkové listině) pak dostaneme podle vztahu

$$v = \sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (s+t-h)^2} - t.$$

Jak toto číslo interpretovat geometricky? Uvažujme v rovině čtverec $ABCD$ o straně s. Na přímku BD vyneseme bod S ve vzdálenosti $\sqrt{2}\,t$ od bodu B, přičemž celá úsečka BS je vně čtverce. Dále nechť je dána kružnice ℓ o středu S procházející body A a C. Na úsečce AB najdeme bod X takový, že $|AX| = h$, a povedeme jím kolmici p ($p \perp AB$). Kružnice ℓ a přímka p se protnou ve dvou bodech, ten uvnitř čtverce označíme Y. Výsledný bodový zisk za sérii je $v = |XY|$.



V případě, že $\kappa > 3$, postupujeme takto: číslo t se nyní zvolí jako

$$t = \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{(6-\kappa)\pi}{6}\right)$$

a výsledný bodový zisk je

$$v = s - \left(\sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (t+h)^2} - t\right).$$

Tento vzorec lze interpretovat tak, že kružnice ℓ je obrazem kružnice získané dle postupu uvedeného výše pro koeficient $6 - \kappa$ v osové souměrnosti podle osy AC, jinak zůstává postup stejný.

Nakonec zbývá případ $\kappa = 3$ – tehdy je prostě $v = h$. Lze si to představit tak, že střed S je „v nekonečnu“, tudíž se kružnice změnila na přímku AC.

[2] Pokud máš ve výsledkové listině uvedený čtvrtý (maturitní) ročník, a přitom jsi mladší, je to nejspíše proto, že nám nedošla informace o Tvém ročníku. Napravit to můžeš buď mailem na *mks@mff.cuni.cz*, nebo přiložením svých údajů k řešením další série.

Další detaily a statistiky úloh

Kromě výsledného bodového zisku lze ve výsledkové listině najít i další údaje. Je v ní po řadě uvedeno jméno, příjmení, třída, zkratka školy, reálné body za jednotlivé příklady a celkové body za sérii.

Do závěrečného hodnocení se počítají všechny série, takže se vyplatí poslat z každé série byť jen jedinou úlohu. Co se naopak nevyplatí, je poslat řešení pozdě – netolerujeme žádné zpoždění! Tedy pokud pošleš své řešení pozdě, sice Ti ho opravíme, ale body za něj nečekej.

Jak řešili úlohu ostatní, se můžeš dozvědět z výsledkové listiny. Abychom Ti však usnadnili toto zjišťování, uvádíme u řešení úloh statistická čísílka o došlých řešeních. Je to čtveřice čísel, z nichž první říká, kolik lidí řešilo tuto úlohu, druhé, kolik lidí získalo alespoň dva body, třetí průměr udělených reálných bodů a čtvrté pak jejich medián (ten dostaneme tak, že seřadíme počty bodů za jednotlivá řešení podle velikosti a vezmeme číslo na prostřední pozici[3]).

[3] Pokud je čísel sudý počet, vezmeme aritmetický průměr dvou prostředních čísel.

Povídání k třetí podzimní sérii

Tématem letošní třetí série jsou kongruence. Pokud jsi o nich v životě neslyšel(a), nezoufej! Právě pro Tebe je určen následující text, ve kterém najdeš všechny potřebné informace.

Určitě víš, že se přirozená čísla dají rozdělit na sudá a lichá, tj. na ta, která jsou dělitelná dvěma, a ta, která po dělení dvěma dávají zbytek jedna. Kongruence jsou vlastně takovým zobecněním rozlišení čísel na sudá a lichá.

Řekneme, že dvě celá čísla a, b jsou *kongruentní modulo* m, kde m je přirozené číslo, pokud obě dávají po dělení m stejný zbytek. Zapisujeme to jako $a \equiv b \pmod{m}$. Ekvivalentní (a praktičtější) definice je, že dvě čísla a, b jsou kongruentní modulo m, pokud je číslo $a - b$ dělitelné číslem m. Kongruence se mezi sebou dají sčítat a násobit – pracuje se s nimi skoro stejně jako s rovnicemi.

Cvičení. Rozmysli si, že platí následující základní vlastnosti kongruencí:

(1) $a \equiv 0 \pmod{m}$ právě tehdy, když $m \mid a$.

(2) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, potom $a+k \equiv b+k \pmod{m}$ a $ak \equiv bk \pmod{m}$ pro libovolné k celé.

(3) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$ a $b \equiv c \pmod{m}$, potom $a \equiv c \pmod{m}$.

(4) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$ a $c \equiv d \pmod{m}$, potom $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ a $ac \equiv bd \pmod{m}$.

(5) Pokud $a \equiv b \pmod{m}$, potom $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ pro libovolné n přirozené.

Řešení.

(1) Z definice kongruence to znamená totéž jako $m \mid a - 0$.

(2) Jestliže $m \mid a - b$, pak $m \mid (a + k) - (b + k)$ a $m \mid k(a - b)$.

(3) – (5) Ostatní body se dokáží stejně přímočaře. Stačí přepsat kongruenci podle definice.

Tyto úvahy se dají jednoduše zužitkovat například při řešení diofantických rovnic (tj. rovnic, u kterých hledáme řešení z oboru přirozených nebo celých čísel). Nyní si ukážeme dva příklady, jak se dají kongruence použít:

Příklad. Vyřeš rovnici $2x + 3 = 4z + 6y$, kde $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Řešení. Pokud pro nějaká čísla platí rovnost, určitě musí platit rovnost i modulo libovolné přirozené číslo. Podíváme se tedy na rovnici modulo dva. Vidíme, že po dělení dvěma dává levá strana vždy zbytek jedna, zatímco pravá strana dává vždy zbytek nula, proto rovnost nikdy nemůže platit. Ekvivalentně bychom mohli říct, že levá strana rovnice je vždy liché číslo, zatímco pravá strana je vždy číslo sudé.

Příklad. Vyřeš rovnici $3x + 3 = 4^z + 6y$, kde $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Řešení. Opět se na rovnici podíváme modulo nějaké číslo, tentokrát modulo tři. Vidíme, že levá strana je vždy kongruentní s nulou, zatímco pravá strana s $4^z \equiv 1^z = 1$, rovnice tedy nemůže mít žádné řešení.

Při řešení příkladů se často využívá i toho, že druhé mocniny nabývají pouze nějakých zbytků modulo m. Ukážeme si to na příkladu:

Příklad. Najdi všechna přirozená čísla x splňující $x^2 \equiv 2 \pmod 3$.

Řešení. Projdeme všechny možnosti čísla x.

(1) Číslo $x \equiv 0 \pmod 3$. Potom určitě $x^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 3$ a x není řešením této rovnice.
(2) Číslo $x \equiv 1 \pmod 3$. Potom $x^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$ a x není řešením rovnice.
(3) Číslo $x \equiv 2 \pmod 3$. Potom $x^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod 3$ a x opět není řešením rovnice.

Jiné možnosti už pro číslo x nejsou, rovnice tedy nemá žádné řešení. Kdybys odvození s kongruencemi nevěřil(a), zkus si třeba třetí případ napsat takto: $x = 3k + 2$. Potom $x^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 6k + 4 \equiv 1 \pmod 3$. Výsledek je stejný, ale postup s kongruencemi je snazší a elegantnější. Uvědom si, že nevyužíváme nic složitějšího než bod (5) úvodního cvičení.

Viděli jsme, že druhé mocniny přirozených čísel nabývají po dělení třemi pouze zbytků 0 a 1. Tato čísla nazýváme *kvadratickými zbytky* modulo 3. Stejně se dají definovat kvadratické zbytky pro libovolné přirozené číslo. Pokud se o nich chceš dozvědět něco víc, podívej se do některých zdrojů uvedených na konci tohoto textu.

Na závěr si ukážeme jednu trochu těžší větu, kterou můžeš bez důkazu používat ve svých řešeních.

Věta. (Malá Fermatova věta) *Je-li p prvočíslo a a přirozené číslo nedělitelné p, potom*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Zobecněním této věty pro obecný modul je Eulerova věta. Její znění nalezneš v loňském seriálu o teorii čísel.

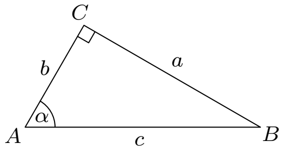
Pokud Tě kongruence zaujaly a chtěl(a) by ses o teorii čísel dozvědět něco víc, loňský seriál si určitě přečti. Najdeš ho na našich stránkách v sekci "Minulé ročníky".

Přejeme Ti hodně zdaru při řešení třetí série!

Introduction to the fourth autumn series

The topic of this year's fourth series is trigonometric functions. To help you solve the problems from this series, here are some basic facts and properties that might come in handy.

First of all, let's define the basic trig functions.[4] We will start with a right-angled triangle ABC:



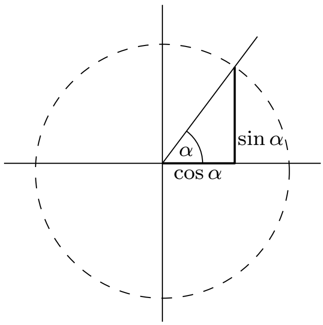
Side c, opposite to the right angle, is called the *hypotenuse*, sides a and b are called *opposite* and *adjacent* (to angle α), respectively. We define the sine, cosine and tangent functions as follows:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

Using these definitions and basic geometry, we obtain the following properties:

(i) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
(ii) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
(iii) $\sin\alpha = \cos(\pi/2 - \alpha)$,
(iv) $\cos\alpha = \sin(\pi/2 - \alpha)$.

The above definitions only make sense for $\alpha \in (0, \pi/2)$, but it's often useful to define trigonometric functions for other values of α as well. For this definition, we use a circle with a radius of 1 centered at the origin (the unit circle). For a given angle α, we draw a line through the origin at an angle of α, like in the following picture, and we define $\cos\alpha$ and $\sin\alpha$ as the x and y coordinates of the intersection point of the line with the unit circle:



[4]Note that in English-written literature, tangent is denoted tan instead of tg. Furthermore, square brackets $[0, \pi]$ are used for denoting intervals instead of angle brackets $\langle 0, \pi \rangle$.

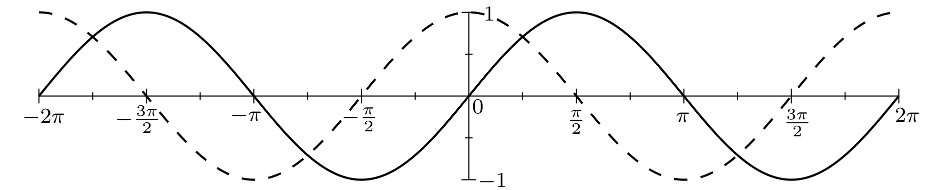
Note that this defines the sine and cosine function for any $\alpha \in \mathbb{R}$. We can also define the tangent function as $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ where $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

As can be seen from the picture, when α reaches 2π (a full rotation), the values of the three functions start to repeat. Therefore, they are *periodic* with a period of 2π. The tangent function even has a period of π.

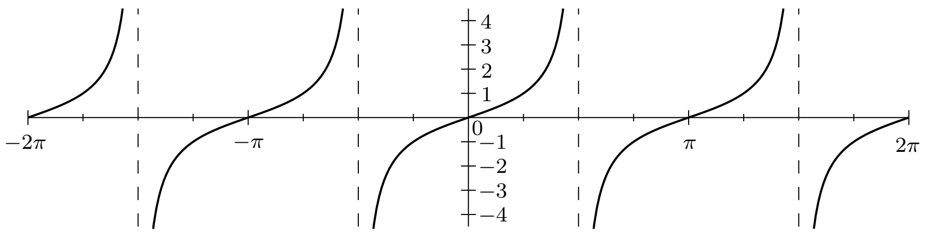
We can also observe that cosine is *strictly monotone* on all intervals in the form $[k\pi, \pi + k\pi]$ and sine is strictly monotone on $[\pi/2 + k\pi, 3\pi/2 + k\pi]$ for $k \in \mathbb{Z}$. The tangent function is *strictly increasing* on $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$.

Other properties include that $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ (cosine is an *even* function), $\sin\alpha = -\sin(-\alpha)$ and $\tan\alpha = -\tan(-\alpha)$ for any α (sine and tangent are *odd*). Also, it is worth noting that for $\alpha > 0$, $\sin\alpha < \alpha$.

The best way to get an insight into the various properties is to draw a graph. Here, sine (from -2π to 2π) is plotted with a solid line, and cosine with a dashed one:



And here is a graph of $\tan x$ from -2π to 2π:



You might also find useful the following formulas:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

As mentioned above, sine is monotone on $[-\pi/2, \pi/2]$, cosine on $[0, \pi]$ and tangent on $(-\pi/2, \pi/2)$. Restricting their domains to these intervals, we can define their inverse functions. They are called arcsine, arccosine and arctangent and denoted arcsin, arccos and arctan. So for example $\arccos(0) = \pi/2$.

Barevné úlohy

1. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(207; 193; 2,84; 3,0)

Obarvěte políčka tabulky o rozměrech 4×4 pěti barvami tak, aby byla každá barva použita alespoň jednou a aby se v každém řádku i sloupci vyskytovaly nejvýše dvě různé barvy.

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Nejprve vybereme čtyři políčka tabulky tak, abychom měli z každého sloupce a každého řádku právě jedno políčko (např. políčka na diagonále). Ta vybarvíme čtyřmi různými barvami. Pak již stačí vybarvit zbytek tabulky pátou barvou a máme hotovo:

2	1	1	1
1	3	1	1
1	1	4	1
1	1	1	5

Poznámky:

Většina úlohu vyřešila bez problémů, občas někdo dokonce počítal, kolik je možných řešení (což úloha nevyžadovala). Jako řešení tentokrát stačil jen obrázek bez odůvodnění. Nakonec se našlo i několik řešitelů, kteří se snažili dokázat, že tabulku takto obarvit nelze.

(Kristýna „Kikina“ Zemková)

Úloha 2.

(182; 130; 2,16; 3,0)

Na úsečce AB se středem S vyrostlo sto dvojic tulipánů tak, že pro každou dvojici leží bod S ve středu spojnice jejích tulipánů. Sto tulipánů vykvetlo červeně, zbylé vykvetly žlutě. Dokažte, že součet vzdáleností žlutých tulipánů od bodu A je stejný jako součet vzdáleností červených tulipánů od bodu B. *(Pepa Tkadlec)*

Standardní řešení:

Podívejme se nejprve na jednu dvojici tulipánů X a Y, kde X je blíže k A. Víme, že střed AB je S, a také víme, že střed XY je S, tedy

$$|AS| = |AX| + |XS| = |BS| = |BY| + |YS|.$$

Z toho vyplývá, že $|BY| = |AX|$, a z toho jasně $|AS| + |SY| = |BS| + |SX|$.

Nyní si dvojice rozdělíme do dvou skupinek, na stejnobarevné a různobarevné.

Pro různobarevnou dvojici k červeným vzdálenostem přičteme $|BY|$ nebo $|BS|+|SX|$ (podle toho, jestli je červený tulipán blíže B, či A) a ke žlutým součtům přičteme $|AX|$ nebo $|AS|+|SY|$. Různobarevné dvojice zvýší oba součty stejně, tedy je nemusíme uvažovat.

Pokud máme dvojici tulipánů stejné barvy, potom k hromádce příslušné barvy přičteme

$$|AS| + |SY| + |AX| = |AS| + |SY| + |BY| = |AB|$$

nebo

$$|BS| + |SX| + |BY| = |BS| + |SX| + |AX| = |AB|,$$

tedy ať má dvojice jakoukoliv barvu, potom k její hromádce přičteme $|AB|$.

Na různobarevné dvojice potřebujeme jeden červený a jeden žlutý tulipán. Z toho víme, že ve stejnobarevných dvojicích je stejně žlutých jako červených tulipánů. Tudíž je stejně celočervených dvojic jako celožlutých. Z toho vyplývá, že $|AB|$ přičteme ke žluté hromádce stejněkrát jako k červené.

Z výše uvedeného vyplývá, že součty žlutých vzdáleností jsou stejné jako součty červených vzdáleností.

Rychlé řešení:
Uvažme dvojici tulipánů ze zadání X, X'. Střed S leží ve středu úsečky AB i ve středu úsečky XX', proto ze středové souměrnosti $|X'A| = |XB| = |AB| - |XA|$.

Označme součet vzdáleností všech červených tulipánů od A jako c a součet vzdáleností žlutých od A jako z. Součet vzdáleností všech tulipánů od A můžeme sečíst po jednotlivých párech a z $|XA| + |X'A| = |AB|$ dostáváme $c + z = 100|AB|$ neboli $z = 100|AB| - c$.

Zbývá spočítat součet vzdáleností červených tulipánů od B. Červených tulipánů je sto, takže z $|XB| = |AB| - |XA|$ vychází tento součet $100|AB| - c$, tedy stejně jako z, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina správných řešení obsahovala jeden ze dvou přístupů. Drtivá většina řešitelů poslala řešení podobné prvnímu vzorovému. Menší část z řešitelů se potom snažila dokázat úlohu tak, že prve je tvrzení splněno pro triviální postavení bodů, a s těmi se potom hýbe. Toto řešení je také elegantní a hezké, ale při pokusu o něj se chyby vyskytovaly o něco málo častěji. Rychlé řešení, které by bylo za $+i$ a zabíjí korektně obě možnosti, nám nikdo neposlal, i když se k němu někteří blížili.

Při opravování jsem se snažil být hodný, ale moc se mi to nedařilo. Pokud jste něco odbyli jednoduchým „je to zřejmé“, tak se to často neobešlo bez ztráty bodu, hlavně pokud to zřejmé nebylo a šlo téměř o polovinu úlohy. Dalším častým jevem bylo, že jste sice ukázali, že pro stejněbarevné dvojice přičteme pokaždé $|AB|$, ale už jste neřekli, že je stejně žlutých dvojic jako těch červených. To bylo také za výchovný jeden bod.

Nejvíce však bylo řešitelů, kteří zapomněli na stejnobarevné dvojice a řešili jen ty různobarevné (takových bylo hodně), a nebo naopak (těch bylo méně, ale taky se vyskytli).

(Kuba Svoboda)

Úloha 3. (178; 165; 2,53; 3,0)

Martin sbírá bonbóny v barevných obalech. V každé z deseti krabiček má nějaký nenulový počet bonbónů, přičemž tento počet je pro každou krabičku jiný. Navíc v žádné krabičce nejsou dva bonbóny s obaly stejné barvy. Ukažte, že Martin může vybrat z každé krabičky jeden bonbón tak, aby získal obaly deseti různých barev. *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Seřaďme si krabičky vzestupně podle počtu bonbónů v nich a označme a_i počet bonbónů v i-té krabičce. Ze zadání plyne, že $a_i \geq i$. Nejprve si Martin vezme libovolný bonbón z první krabičky, poté postupně vybírá z dalších krabiček v řadě. Předpokládejme, že si už vybral n různých bonbónů z prvních n krabiček, tudíž si nyní vybírá z krabičky $n + 1$. Ovšem počet bonbónů v této krabičce je roven $a_{n+1} \geq n + 1$, přičemž si Martin zatím vzal jen n různých bonbónů, takže se v této krabičce se nachází alespoň jeden druh, který si zatím nevybral. Vždy tedy existuje alespoň jeden bonbón, který si Martin může z následující krabičky vybrat, tudíž je schopen získat z deseti krabiček deset různých barev bonbónů.

Poznámky:
Přestože byla úloha celkem jednoduchá, přibližně čtvrtina z vás se snažila v různých variacích tvrdit, že „v každé další krabičce se nachází nová barva bonbónu oproti předchozí krabičce, tu si Martin vybere“, což ale bohužel není pravda, neboť například ve třetí krabičce se mohou vyskytovat pouze bonbóny z předchozích dvou, přičemž rozdílný bonbón mezi druhou a třetí krabičkou už si Martin musel vzít z první krabičky. Těmto řešením jsem poté strhával jeden bod. Zcela špatných řešení však bylo minimum a většinou bylo příčinou nepochopení zadání (pobavila mě první věta jednoho řešení, která tvrdila, že v zadání je chyba :-)) *(Tomáš Novotný)*

Úloha 4. (157; 117; 3,75; 5,0)

Políčka tabulky o rozměrech 3×7 jsou obarvena dvěma barvami. Dokažte, že existuje obdélník nebo čtverec z jejích políček, jehož všechna rohová políčka jsou různá a mají stejnou barvu.
(Jarda Hančl)

Řešení:
Budeme uvažovat tabulku se třemi řádky a sedmi sloupci. Z Dirichletova principu bude v každém sloupci jedna z barev zastoupena alespoň dvakrát. Dále z Dirichletova principu plyne, že ze sedmi sloupců bude ve čtyřech převažovat jedna barva. Nicméně počet různých dvojic políček ve sloupci je jen tři. To znamená, že při vybarvování políček převažující barvou bude v nejméně dvou sloupcích vybarvena stejná dvojice políček. Důkaz je hotov.

Poznámky:
Většina správných řešení se opírala o Dirichletův princip v mnoha různých variantách (od snadno popsatelného použití ve sloupcích až k těžkopádnějším použitím v řádcích). V několika řešeních se vyskytla chyba, že řešitel bez diskuze přeskočil možnost vybarvení celého sloupce jednou barvou. Ačkoliv je jednoduché zdůvodnit, proč nám toto obarvení úlohu zjednodušuje, je nutné to do řešení zahrnout. Ta méně správná řešení velmi často nedokazovala požadovanou vlastnost pro všechna obarvení, nebo řešitel spatně pochopil zadání. *(Honza Krejčí)*

Úloha 5. (156; 86; 2,20; 2,0)

Velkoobchod s barvami má v každém z n měst svou pobočku a mezi každými dvěma z nich vede cesta. Bylo rozhodnuto, že je třeba nakreslit plánek těchto poboček a cest mezi nimi tak, aby

(i) *každé město mělo jinou barvu než všechny cesty z něj vedoucí,*
(ii) *žádné dvě cesty vedoucí do stejného města neměly stejnou barvu.*

Kolik nejméně barev bude k nakreslení plánku potřeba? *(Bětka Kadlecová)*

Řešení:
Z libovolného města vede $n - 1$ cest do ostatních měst, přičemž tyto cesty musí podle (ii) mít po dvou různé barvy. Navíc město musí podle (i) mít barvu různou od barvy každé z cest, takže k obarvení plánku bude potřeba minimálně n barev. Ukážeme, že k obarvení plánku n barev stačí.

Pro $n = 1$ obarvíme jedno město jednou barvou. Pro $n = 2$ obarvíme obě města první barvou a cestu mezi nimi druhou barvou. Pro $n \geq 3$ si plánek zakreslíme tak, že města budou vrcholy pravidelného n-úhelníku U a cesty budou všechny strany a úhlopříčky U. Každé ose symetrie U přiřaďme jednu barvu. Jak známo, pravidelný n-úhelník má n os symetrie, použijeme tedy n barev. Každou cestu obarvíme barvou její osy. Jelikož jsou nyní každé dvě stejně barevné cesty rovnoběžné, nemohou mít společné město, a podmínka (ii) je splněna.

Dokažme, že osa (nazvěme ji O) každé cesty je zároveň osou symetrie U (a tedy jsme tuto cestu obarvili). Cesta je tětivou kružnice opsané U, tedy O prochází jejím středem. Osová souměrnost podle O proto zobrazuje kružnici opsanou samu na sebe a zároveň zobrazuje město na město (protože O je osa cesty). Pravidelný n-úhelník je jednoznačně určen kružnicí opsanou, jedním vrcholem a číslem n, tedy U se v osové souměrnosti podle O zobrazí na U, což jsme chtěli dokázat.

Nyní obarvěme města. Jelikož do každého města vede $n - 1$ cest (které mají $n - 1$ barev), zbývá nám jedna barva na obarvení města taková, že vyhovuje podmínce (i).

Alternativní řešení (podle Jana Jurky):
Stejně jako v předchozím řešení ukážeme, že barev potřebujeme alespoň n. Nyní zkonstruujeme vyhovující obarvení pomocí n barev. Města očíslujme $0, 1, \ldots, n - 1$ a barvy očíslujme rovněž $0, 1, \ldots, n - 1$. Barvu města m považujme za barvu cesty vedoucí z města m do něj samého. Cestu z města i do města j vybarvěme barvou $(i + j) \bmod n$. Dokažme, že toto obravení splňuje podmínky v zadání. Pro spor předpokládejme, že cesty mezi městy i, j a i, k, kde $j \neq k$, mají stejnou barvu. Pak platí $i + j \equiv i + k \pmod{n}$, tedy $j \equiv k \pmod{n}$. Jelikož $0 \leq j, k < n$, dostáváme $j = k$, což je spor.

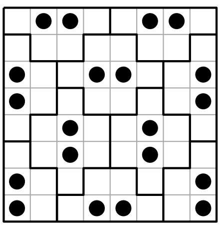
Poznámky:
Většina z Vás přišla na správný výsledek, ale jen malé části se podařilo dokázat jeho správnost. Někteří se spokojili s pozorováním, že méně než n barev nestačí. Další si uvědomili, že k řešení je třeba obarvení n barvami najít, ale nenašli ho a předpokládali, že cesty bude možné n barvami obarvit „tak, aby to vyšlo“. Nakonec ti, kteří obarvení nalezli a úlohu tak vyřešili, většinou používali jednu ze dvou výše popsaných konstrukcí nebo podobnou. Našli se i tací, co využili Vizingovu větu, díky níž se řešení úlohy stalo triviálním. *(Tonda Češík)*

Úloha 6.

(128; 62; 1,74; 1,0)

Na každém políčku šachovnice o rozměrech 8×8 sedí jedna beruška. Když Štěpán zapíská, přesune se každá beruška na některé políčko, které stranou sousedí s políčkem, na němž byla dosud. Kolik nejvíce políček se tím může uvolnit? (Nezapomeňte dokázat, že více se jich uvolnit nemůže.) *(Pepa Tkadlec)*

Řešení:
Dokážeme, že maximální počet uvolněných políček je 44. K tomu stačí dokázat, že po přesunu obsadí berušky nejméně 20 políček. Rozdělíme šachovnici 8×8 na deset oblastí následujícím způsobem:



V každé oblasti umíme berušky přemístit do jednoho ze dvou políček označených tečkou, a proto se berušky po přesunu vejdou do 20 políček.

Dále dokážeme, že méně políček už nestačí. Berušky na označených políčkách nemohou svoji oblast opustit. V každé oblasti se přitom nachází dvě takové berušky. Žádné dvě z nich nemůžou skočit na stejné políčko, a proto se každá z těchto 20 berušek přesune na jiné místo. Potřebujeme tedy nejméně 20 políček.

Poznámky:

Asi polovina z vás přišla na správný výsledek a rozmístění berušek napsané ve vzorovém řešení, ale jen malé části se podařilo minimalitu dokázat – většinou výše uvedeným způsobem. Ostatní řešení se snažila různé situace rozebírat a ukázat, že na několika políčkách musejí skončit méně než čtyři berušky. U takových řešení se vyskytla zásadní chyba: tiše se předpokládalo, že políčka musejí být obsazená po dvojicích nebo se musejí k pokrytí šachovnice použít určité „nejvýhodnější“ útvary. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 7.

(101; 29; 1,31; 1,0)

David si na kružnici nakreslil $4n$ různých bodů a pak je po směru hodinových ručiček střídavě obarvil modře a červeně. Červené body nějakým způsobem rozdělil do n dvojic a body v každé dvojici spojil červenou úsečkou. Podobně n modrými úsečkami pospojoval modré body. Všiml si, že žádné tři barevné úsečky neprocházejí jedním bodem a že každý průsečík modré a červené úsečky je fialový. Dokažte, že na obrázku našel alespoň n fialových bodů. *(David Hruška)*

Řešení:

Udělejme si následující procházku: Začneme v libovolném modrém bodě a vydáme se z něj po modré úsečce. Kdykoli narazíme na průsečík s jinou modrou úsečkou, odbočíme po ní doprava, a jakmile narazíme na fialový bod (průsečík s červenou úsečkou), zastavíme se.

Uvědomíme si dvě věci. Zaprvé, nikdy se nezacyklíme. Kdybychom se totiž ocitli v nějakém bodě, který už jsme předtím navštívili, byli bychom do něj museli přijít po jiné úsečce než poprvé, ale to by znamenalo, že jsme v tomto bodě zapomněli na tuto úsečku odbočit.

Zadruhé, nikdy se nedostaneme zpět na kružnici. Uvažme, co by se stalo, kdyby se nám to povedlo. Procházka by pak začínala i končila v nějakém modrém bodě, a na oblouku mezi nimi (napravo od prošlé cesty) by se tedy musel nacházet lichý počet barevných bodů. Alespoň z jednoho z těchto bodů by tedy musela vést úsečka mimo tento oblouk a ta by protínala naši procházku. Tím by ale opět vznikla buď „křižovatka“, na které jsme zapomněli odbočit, nebo fialový bod, ve kterém jsme se nezastavili.

Z každého modrého bodu tedy musíme nutně dojít do nějakého fialového bodu. Naopak pokud z tohoto fialového bodu vyrazíme nazpátek a na křižovatkách budeme zatáčet vždy doleva, dojdeme vždy jednoznačně zpět do startovního modrého bodu. Protože pro každý fialový bod jsou dva různé modré směry, kterými se dá odejít, lze se do něj dostat nejvýše ze dvou různých modrých bodů. Těch je $2n$, takže fialových bodů musí být alespoň $\frac{2n}{2} = n$.

Poznámky:

Většina z vás se snažila vymyslet, jak body pospojovat tak, aby vzniklo co nejméně fialových bodů. Jenže tím, že se vám nepodařilo najít způsob, jak jich získat méně než n, jste ještě nedokázali, že jich opravdu aspoň n musí být.

Další velká skupina řešitelů se snažila každý fialový bod „naúčtovat“ nějaké úsečce a takto dokázat, že fialových bodů musí být aspoň tolik, kolik je úseček jedné barvy. Zapomněli ale, že se může stát, že některý bod naúčtují více úsečkám zároveň a omylem ho tak započítají vícekrát. Jiní si ani neuvědomili, že ne každou úsečku musí protínat úsečka druhé barvy.

Objevily se i pokusy řešit úlohu indukcí podle n, ale jen jeden z nich byl korektní – ostatní řešitelé se snažili z menších případů sestrojit větší a nikoli naopak, což vedlo k tomu, že nevyřešili všechny možné případy. *(Ondra Cífka)*

Úloha 8.

(85; 14; 0,71; 0,0)

Červená Karkulka a Vlk hrají hru. Vlk nejprve na pásek papíru namaluje sto puntíků, z nichž každý je buď modrý, nebo červený. Na začátku každého tahu se odstřihne puntík nejvíce vlevo. Je-li červený, namaluje Vlk na pravý konec řady další modrý nebo červený puntík dle vlastního výběru. V opačném případě udělá totéž Karkulka. Cílem Karkulky je zajistit, aby po nějakém tahu byly všechny puntíky červené. Může se jí to podařit, ať hraje Vlk jakkoliv?

(Pepa Tkadlec)

Řešení:

Karkulka má následující vyhrávající strategii. Pomyslně rozdělí hru na *kola* po 100 tazích. V každém kole maluje samé červené, dokud vlk v tomto kole nezahraje modrou. Od té doby v tomto kole maluje samé modré.

Zbývá ukázat, že s takovou strategií Karkulka vyhraje. Jednotlivá kola si budeme namísto odstřihávání puntíků představovat tak, že se pouze prochází puntíky jeden po druhém – červený může vlk proměnit na modrý nebo ponechat, modrý může Karkulka proměnit na červený nebo ponechat. Stav po proběhnutí kola bude v takové představě stejný jako v původním zadání.

Definujeme ještě *barevné číslo* náležící hernímu stavu – modré puntíky interpretujeme jako nuly, červené jako jedničky a celý pásek přečteme coby binární číslo odzadu (tedy první puntík náleží místu jednotek, druhý místu dvojek, třetí místu čtyřek, …). Během každého kola mohou nastat dvě možnosti:

(i) Vlk nikdy nenamaluje modrou – to znamená, že po proběhnutí kola jsou všechny puntíky červené a Karkulka vyhrála.

(ii) Vlk promění některý červený puntík na modrý – v takovém případě se tato cifra barevného čísla sníží. Žádná z následujících cifer barevného čísla se již na základě Karkulčiny strategie nezvýší (všechny následující nuly zachová). To znamená, že se během celého kola barevné číslo jako celek sníží.

Během každého kola tak Karkulka buď vyhraje, nebo sníží barevné číslo. Barevné číslo nelze snižovat do nekonečna (může nabývat nejvýše 2^{100} hodnot), takže v konečném čase Karkulka vyhraje.

Poznámky:

Řešení poslední úlohy se sešlo nečekaně mnoho, zdaleka ne všechna však byla správně a často jsem měl pocit, že řešitelé nechápou, co se po nich chce. Původně jsem měl v plánu spočítat, u kolika řešitelů vyhraje vlk a u kolika Karkulka – bylo to zhruba půl na půl, ale měl jsem problém zařadit řešení stylu „Když hraje vlk blbě a Karkulka dobře, vyhraje Karkulka, ale když hraje vlk dobře a Karkulka blbě, hra nikdy neskončí.“ Pokud chcete napsat řešení matematické hry, měli byste postupovat následovně:

(i) Řeknete, který hráč má vyhrávající strategii.

(ii) Přesně ji popíšete. Rozhodně nestačí psát třeba „Karkulka se snaží tvořit co největší bloky modrých, ale občas vlkovi pohrozí tím, že dává červené.“ Strategie musí být tak jasná, aby se podle ní mohl řídit dejme tomu počítačový program.

(iii) Dokážete, že tato strategie funguje proti jakékoli hře protihráče. Rozhodně nestačí říct třeba „Vlkovi se vyplatí dávat samé modré, protože při samých červených vyhraje Karkulka. To ale Karkulce stačí dávat taky modré, a až budou všechny modré, přebarvit je na červeno.“ Strategie popsaná v předchozím bodu musí být tak silná, že vlk s příslušným „Karkulčiným počítačovým programem“ prohraje, i kdyby byl vlk nekonečně inteligentní a dokonce Karkulčinu strategii znal. A nejen to, musíte přesvědčit opravovatele, že taková ta strategie opravdu je.

Popravdě jsou i jiné možnosti, jak se s matematickou hrou vypořádat (třeba když chcete dokázat, že první hráč má v piškvorkách neprohrávající strategii) – zájemcům o tuto problematiku doporučuji předloňský seriál o teorii her od Alči Skálové, který najdete na našich stránkách v sekci Matematika / Minulé ročníky. *(Mirek Olšák)*

Seriál – Letem grafovým světem I

Přestože matematika zahrnuje spoustu hezkých oblastí, mnohé z nich na střední škole moc nepotkáš. I proto se v PraSátku zavedla tradice seriálů na pokračování, kde se Ti snažíme představit právě některé z těchto odvětví. V těchto a následujících dvojích komentářích vždy najdeš jeden jeho díl a trojici úloh, k jejichž úspěšnému zdolání by Ti mělo stačit přečíst a pochopit obsah již vydaných částí. Kromě samotného výkladu látky v seriálu potkáš i několik cvičení (a návodů, jak na ně), kde si můžeš řešení zkusit „nanečisto“. Do celkového bodového hodnocení se Ti, na rozdíl od běžných sérií, započítají všechny soutěžní úlohy, které zašleš.

Jak už možná víš, tématem letošního (již osmnáctého) seriálu jsou grafy a budeme Tě jimi provázet my, Peter „πtr“ Korcsok a Martin „E.T.“ Sýkora. Pokud by se Ti v následujícím textu něco nelíbilo nebo bys něčemu nerozuměl(a), můžeš nás kontaktovat na chatu[5] na našich internetových stránkách nebo nám můžeš napsat e-mail. Přitom můžeš psát na „obecnou“ e-mailovou adresu *mks@mff.cuni.cz* nebo přímo nám dvěma (to preferujeme) na adresy, které nalezneš na stránkách v sekci „Organizátoři“.

A o čem vlastně ta teorie grafů je? To je velmi dobrá otázka, ale odpověď na ni v tomto odstavci nečekej. Onou odpovědí by totiž měl být celý seriál, který Ti ukáže, co zhruba se v teorii grafů dá studovat. Rozhodně ale ani on nedokáže v plném rozsahu popsat tuto obrovskou oblast matematiky. Mohli bychom se zde teď rozpisovat, proč se vlastně matematici takzvanými grafy zabývají (mimo to, že je to pěkná matematika). Ale protože toho zatím o grafech moc nevíme, pustíme se raději do výkladu. A až se něco naučíme, tak si i řekneme, k čemu se to dá využít v reálném světě. Rovnou ale prozradíme, že pátá úloha letošní první série byla právě z teorie grafů.

Celý výklad je přitom rozdělen do tří dílů. Začátek prvního z nich právě pročítáš. Ve zbytku se naučíš naprosté základy teorie grafů, které uslyšíš a uvidíš ještě mockrát, ale které jsou zároveň naprosto zásadní pro další práci s grafy. Zbylé dva díly se Ti dostanou do rukou v jarní části semináře. Ve druhém díle si ukážeme něco, čemu se odborně říká „systém různých reprezentantů“, ale není potřeba se toho bát, a taky si zkusíme nějaké grafy nabarvit. Ve třetím díle pak naše pouť skončí studiem takzvaných průnikových grafů.

Co to tedy ten graf je?

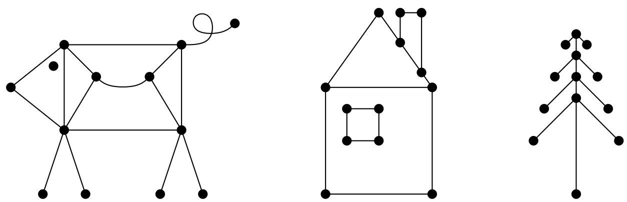
Na střední jsi už určitě potkal(a) mnoho grafů – třeba graf funkce $y = x^2$ nebo $y = \sin x$. Pokud něco podobného očekáváš i tady, musíme Tě zklamat. Grafem totiž budeme rozumět něco úplně jiného, a sice poměrně abstraktní strukturu, kterou nejlépe popisuje následující definice. Věříme, že Tě moc nevyděsí.

[5]Při psaní na chat ale dávej pozor, abys (ani omylem) nepomáhal(a) ostatním se soutěžní sérií.

Definice 1. *Graf* je uspořádaná dvojice (V, E), kde V představuje množinu *vrcholů* a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina *hran*.[6,7]

Množinu vrcholů grafu G budeme často psát jako $V(G)$ nebo V_G, podobně pak množinu hran $E(G)$ nebo E_G. Abychom se vyhnuli budoucím komplikacím, budeme uvažovat pouze grafy s neprázdnou a konečnou množinou vrcholů.

Protože tohle se dost špatně představuje a ještě hůř se s tím pracuje, často si při uvažování nad zapeklitým grafovým problémem pomáháme obrázky. Tam vrcholy jednoduše znázorníme puntíky a hrany budou představovat křivky s konci v patřičných puntících. Třeba tady jsou tři takové grafy na třinácti vrcholech.



A proč vlastně grafy zkoumáme? Mnoho věcí z běžného života se dá reprezentovat právě pomocí grafů. Stačí se podívat na mapu Českých drah nebo silniční síť – vrcholy jsou stanice nebo města a hrany představují přímé spojení mezi nimi. Dalším příkladem může být „graf přátelství“ určité skupiny lidí – každý člověk tam tvoří vrchol, přičemž spojeni hranou budou ti, kteří se přátelí. Jindy grafy popisují vztahy mezi úplně abstraktními věcmi, třeba v teorii čísel – hrany mohou představovat dvojice soudělných čísel.

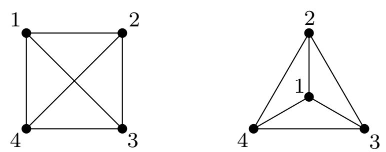
Definice 2. *Doplněk* grafu $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, E')$, kde $E' = \binom{V}{2} \setminus E$.

Tedy, volně řečeno, doplněk je něco jako „opačný“ graf – dvojice vrcholů je v $\overline{G}$ spojena právě tehdy, když není spojena v G.

Cvičení 3. Rozmysli si, že doplněk doplňku je vlastně původní graf.

Izomorfismus

Jak už bylo zmíněno, grafy si budeme poměrně často kreslit. Toto nakreslení ale zdaleka nemusí být jednoznačné. Třeba graf (V, E) s $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a $E = \binom{V}{2}$ může být nakreslen oběma z následujících způsobů.



Proto potřebujeme nějakou metodu, jak určit, kdy jsou dva obrázky tentýž graf.

[6]Tato písmena nejsou náhodná, pocházejí z anglických výrazů pro vrchol (*vertex*, v množném čísle *vertices*) a hranu (*edge*).

[7]Symbol $\binom{X}{2}$ značí množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny X.

Definice 4. Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ nazveme *izomorfní*, pokud existuje vzájemně jednoznačné[8] zobrazení $f\colon V_1 \to V_2$, kde pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V_1$ platí

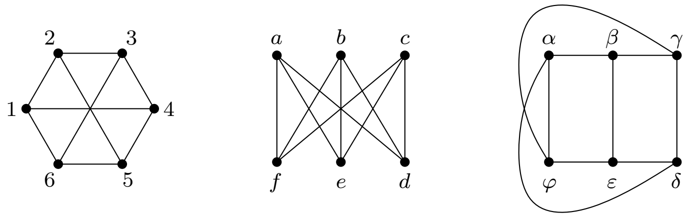
$$\{u, v\} \in E_1 \iff \big\{f(u), f(v)\big\} \in E_2.$$

Tuto skutečnost značíme $G_1 \cong G_2$ a funkci f pak také nazýváme *izomorfismem* mezi grafy G_1 a G_2.

Když se trochu vzdálíme od formalismu, jde vlastně o nějaké „přejmenování“ vrcholů bez změny hran.

Hned můžeme prozradit, že pokud $G_1 \cong G_2$ a zároveň $G_2 \cong G_3$, pak už nutně $G_1 \cong G_3$, stačí totiž vrcholy G_1 „přejmenovat“ dvakrát za sebou.

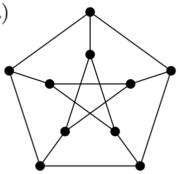
Příklad 5. Grafy na následujících třech obrázcích jsou izomorfní.



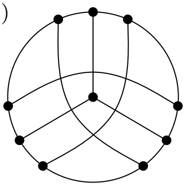
Řešení. Abychom to ukázali, potřebujeme najít příslušné izomorfismy. Na to máme hned několik možností, například přiřazení $1 \leftrightarrow a \leftrightarrow \alpha$, $2 \leftrightarrow d \leftrightarrow \beta$, $3 \leftrightarrow b \leftrightarrow \gamma$, $4 \leftrightarrow e \leftrightarrow \delta$, $5 \leftrightarrow c \leftrightarrow \varepsilon$ a $6 \leftrightarrow f \leftrightarrow \varphi$. Určitě snadno ověříš (ale je k tomu potřeba trochu práce), že vyhovují výše popsané definici. □

Cvičení 6. Rozhodni, zda následující grafy jsou izomorfní.

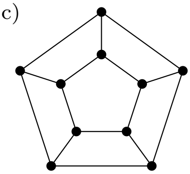
a)



b)



c)



Podgrafy

Občas se nám bude hodit podívat se jenom na část grafu a jeho zbytek nás v tom momentě nebude zajímat. Tak si to rovnou pojmenujme.

Definice 7. Graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Pokud navíc platí

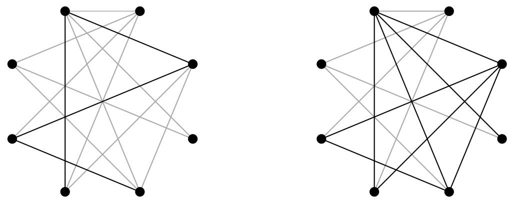
$$E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2},$$

říkáme, že H je *indukovaným podgrafem*.

[8] Zobrazení $f\colon X \to Y$ je *vzájemně jednoznačné*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$, že $f(x) = y$. Často se mu také říká *bijektivní*.

Skutečnost, že H je podgrafem G, značíme obvykle $H \subseteq G$, v případě indukovaného podgrafu $H \subseteq_{\text{ind}} G$.

Tohle je opět nejlepší ukázat na obrázku:



Vlevo je vyznačen „obyčejný“ podgraf, vpravo pak ten indukovaný. Když definici volně přeložíme do češtiny, při vytváření indukovaného podgrafu smažeme několik vrcholů a všechny hrany, které je obsahovaly. Pokud ale odstraníme i některé z dalších hran, dostaneme už podgraf neindukovaný.

Dále by se nám někdy mohlo hodit pro graf G a množinu $U \subseteq V(G)$ označit „tu část grafu G, která využívá jenom vrcholy U“ – *podgraf indukovaný vrcholy* U je podgraf $H \subseteq_{\text{ind}} G$, kde $V(H) = U$, a značíme ho $G[U]$.

A ještě si označme dva speciální podgrafy a jeden „nadgraf“. Pro graf $G = (V, E)$, jeho vrchol v a hranu e bude $G - v = G\big[V \setminus \{v\}\big]$ a $G - e = \big(V, E \setminus \{e\}\big)$. Navíc pokud $e = \{u, v\}$ je dvojice nesousedních vrcholů grafu G, tak pod $G + e$ budeme rozumět graf $\big(V, E \cup \{e\}\big)$. Značku $G + v$ neumíme rozumně zadefinovat, protože je víc možností, jak nový vrchol navázat.

Pohled zblízka

Teď se trochu pozorněji podíváme na jednotlivé vrcholy a jejich „kamarády“.

Definice 8. Nechť v je vrchol grafu G. Pak množinu všech vrcholů, které jsou spojeny hranou s v, nazýváme *sousedství* vrcholu v a značíme $N_G(v)$. Dále *stupněm* vrcholu v nazýváme počet sousedů, tedy $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.

Pokud bude jasné, který graf máme na mysli, dolní index ve značení můžeme vynechat.

Definice 9. Vrchol stupně nula nazýváme také *izolovaný vrchol* a vrchol stupně jedna *list*.

Mohlo by Tě napadnout, jestli můžeme vrcholům libovolně předepsat stupně a hledat pak graf, který tomuto předpisu vyhovuje. Odpověď je jednoduchá – nemůžeme. I o tom je následující věta.

Věta 10. (Princip sudosti) *Pro každý graf platí, že součet stupňů všech vrcholů je sudé číslo.*

Důkaz. Když se podíváme na libovolnou hranu, zjistíme, že ji v součtu stupňů započteme dvakrát – za každý její konec. Musí tedy platit

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|,$$

což je sudé číslo. □

Cvičení 11. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož všechny vrcholy by měly navzájem různé stupně?

Souvislost

Úplný úvod do teorie grafů máme zdárně za sebou, ale neusneme na vavřínech a směle se pustíme do dalších definic.

Definice 12. *Sledem v grafu G* nazveme posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$ vrcholů a hran v grafu G takovou, že pro $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Číslu n pak říkáme *délka* tohoto sledu. Speciálně tedy (v_0) je sled nulové délky.

Tahem v grafu G rozumíme sled v grafu G, jehož hrany se neopakují. *Cestou v grafu G* pak nazveme sled v grafu G, jehož vrcholy se neopakují.

Cvičení 13. Rozmysli si, že každá cesta v grafu G je zároveň tah v grafu G.

Cvičení 14. Mějme graf G a v něm ne nutně různé vrcholy u a v. Rozmysli si, že v grafu G existuje cesta mezi vrcholy u a v právě tehdy, když mezi nimi existuje tah, a to nastane právě tehdy, když mezi nimi existuje sled.[9]

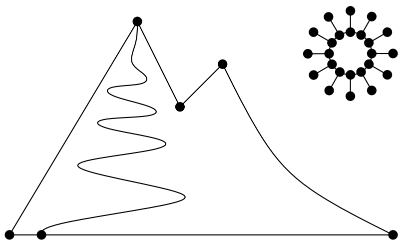
Návod. Jeden směr obou ekvivalencí je zřejmý z toho, že každá cesta je zároveň tah a každý tah je sled. Důkaz opačných implikací je v obou případech podobný. Naznačíme si ho tedy jen v případě první ekvivalence. Buď je daný tah mezi vrcholy u a v rovnou cesta, anebo je to cesta s jakýmisi „smyčkami“, které stačí vypustit, čímž z tahu uděláme cestu. □

Nyní bychom chtěli definovat takzvané souvislé grafy. To jsou ty grafy, v jejichž běžné obrázkové reprezentaci jsou každé dva vrcholy spojeny čarou složenou z nějakých hran. Jistě si snadno rozmyslíš, že následující definice říká formálním jazykem totéž.

Definice 15. Graf G nazveme *souvislým*, pokud v něm existuje tah mezi každou dvojicí jeho vrcholů.

Dále definujeme *komponentu souvislosti* v grafu G jako libovolný indukovaný podgraf grafu G, který je souvislý a který nelze rozšířit o žádný vrchol tak, aby se zachovala jeho souvislost.

Každý graf se pak rozkládá na několik komponent. Pokud je samotný graf souvislý, je tato komponenta právě jedna, v opačném případě jsou alespoň dvě.



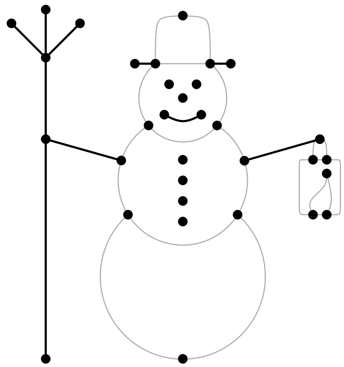
Slunce nad horami – graf se dvěma komponentami

Cvičení 16. Dokaž, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Platí to i obráceně – musí být doplněk souvislého grafu nesouvislý?

Dalším pojmem je termín most, který objasňuje následující definice.

Definice 17. Hranu e nazveme *mostem* v grafu G, pokud graf $G - e$ má víc komponent než graf G.

[9] O tahu, sledu či cestě řekneme, že je mezi vrcholy x a y v grafu G, pokud $v_0 = x$ a $v_n = y$ (nebo naopak) a $\{x, y\} \subseteq V(G)$.



Graf se zvýrazněnými mosty

Příklad 18. Dokaž, že graf, který má stupně všech vrcholů sudé, neobsahuje most.

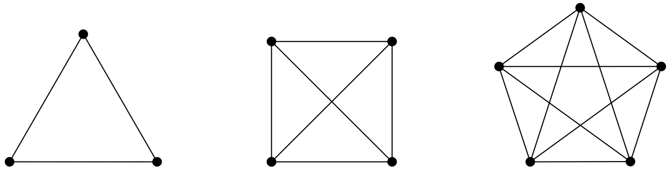
Řešení. Řešení je jednoduché a je vlastně jen důsledkem principu sudosti. Dokažme obměněnou implikaci[10]. Předpokládejme, že nějaký graf G obsahuje most e. Pak odebráním tohoto mostu vzniknou dvě nové komponenty souvislosti K a K'. Speciálně komponenta K je samostatný graf (jakožto podgraf G), takže na ni můžeme aplikovat princip sudosti. Součet stupňů vrcholů v K je sudý. Buď jsou tedy všechny stupně sudé, nebo alespoň dva liché. V prvním případě má vrchol z K, který je obsažen v mostu e, v grafu G lichý stupeň. Ve druhém případě alespoň jeden vrchol z těch vrcholů v K, které mají lichý stupeň, není obsažen v mostu e, a proto má lichý stupeň i v G. Tím jsme dokázali obměněnou implikaci a důkaz je tak hotov. □

Nejznámější typy grafů

Nyní se podíváme na některé typy grafů, které si vysloužily vlastní pojmenování, protože se často vyskytují v různých problémech.

Definice 19. O grafu $G = (V, E)$ řekneme, že je to *úplný graf na n vrcholech*, pokud $|V| = n$ a $E = \binom{V}{2}$.

Úplný graf na n vrcholech tradičně značíme K_n. Pokud Ti z definice není jasné, jak takové grafy vypadají, snad Ti to pomohou objasnit následující obrázky.

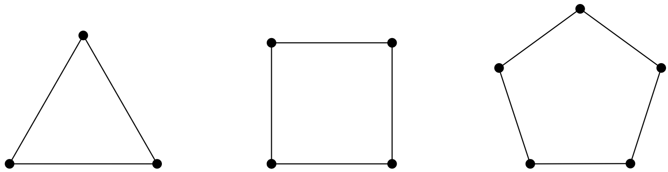


K_3 K_4 K_5

Dalšími základními typy grafů jsou kružnice na n vrcholech a cesta na n vrcholech.

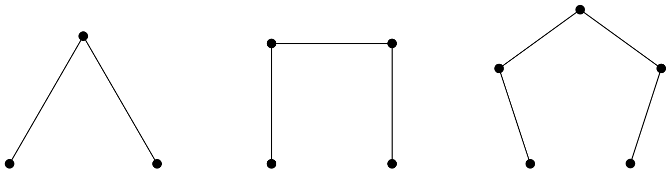
[10] Obměněnou implikací k implikaci $A \Rightarrow B$ rozumíme implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Definice 20. *Kružnice na n vrcholech* (pro $n \geq 3$) je graf C_n izomorfní grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, n\}$ a $E = \big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\big\}$.



C_3 C_4 C_5

Definice 21. *Cestou na n vrcholech* nazveme graf P_n izomorfní grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, n\}$ a $E = \big\{\{1,2\}, \{2,3\}, \dots, \{n-1, n\}\big\}$.



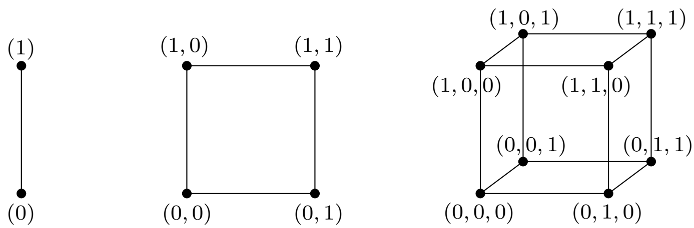
P_3 P_4 P_5

Cvičení 22. Pro která $n \in \mathbb{N}$ je kružnice C_n izomorfní se svým doplňkem?

Následující grafy už sice nepatří mezi ty úplně základní, jsou ale hezké a zaslouží si své zvláštní jméno.

Definice 23. Graf nazveme *n-krychlí* ($n \geq 0$), pokud jeho vrcholy jsou všechny n-tice nul a jedniček, přičemž dvě n-tice jsou spojeny hranou právě tehdy, když se liší na právě jedné pozici. Speciálně 0-krychle obsahuje pouze jediný vrchol.

Zavedené značení pro n-krychle je Q_n a z následujícího obrázku můžeš získat představu, jak vlastně vypadají a proč je nazýváme krychlemi.



Q_1 Q_2 Q_3

Cvičení 24. V závislosti na n urči, kolik vrcholů a kolik hran mají grafy K_n, C_n, P_n a Q_n.

Eulerovské grafy

Dovol nám jednu krátkou historickou odbočku. V první polovině osmnáctého století mělo město Královec (dnes Kaliningrad), rozkládající se na obou březích řeky Pregole a dvou říčních ostrovech, dohromady sedm mostů (viz obrázek). Leonhard Euler jako první ukázal, že není možné v rámci jedné procházky Královcem projít každý z mostů právě jednou (a to ani pokud nemusíme skončit tam, kde jsme začínali).

Sedm mostů města Královec

Tím se tedy dostáváme k další speciální třídě grafů – takzvaným eulerovským grafům. Nepřesně řečeno to jsou ty grafy, které lze nakreslit jedním tahem bez zvednutí tužky z papíru tak, abychom začali a skončili ve stejném vrcholu a abychom každou hranu projeli právě jednou. Abychom si mohli říct přesnou definici, je třeba zavést několik základních pojmů.

Definice 25. O sledu (tahu) v grafu G řekneme, že je *uzavřený*, pokud $v_0 = v_n$, jinak je *otevřený*.

Definice 26. Tah, který obsahuje všechny vrcholy a hrany svého grafu, nazveme *eulerovským*.

Uzavřenou cestu takto definovat nemůžeme, protože z definice cesty v grafu nemůže požadovaná rovnost nastat. Proto místo toho definujeme *kružnici v grafu G* jako uzavřený tah v G, v němž se neopakují vrcholy (kromě prvního a posledního).

Cvičení 27. Rozmysli si, že každá kružnice v grafu G je zároveň uzavřeným tahem v grafu G a každý uzavřený tah v G je i uzavřeným sledem v G.

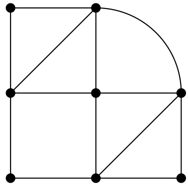
A nyní už toho víme dost na to, abychom si mohli pořádně definovat pojem eulerovských grafů.

Definice 28. O grafu řekneme, že je *eulerovský*, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

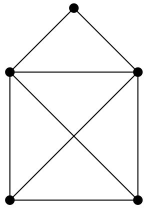
Cvičení 29. Které z následujících grafů jsou eulerovské?

a) Úplné grafy K_4, K_5, K_6.

b)



c)



Předcházející cvičení jsi jistě lehce rozlouskl(a). Možná by Tě ale zajímalo, jestli lze nějak jednoduše rozpoznat, jaký graf je eulerovský a jaký ne. Nebudeme Tě zbytečně napínat, odpověď na tuto otázku zní „Ano!“. Přesnou charakterizaci eulerovských grafů podává následující věta.

Věta 30. *Graf G je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň.*

Důkaz. Nejprve si dokažme lehčí implikaci (tedy že daná podmínka je nutná). Pokud je graf eulerovský, existuje cesta mezi každými dvěma jeho vrcholy, a proto je souvislý. Navíc pokud jdeme po daném (uzavřeném) eulerovském tahu jedním směrem, do každého vrcholu vstoupíme tolikrát, kolikrát z něho vystoupíme, takže každý vrchol má sudý stupeň.

Ve zbytku důkazu předvedeme, že tato podmínka je zároveň podmínkou postačující. Nechť tedy $t = (v_0, e_1, \ldots, v_n)$ je nejdelší možný tah v grafu G (pokud je takových tahů víc, vybereme libovolný z nich) a nechť V' a E' jsou množiny vrcholů a hran obsažených v tahu t.

Dále si ukažme, že t je uzavřený. Kdyby nebyl, sousedil by jeho koncový vrchol s lichým počtem hran z E'. Ale stupeň všech vrcholů v G je sudý, proto můžeme tah alespoň o jednu hranu prodloužit, čímž dostáváme spor s tím, že má být nejdelší možný. Tah t je tedy skutečně uzavřený, takže $v_0 = v_n$.

Teď máme dva případy. Nejprve předpokládejme, že $V \neq V'$. Pak ze souvislosti grafu G plyne, že existuje hrana $e = \{v_k, v'\}$, kde $v_k \in V'$ a $v' \in V \setminus V'$. Potom tah

$$t' = (v', e, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, v_n = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$$

je delší než tah t, neboť má délku $n + 1$, čímž dostáváme spor s výběrem tahu t.

Už tedy víme, že $V = V'$. Stačí tak jen dokázat, že $E = E'$. Pro spor předpokládejme, že nějaká hrana $f = \{v_k, v_l\}$, kde $v_k, v_l \in V'$, nenáleží E', ale náleží E. Pak má ale tah

$$t'' = (v_l, f, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, v_n = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k),$$

analogicky jako v minulém případě, délku $n + 1$. Tím jsme opět získali spor a důkaz je tak hotov. □

Možná Tě už ale napadla otázka, jaké grafy lze nakreslit jedním tahem s tím, že neskončíme v tom stejném vrcholu, ve kterém jsme začali. Takové grafy určitě znáš, je jím například poslední graf z předešlého cvičení. Formálně řečeno, jsou to grafy obsahující otevřený eulerovský tah. Těmto grafům budeme říkat *poloeulerovské*[11] a nalezení jejich charakterizace Ti přenecháme jako cvičení. Pokud bys nevěděl(a), jak na to, přečti si zadání následujícího cvičení, které dává na předchozí otázku odpověď bez důkazu. Náznak důkazu pak najdeš v návodu.

Cvičení 31. Ukaž, že graf G je poloeulerovský právě tehdy, když splňuje následující dvě podmínky.

(i) Stupeň právě dvou jeho vrcholů je lichý, u ostatních je sudý.
(ii) G je souvislý.

Návod. To, že dané podmínky jsou nutné, se dokáže podobně jako v předcházejícím důkazu. Pro důkaz opačné implikace si označme vrcholy s lichým stupněm u a v. Pokud jsou spojeny hranou $e = \{u, v\} \in E$, pak uvážíme graf $G' = G - e$, v opačném případě graf $G' = G + e$, jenž má všechny vrcholy sudého stupně. G' má pak buď jednu nebo dvě komponenty, v nichž existují uzavřené eulerovské tahy. Zbytek už jistě hravě domyslíš sám (sama). □

A teď už budeš, stejně jako Euler, umět rozhodnout, jestli je možné se procházet po Královci a projít každý z mostů právě jednou. Když si místo obou břehů a obou ostrovů představíš vrcholy a místo mostů hrany, dostaneš něco jako graf. Některé vrcholy budou sice spojeny více hranami, ale důkazy předchozích vět a cvičení je možné zobecnit i pro takovéto „skorografy"[12]. Až si

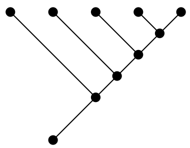
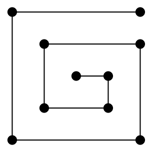
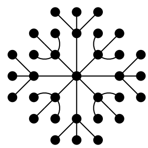
[11] Termín poloeulerovské grafy, na rozdíl od termínu eulerovské grafy, rozhodně není vžit a běžně používán.

[12] Povolíme-li volnější definici grafu, v níž umožníme spojení dvojice vrcholů více paralelními hranami, dostaneme definici *multigrafu*. Speciálně se někdy povolují i *smyčky*, tedy „hrany" s oběma konci ve stejném vrcholu. Podobně jako pro grafy, také pro multigrafy platí spousta hezkých věcí, v tomto seriálu se jim ale věnovat nebudeme.

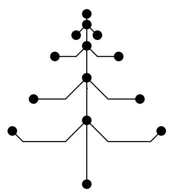
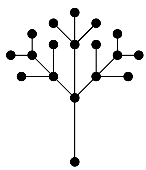
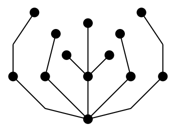
rozmyslíš odpověď, nebudeš ji stejně moci využít, pokud se někdy v Kaliningradu vyskytneš. Z tehdejších mostů už totiž stojí jen dva, jeden byl přestavěn a několik dalších postaveno.

Stromy

Zkus se teď podívat na následující obrázky a říct si, co mají společného.

Ano, hádáš správně, jsou to souvislé grafy, které neobsahují kružnici jako podgraf. Takovýmto grafům říkáme *stromy* a tradičně je značíme velkým písmenem T.[13] Pokud Tě zaráží, proč právě název „strom“, věz, že i opravdové stromy a křoviny jsou souvislé, ale neobsahují kružnice, jak ukazují následující obrázky.

Jistě s námi budeš souhlasit, že každý správný strom má listy (alespoň pokud bereme jehličí jako speciální formu listů). A právě o tom hovoří následující věta.

Věta 32. *Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.*

Důkaz. Uvažme libovolný strom s alespoň dvěma vrcholy a označme jej T. Nechť posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ je cesta v grafu T mezi vrcholy v_0 a v_n taková, že žádná jiná cesta v grafu T není delší. Pak speciálně platí, že tuto cestu nejde prodloužit. Stejně tak nemůže vést žádná další hrana z jejích konců do zbytku cesty, proto mají vrcholy v_0 a v_n stupeň jedna. □

Další věta hovoří o tom, že i když stromu odebereme nebo přidáme list, stromem být nepřestane. Její důkaz je lehký a plyne přímo z definice stromu, takže Ti jej rádi přenecháme jako jednoduché cvičení.

Věta 33. *Buď $G = (V, E)$ graf na alespoň dvou vrcholech a l list v G. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) *G je strom.*
(2) *$G - l$ je strom.*

Stromy jsou ale tak pěkné, že je lze ekvivalentně definovat mnoha způsoby. O některých z nich hovoří následující věta.

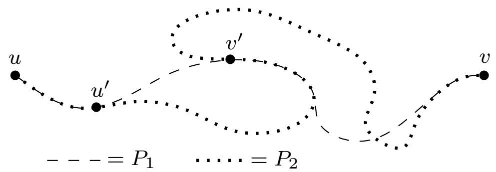
[13] Písmeno T opět pochází z anglického pojmu pro strom – *tree*.

Věta 34. *Pro graf $G = (V, E)$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(1) *G je strom.*
(2) *Pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje jediná cesta v G z u do v.*
(3) *G je souvislý a odebráním libovolné hrany souvislým být přestane.*
(4) *G je graf bez kružnic a přidáním libovolné hrany by v něm vznikla kružnice.*
(5) *G je souvislý a $|E| = |V| - 1$.*

Důkaz. Ekvivalenci všech tvrzení dokážeme postupně. Složením následujících implikací dostaneme všechny požadované vztahy.

(1) ⇒ (2): Přímo z definice stromu víme, že nějaká cesta z u do v vede. Pokud by ale existovaly dvě (P_1 a P_2), nalezneme první místo od u, kde se tyto cesty rozdělí, a označíme ho u'. Z tohoto bodu se vydáme po cestě P_1 a opět se zastavíme v momentě, kdy narazíme na vrchol v', jenž je taky na cestě P_2. Úseky cest mezi vrcholy u' a v' označme P_1' a P_2'.



A teď si stačí uvědomit, že cesty P_1' a P_2' spolu sdílejí pouze své konce – vrcholy u' a v'. Jejich spojením tedy dostáváme kružnici, což je ale ve sporu s definicí stromu.

(2) ⇒ (3): Mějme graf G a libovolnou hranu $e = \{u, v\}$. Potom posloupnost (u, e, v) je zjevně cesta mezi u a v. Pokud bychom odstraněním této hrany dostali souvislý graf, musí existovat nějaká druhá cesta mezi u a v, čímž dostáváme spor.

(3) ⇒ (1): Souvislost grafu G už máme, stačí nám tedy ukázat, že neobsahuje kružnici. Pro spor předpokládejme, že tam existuje kružnice C, a označme e libovolnou její hranu. Ukážeme, že pak graf $G - e$ je souvislý. Ze souvislosti víme, že každé dva vrcholy jsou v grafu G propojeny cestou. Mohou nastat dva případy:

1. Tato cesta hranu e nevyužívá, pak bez změny existuje taky v $G - e$.
2. Cesta prochází hranou e. Můžeme ji upravit na sled v $G - e$ tím, že místo „kroku" přes e „obejdeme" zbytek kružnice C.

Každé dva vrcholy v $G - e$ jsou tedy spojeny sledem, což k souvislosti stačí.

(2) ⇒ (4): Mějme graf G a libovolnou nehranu $e = \{u, v\}$. Víme, že mezi vrcholy u a v vede cesta, přidáním hrany e z ní tedy vytvoříme kružnici.

(4) ⇒ (1): Už máme, že G neobsahuje kružnici, ukažme tedy, že je také souvislý. Vezměme si libovolné dva vrcholy u a v. Pokud jsou přímo spojeny hranou, pak tato hrana je zároveň i cesta mezi nimi.

Předpokládejme tedy, že mezi u a v hrana není. Dle (4) přidání libovolné hrany vytvoří kružnici, speciálně tedy musí existovat i cesta mezi u a v, jinak by hrana $\{u, v\}$ kružnici nevytvořila.

(1) ⇒ (5): Souvislost máme opět přímo z definice stromu a vztah počtu hran a vrcholů dokážeme indukcí dle počtu vrcholů. Pro graf s jediným vrcholem triviálně platí, protože $|V| = 1$ a $|E| = 0$.

O stromě s alespoň dvěma vrcholy už víme, že má alespoň dva listy. Označme l libovolný z nich, pak už taky víme, že $G - l$ je opět strom, jenž má ale menší počet vrcholů. Teď můžeme uplatnit indukční předpoklad (tedy rovnost $|E(G - l)| = |V(G - l)| - 1$), přičemž zároveň platí i $|E(G - l)| = |E| - 1$ (s „odtržením" listu jsme odebrali také jednu hranu) a $|V(G - l)| = |V| - 1$. Z těchto tří rovností dostaneme požadovaný vztah.

(5) ⇒ (1): Opět využijeme indukci dle počtu vrcholů. Jediný graf s jediným vrcholem je zároveň i strom. Pro větší grafy víme ze vztahu

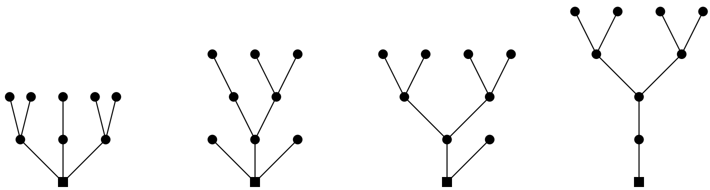
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E| = 2 \cdot |V| - 2,$$

že musí existovat alespoň jeden vrchol l, jenž má nanejvýš jednoho souseda. Pokud by ale neměl žádného, nemůže být graf souvislý, proto vrchol l má právě jednoho souseda a je tedy list.

Podívejme se na graf $G - l$: oproti grafu G má o jednu hranu a jeden vrchol méně, proto vztah $|E(G-l)| = |V(G-l)| - 1$ platí, stejně tak je graf $G - l$ souvislý (jinak by nebyl souvislý ani graf G). Použitím indukčního předpokladu dostáváme, že $G - l$ je strom, a tedy z předešlé věty plyne, že i G musí být strom. $\square$

V přírodě má většina stromů svůj kořen. Jinak tomu nebude ani tady, protože někdy se nám při práci se stromy může hodit je zakořenit.

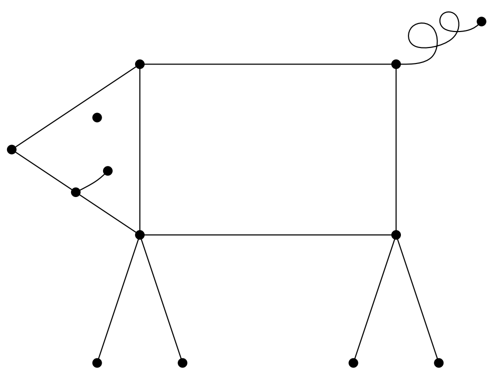
Definice 35. *Zakořeněným stromem* budeme rozumět dvojici (T, r), kde T je strom a r jeden z jeho vrcholů, běžně označovaný jako *kořen.*[14]



Několik variant zakořenění jednoho stromu

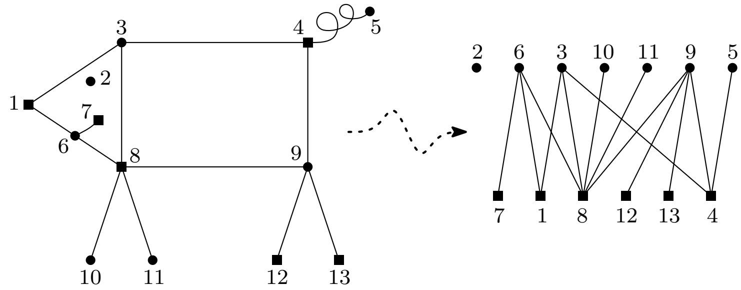
Bipartitní grafy

Další poměrně rozsáhlou skupinou jsou takzvané *bipartitní grafy.* To jsou ty grafy, jejichž vrcholy se dají rozdělit do dvou skupinek tak, aby žádná hrana nevedla uvnitř některé z nich. Tyto skupinky také nazýváme *partity* grafu. Jeden takový graf je na následujícím obrázku.



[14]Písmeno r pochází, stejně jako minule, z anglického slova pro kořen – *root.*

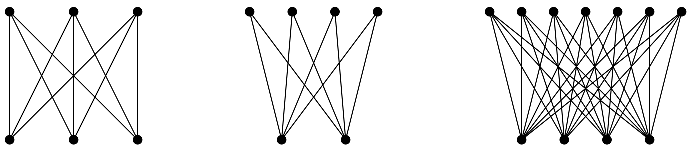
A jak tedy vypadá to rozdělení do skupinek?



Opět přidaným slovíčkem *úplný* budeme označovat ty bipartitní grafy, které mají všechny možné hrany. V zkrácené verzi je budeme značit $K_{m,n}$, kde m a n představují počty vrcholů v jednotlivých skupinkách. Možná už znáš (relativně starou) grafovou hříčku, ve které vystupuje úplný bipartitní graf $K_{3,3}$:

Úloha 36. V jistém kraji jsou tři domky a tři studny. Je možné spojit každý z těchto domků s každou ze studní, pokud se cesty nesmějí křížit?

Následující obrázek ukazuje několik dalších úplných bipartitních grafů.



$K_{3,3}$ $K_{4,2}$ $K_{7,4}$

Charakterizace bipartitních grafů

Když už teď víme, co to bipartitní grafy vůbec jsou, můžeme se ještě podívat na způsoby, jak tuto vlastnost odhalit.

Cvičení 37. O následujících grafech rozhodni, jestli jsou bipartitní, nebo ne:

a) cesty P_3, P_4, P_5, P_6;
b) kružnice C_3, C_4, C_5, C_6;
c) úplné grafy K_3, K_4, K_5, K_6;
d) krychle Q_3, Q_4, Q_5, Q_6;
e) stromy.

Pokud jsi toto cvičení poctivě vyřešil(a), část následujícího tvrzení Tě už asi nepřekvapí.

Věta 38. *Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky jako podgraf.*

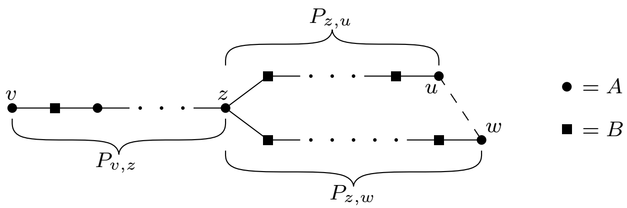
Důkaz. Jeden směr implikace je poměrně jednoduchý: označíme-li si vrcholy jedné partity A a druhé B, pak na libovolné kružnici se musejí tato písmena střídat, což přímo zajišťuje sudou délku kružnice.

Pro opačný směr předpokládejme, že máme graf bez lichých kružnic. Opět budeme označovat vrcholy písmeny A a B: začneme libovolným vrcholem v, který dostane A, pak všichni jeho sousedi budou B, všichni sousedi sousedů dostanou opět A a tak dále. Tak budeme postupovat, dokud buď nebudou označeny všechny vrcholy, nebo dokud nám nebude algoritmus přikazovat

„přejmenovat“ nějaký vrchol. V případě nesouvislého grafu nejprve označíme vrcholy jedné komponenty a následně budeme stejně pokračovat na dalších komponentách.

Pokud jsme označili všechny vrcholy, podařilo se nám určit partity a tím také dokázat, že graf je skutečně bipartitní. V opačném případě označme u vrchol, který měl dostat druhé písmeno, a w jeho souseda, jenž toto „dvojoznačení“ způsobil. Určitě platí, že oba tyto vrcholy mají stejné písmeno.

Když se teď zpětně podíváme na všechny vrcholy, které zapříčinily označení pro vrcholy u a w, dostaneme cesty $P_{v,u}$ a $P_{v,w}$ z vrcholu v do u a w. Označme ještě poslední společný vrchol obou cest z.



Jedna z možných situací

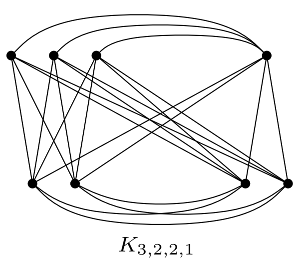
Cesty $P_{z,u}$ a $P_{z,w}$ vytváří spolu s hranou $\{u, w\}$ kružnici C. Už víme, že vrcholy u a w jsou označeny stejným písmenem, proto mohou nastat pouze dva případy:

1. Vrchol z má stejné písmeno jako u a v, pak cesta $P_{z,u}$ má sudý počet hran, stejně tak i cesta $P_{z,w}$. Spolu s hranou $\{u, w\}$ má pak kružnice C lichý počet hran, což je spor s naším předpokladem.
2. Písmeno u vrcholu z se liší od písmen u a v, pak obě cesty $P_{z,u}$ i $P_{z,w}$ obsahují lichý počet hran, což spolu s hranou $\{u, w\}$ dává opět lichý počet hran pro kružnici C. Znovu tedy dostáváme spor. □

Postup označování vrcholů písmeny, který jsme použili v důkazu, můžeme taky použít na libovolný graf, o němž potřebujeme určit, je-li bipartitní. Buď se nám podaří označit všechny vrcholy, nebo nalezneme nějakou lichou kružnici, která „nebipartitnost“ grafu potvrdí.

Vícepartitní grafy

Bipartitní grafy se dají zobecnit na grafy *k-partitní* – vrcholy těchto grafů lze rozdělit na k disjunktních množin tak, aby konce každé hrany byly v různých množinách. *Úplnost* je u těchto grafů podobná jako u těch bipartitních – $K_{n_1,\ldots,n_k}$ označuje graf, který má k skupin vrcholů (velikostí n_1 až n_k) a každá dvojice vrcholů z různých skupinek je spojena hranou.



$K_{3,2,2,1}$

Závěrem

Pokud jsi dočetl(a) až sem, můžeš si gratulovat, protože těmito odstavci první díl seriálu končí. Ještě než se ale odmlčíme, splatíme dluh, který vůči Tobě máme.

Asi sis všiml(a), že jsme na začátku slibovali udávání příkladů z reálného světa, které budou demonstrovat možnosti praktických aplikací teorie grafů. A také Ti asi neuniklo, že jsme se potom o téměř žádném využití nezmínili. Nyní přichází čas to napravit.

Jednoduchoučkým důsledkem principu sudosti je fakt, že vrcholů lichého stupně je v grafu sudý počet. Pokud tedy v grafu najdeme jeden vrchol lichého stupně, víme bez hledání, že alespoň jeden další vrchol má lichý stupeň. Pokud tedy na mapě v autoatlasu najdeš město, ze kterého vychází lichý počet silnic, můžeš ihned usoudit, že z nějakého jiného města také povede lichý počet silnic.[15] Navíc o daném systému měst a silnic můžeš s jistotou prohlásit, že nelze projet každou silnici právě jednou (a navštívit všechna města) tak, abychom se vrátili do města, ze kterého jsme vyjeli. Bez poznatků teorie grafů bys na něco takového přišel (přišla) asi poměrně těžko.

Dobře, uznáváme, že výše uvedené aplikace jsou možná hezké, ale asi by se bez nich dalo žít. Pokud by ses tedy chtěl(a) dozvědět o něčem, co má skutečně použitelné aplikace, nastuduj si třeba hledání nejkratší cesty v grafu.[16] Zatím jsme si řekli, co to je cesta. Neřekli jsme si ale, jak poznat, jestli mezi dvěma vrcholy vede, a pokud ano (a pokud jich je víc), jaká je nejkratší. Navíc se dá problém nalezení nejkratší cesty ještě zesložitit tím, že každé hraně přiřadíme číslo reprezentující délku dané hrany a délkou cesty budeme rozumět součet délek všech jejích hran. I takový problém ale je řešitelný a k řešení pomohla právě teorie grafů. To, že se řešení výše zmíněného problému dá použít pro řešení reálných problémů, je jasné – například pro hledání nejkratší cesty z jednoho města do druhého. A hlavně něco podobného dělá třeba IDOS, když Ti vyhledává nejrychlejší spojení.

Jako malou odměnu za vytrvalost nabízíme řešení některých cvičení, abys měl(a) možnost si zkontrolovat správnost svých výsledků:

6. Grafy na obrázcích a) a b) navzájem izomorfní jsou. Graf na obrázku c) naopak obsahuje kružnice na čtyřech vrcholech, které ale zbylé dva grafy neobsahují, proto s nimi izomorfní být nemůže.

11. Neexistuje. Musel by obsahovat izolovaný vrchol a zároveň vrchol sousedící se všemi ostatními vrcholy.

22. $\overline{C_n} \cong C_n$ platí pouze pro $n = 5$.

24. Úplný graf K_n má n vrcholů a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ hran, kružnice C_n má n vrcholů i hran a cesta P_n má n vrcholů a $n-1$ hran. Krychle Q_n obsahuje 2^n vrcholů a hran má $n \cdot 2^{n-1}$.

29. Eulerovský je graf K_5 a graf z obrázku b), zbylé grafy eulerovské nejsou.

37. Bipartitní jsou všechny cesty, krychle a stromy, dále ještě kružnice C_4 a C_6, ostatní grafy bipartitní nejsou.

A to už je od nás pro tuto chvíli opravdu vše. Děkujeme Ti za pozornost a za to, žes měl(a) trpělivost a dočetl(a) text až sem. Přejeme Ti mnoho štěstí v soutěžní sérii a těšíme se na společné absolvování druhého dílu.

---

[15] To ovšem za předpokladu, že žádná silnice nekončí uprostřed pole.

[16] V seriálu se tímto tématem zabývat nebudeme. K nastudování doporučujeme knížku *Kapitoly z diskrétní matematiky* od profesorů Matouška a Nešetřila; samozřejmě lze také hledat na internetu. Zdrojů je mnoho.

1. podzimní série – Barevné úlohy

Výsledková listina

1.–5.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–5.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	– – 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–5.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	3 – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–5.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	– – 3 5 5 5 5 5	25 + i	**25,00**
1.–5.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
6.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	3 3 3 5 5 3 – –	19	**23,11**
7.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	3 3 3 5 5 4 – 0	20	**22,94**
8.	*David*	*Kozina*	1	SPŠEIT BO	3 3 3 5 5 2 1 0	19	**22,43**
9.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	3 2 3 5 5 5 – –	21	**22,42**
10.–11.	*Peter*	*Macko*	0	ŠpMNDaG BA	3 3 3 5 – 3 – –	17	**22,17**
10.–11.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	3 – – 5 5 5 – 5	23	**22,17**
12.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	3 2 – 4 4 3 – 3	17	**22,02**
13.	*Martin*	*Surma*	4	GJWolkraPV	3 3 3 5 5 5 5 3	23	**21,89**
14.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	3 2 3 5 5 0 – –	18	**21,88**
15.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	3 3 3 5 5 1 2 –	19	**21,52**
16.	*Jakub*	*Matěna*	3	GČeskoliPH	3 3 2 5 4 5 – –	20	**21,33**
17.	*Soňa*	*Burešová*	1	GHeyrovPH	3 3 3 5 3 – – –	17	**21,30**
18.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	3 2 3 5 5 3 2 0	19	**21,24**
19.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	3 3 3 5 2 1 1 3	17	**21,17**
20.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	3 3 2 5 1 1 2 2	15	**21,07**
21.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 3 5 4 5	22	**20,84**
22.–24.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	3 2 3 5 3 2 1 0	16	**20,67**
22.–24.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	3 3 3 5 – – 2 0	16	**20,67**
22.–24.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	3 3 2 5 3 2 1 –	16	**20,67**
25.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	3 3 3 5 3 2 2 0	17	**20,58**
26.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	3 3 2 5 5 5 – –	21	**20,46**
27.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	3 3 3 3 0 2 1 0	14	**20,44**
28.	*Tomáš*	*Macek*	2	G Náchod	3 3 3 5 2 3 1 0	17	**20,12**
29.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 4 5 – 5	22	**20,11**
30.–31.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	3 0 3 5 4 0 0 0	15	**20,00**
30.–31.	*Iva*	*Švecová*	1	GJMasar JI	3 3 2 5 2 2 1 0	15	**20,00**
32.	*Zuzana*	*Frankovská*	3	GJHroncaBA	3 3 3 4 – 5 – –	18	**19,83**
33.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 5 5 2 –	21	**19,72**
34.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	3 2 1 5 5 3 1 –	18	**19,51**
35.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	1 3 3 5 3 1 – –	15	**19,43**
36.–37.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	3 3 3 5 – – 2 –	16	**19,37**
36.–37.	*Filip*	*Oplt*	2	GBudějovPH	3 3 3 4 3 1 1 0	16	**19,37**
38.–39.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	3 3 2 5 – 1 – –	14	**19,28**
38.–39.	*Lucia*	*Klasová*	1	G Gröss BA	3 2 3 5 – 1 – –	14	**19,28**

40.	*Šimon*	*Karch*	1	G KomHavíř	3 3 2 4 2 2 1 –	14 – *i*	**19,08**
41.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	3 2 3 5 5 – – –	18	**19,05**
42.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	3 3 3 5 5 5 – –	21 + *i*	**19,04**
43.–49.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	3 3 3 5 5 0 2 0	19	**19,00**
43.–49.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	3 3 3 5 3 3 2 0	17	**19,00**
43.–49.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	1 3 3 5 4 2 – –	17	**19,00**
43.–49.	*Minh Thao*	*Nguyen*	3	GEBenešeKL	3 3 3 5 – 2 3 –	17	**19,00**
43.–49.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	3 3 3 5 3 – 1 –	17	**19,00**
43.–49.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	3 3 3 5 2 2 3 –	17	**19,00**
43.–49.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 5 – 2 3	19	**19,00**
50.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	3 2 3 5 5 – – –	18	**18,89**
51.	*Jan*	*Knížek*	4	G Strakon	3 3 3 5 – 5 – –	19	**18,65**
52.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	– 3 3 5 4 – – –	15	**18,59**
53.–54.	*Petr*	*Ježek*	1	GBNěmcovHK	3 0 3 3 4 – – –	13	**18,52**
53.–54.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	3 3 3 1 3 0 1 –	13	**18,52**
55.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	3 3 3 5 – 0 – –	14	**18,46**
56.	*Marián*	*Poppr*	4	GJNerudyPH	3 3 – 5 4 5 4 0	21	**18,31**
57.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 3 3 5 2 3 2 –	17	**18,28**
58.	*Lukáš*	*Pavela*	0	LSG Letohrad	3 – 2 5 1 – 0 –	11	**18,23**
59.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	– 2 – 5 5 5 2 5	22	**18,21**
60.–61.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	3 3 3 5 – – 2 –	16	**18,15**
60.–61.	*Marek*	*Murin*	3	GJHroncaBA	3 3 3 5 – 2 – –	16	**18,15**
62.	*Tomáš*	*Kuzma*	3	GJHroncaBA	3 3 3 5 3 3 1 –	17	**18,14**
63.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	3 3 3 5 4 – – –	18	**18,00**
64.	*Katarína*	*Krajčiová*	4	GAlejKošic	3 3 3 5 5 5 3 –	21	**17,91**
65.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	3 2 3 5 4 – – –	17	**17,88**
66.–74.	*Martin*	*Barnovský*	2	GStĽubovňa	3 2 3 5 – – 1 1	14	**17,77**
66.–74.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	3 1 3 3 3 2 2 0	14	**17,77**
66.–74.	*Petr*	*Chmel*	2	G Kralupy	3 3 3 5 – – – 0	14	**17,77**
66.–74.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3 2 2 3 3 3 1 0	14	**17,77**
66.–74.	*Jan*	*Dopita*	2	GBudějovPH	3 2 3 5 0 1 0 0	14	**17,77**
66.–74.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	3 3 3 5 – – – –	14	**17,77**
66.–74.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	3 3 3 4 1 1 1 0	14	**17,77**
66.–74.	*Adrián*	*Mokrý*	2	GNVPlániPH	3 3 – 5 3 – – –	14	**17,77**
66.–74.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 – – – –	14	**17,77**
75.–76.	*Jakub*	*Gregora*	1	GLanškroun	1 3 3 1 2 2 2 0	12	**17,70**
75.–76.	*Jiří*	*Nábělek*	1	G Bílovec	1 1 3 5 1 1 2 0	12	**17,70**
77.	*Přemysl*	*Šťastný*	2	G Žamberk	3 2 2 5 1 2 – –	14	**17,49**
78.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	3 3 3 1 2 3 – –	14 + *i*	**17,43**
79.–80.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 – 1 – –	15	**17,27**
79.–80.	*Václav*	*Málek*	3	G Chotěboř	3 3 3 5 1 – 0 –	15	**17,27**
81.	*Jan*	*Václavek*	3	G Ústí n O	3 3 3 5 2 – – –	16	**17,24**
82.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 5 0 – –	19	**17,20**
83.	*Tereza*	*Kislingerová*	2	G Klatovy	3 3 3 – 2 3 – –	14	**17,15**
84.	*Radek*	*Zikmund*	4	G HavlBrod	3 2 3 5 3 2 3 –	17	**17,00**
85.–87.	*Lukáš*	*Fruněk*	2	GLesníZlín	3 2 2 5 – 0 1 –	13	**16,90**
85.–87.	*Zuzana*	*Urbanová*	2	GUBalvanJN	3 3 3 4 – – – 0	13	**16,90**
85.–87.	*František*	*Zajíc*	2	G Nymburk	3 3 – 5 2 – – 0	13	**16,90**
88.	*Marek*	*Černý*	4	G Chrudim	3 2 3 5 4 2 2 –	17	**16,84**
89.–96.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	3 2 2 3 1 – 1 –	11	**16,83**
89.–96.	*Jakub*	*Ditrich*	1	GÚstavníPH	3 3 3 – 1 0 1 0	11	**16,83**

89.–96.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	3 0 2 5 1 – – –	11	**16,83**
89.–96.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	3 3 2 – 1 2 1 0	11	**16,83**
89.–96.	*Jan*	*Pekař*	1	GJPekařeMB	3 2 3 1 2 1 1 0	11	**16,83**
89.–96.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	3 3 3 1 1 1 – 0	11	**16,83**
89.–96.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	– – 3 5 3 – – –	11	**16,83**
89.–96.	*Roman*	*Walica*	1	G Třinec	3 1 2 5 0 0 0 0	11	**16,83**
97.	*Štěpán*	*Procházka*	4	GSRandyJN	3 3 3 5 3 2 0 –	17	**16,45**
98.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 2 2 1 1 1 0 0	9	**16,42**
99.	*Martin*	*Zahradníček*	4	GŠlapanice	3 2 3 5 3 – – –	$16+i$	**16,27**
100.–102.	*Adéla*	*Jalovcová*	2	GNerudCheb	3 1 – 5 1 2 1 0	12	**16,00**
100.–102.	*Ondřej*	*Lomický*	2	G Plasy	3 3 2 3 – 0 1 –	12	**16,00**
100.–102.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3 2 3 3 0 1 1 0	12	**16,00**
103.–106.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	3 2 2 1 2 0 1 0	10	**15,89**
103.–106.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	3 3 3 – 1 – – –	10	**15,89**
103.–106.	*Matěj*	*Kletečka*	1	G HavlBrod	3 3 2 1 1 0 0 0	10	**15,89**
103.–106.	*Borek*	*Požár*	1	G Rakovník	3 2 3 1 1 1 1 0	10	**15,89**
107.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 – 3 – –	17	**15,48**
108.–109.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 2 5 – – – –	13	**15,43**
108.–109.	*Lukáš*	*Zíb*	3	GPísnickPH	3 – 3 5 – – 2 0	13	**15,43**
110.–112.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	3 2 – – 0 2 1 –	8	**15,39**
110.–112.	*Filip*	*Keller*	0	G Milevsko	3 0 2 – 1 2 – –	8	**15,39**
110.–112.	*Jaroslava*	*Šamanová*	0	G Tišnov	3 – 3 – 0 1 1 0	8	**15,39**
113.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	3 2 3 5 – 0 – –	13	**15,35**
114.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	3 3 3 – 2 2 1 0	13	**15,32**
115.	*Ondřej*	*Darmovzal*	4	GJarošeBO	3 1 2 5 5 – – –	16	**15,10**
116.	*Šárka*	*Vavrečková*	2	GBezručeFM	3 2 3 0 2 1 1 0	11	**15,05**
117.	*Markéta*	*Horová*	3	GMikul23PL	3 3 2 5 1 – – –	14	**15,03**
118.–119.	*Ronald*	*Luc*	2	GJarošeBO	3 3 – 5 – – – –	11	**15,00**
118.–119.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	3 3 3 5 – – 1 –	15	**15,00**
120.–126.	*Jan*	*Došek*	1	G Brandýs	3 0 3 2 1 0 0 0	9	**14,89**
120.–126.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	3 1 2 – 2 1 – 0	9	**14,89**
120.–126.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	3 1 3 – 2 0 0 –	9	**14,89**
120.–126.	*Vladislav*	*Najvárek*	1	GBezručeFM	3 2 3 1 – – 0 –	9	**14,89**
120.–126.	*Marián*	*Okál*	1	SŠNvh	3 3 3 – – – – 0	9	**14,89**
120.–126.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	3 1 2 1 0 2 0 0	9	**14,89**
120.–126.	*Martin*	*Strnad*	1	G Dobříš	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
127.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	3 1 3 3 1 – – –	11	**14,82**
128.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	3 – 2 5 1 – – –	11	**14,48**
129.–130.	*Martin*	*Kutiš*	3	G Humpolec	3 1 2 4 2 0 1 0	12	**14,47**
129.–130.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	3 1 3 5 – – – –	12	**14,47**
131.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	3 1 3 – 0 0 – 0	7	**14,27**
132.	*Jan*	*Šuta*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 2 – 1 1 – 0	10	**14,05**
133.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	3 – 3 5 3 – 0 0	14	**14,00**
134.–135.	*Zuzana*	*Klimsová*	1	GJMasar JI	3 1 2 0 1 0 1 0	8	**13,81**
134.–135.	*Veronika*	*Venclová*	1	G Chrudim	3 1 2 – – 2 – –	8	**13,81**
136.	*Marie*	*Vonzino*	2	GTomkovaOL	3 3 2 1 1 0 1 –	10	**13,69**
137.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	1 3 2 5 1 – – –	12	**13,68**
138.–140.	*Zdeněk*	*Lukeš*	3	GNeumannŽR	3 2 2 – 2 2 – –	11	**13,47**
138.–140.	*Pavla*	*Nováková*	3	GJarošeBO	3 3 3 1 1 – – –	11	**13,47**
138.–140.	*Martin*	*Scheubrein*	3	G MasNámTŘ	3 3 2 – 3 0 – 0	11	**13,47**
141.	*Adéla*	*Šedová*	3	GJungmanLT	3 – – 5 2 0 1 –	11	**13,38**

142.–143.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	3 1 1 – 0 – 1 –	6	**13,03**
142.–143.	*Ekaterina*	*Pichugina*	0	GJarkovPH	3 1 2 0 0 0 – –	6	**13,03**
144.–149.	*Michal*	*Bubeník*	2	BiskG Brno	3 3 – – 2 0 1 0	9	**13,00**
144.–149.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	3 2 3 0 1 – – –	9	**13,00**
144.–149.	*Lucie*	*Janštová*	2	SlovanG OL	3 1 3 – 1 1 – –	9	**13,00**
144.–149.	*Soňa*	*Lisníková*	2	GBezručeFM	3 1 2 1 1 2 0 –	9	**13,00**
144.–149.	*Martina*	*Petráková*	2	GOA Pelh	3 3 2 – 1 – – 0	9	**13,00**
144.–149.	*Leoš*	*Smetana*	2	G Jaroměř	3 1 3 – 1 – 1 0	9	**13,00**
150.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	3 3 2 1 2 1 1 0	11	**12,85**
151.–156.	*Martin*	*Beran*	1	SPŠLegioJI	1 2 – 1 2 – 1 0	7	**12,64**
151.–156.	*Andrej*	*Čermák*	1	GJF Šaľa	3 1 2 – 1 – 0 –	7	**12,64**
151.–156.	*Matyáš*	*Kalous*	1	GDomažlice	3 1 2 1 – – 0 0	7	**12,64**
151.–156.	*Vladimír*	*Kistan*	1	G Rýmařov	3 – 2 1 1 – – –	7	**12,64**
151.–156.	*Matěj*	*Konvalinka*	1	GOA Sedlča	3 2 – – 1 – 1 0	7	**12,64**
151.–156.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	3 2 – – 2 – – –	7	**12,64**
157.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	3 3 2 – 2 – – 0	10	**12,45**
158.	*Kristýna*	*Šudomová*	3	GValašKlob	3 – – 5 3 0 – –	11	**12,17**
159.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	3 2 3 5 – 2 – –	15	**12,14**
160.	*Pavel*	*Mikuš*	4	G Mělník	– 3 3 5 1 – – –	12	**12,00**
161.	*Marie*	*Freibergová*	2	G Děčín	3 3 0 1 1 – – –	8	**11,89**
162.	*Martin*	*Kopřiva*	3	GMikul23PL	3 1 2 4 1 – – –	11	**11,78**
163.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	3 3 3 5 – – – –	14	**11,69**
164.	*Tomáš*	*Troján*	0	GNerudCheb	0 1 2 1 0 0 1 0	5	**11,66**
165.–167.	*Markéta*	*Doležalová*	3	GTNovákBO	3 1 3 2 – 0 – 0	9	**11,39**
165.–167.	*Michal*	*Porubsky*	3	GCyMeNitra	3 3 3 – – – – –	9	**11,39**
165.–167.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	3 3 3 – – 0 – 0	9	**11,39**
168.–170.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	3 1 – – 2 0 – –	6	**11,38**
168.–170.	*Daniela*	*Hrbáčová*	1	WichtG OS	3 0 1 1 0 0 1 0	6	**11,38**
168.–170.	*Matúš*	*Varhaník*	1	G Bytča	3 0 2 1 0 – – –	6	**11,38**
171.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	3 3 3 5 – – – –	14	**11,33**
172.	*Adam*	*Říha*	3	G ČesLípa	3 2 2 0 1 1 1 0	9	**11,09**
173.	*David*	*Neugebauer*	2	SlezkéG OP	1 3 0 1 0 1 1 0	7	**10,72**
174.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	3 0 2 1 1 0 1 –	8	**10,30**
175.–177.	*Kateřina*	*Čížková*	1	G Rokycany	3 – 0 1 0 – 1 0	5	**10,00**
175.–177.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	3 – – – 2 – – –	5	**10,00**
175.–177.	*Adéla*	*Zveřinová*	1	GJiříPoděb	3 1 – – 1 – – 0	5	**10,00**
178.	*Ondrej*	*Bínovský*	4	GAnMeTr	– – – 5 5 0 – –	10	**9,61**
179.–182.	*Ludmila*	*Hudská*	2	RakGymPH	2 – 1 1 1 1 0 0	6	**9,48**
179.–182.	*Veronika*	*Jehličková*	2	GNadKavaPH	3 1 1 – 1 – – –	6	**9,48**
179.–182.	*Kateřina*	*Škorvánková*	2	G Rokycany	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
179.–182.	*Pavel*	*Turinský*	2	G Brandýs	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
183.–186.	*Michaela*	*Jakešová*	3	GJarošeBO	3 – 3 1 – – – –	7	**9,17**
183.–186.	*Milan*	*Kubala*	3	GTajBanBys	3 1 3 – – – – –	7	**9,17**
183.–186.	*Noemi*	*Kuželová*	3	GBalbínaHK	3 1 2 – – 0 1 0	7	**9,17**
183.–186.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	3 1 3 – – – – –	7	**9,17**
187.	*Martin*	*Repčík*	4		3 – 2 1 0 2 1 –	9	**9,00**
188.	*Alexandra*	*Horkavá*	1	GB Sučany	3 1 0 – 0 0 0 0	4	**8,48**
189.–190.	*Jiří*	*Matyáš*	3	OATGM KnO	3 1 – – 1 – 1 –	6	**8,00**
189.–190.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	3 1 2 1 1 0 0 –	8	**8,00**
191.	*Andrea*	*Kučerová*	3	G ČKrumlov	3 – 3 – – – – –	6	**7,43**
192.	*Petr*	*Bartoš*	4	OpenGate	3 1 2 1 – – – –	7	**7,00**

193.	*Tereza*	*Rašková*	4	GTomkovaOL	3 1 3 – – – – –	7	**6,81**
194.–196.	*Jakub*	*Jelen*	1	GBalbínaHK	3 – – – – – – –	3	**6,79**
194.–196.	*Dominik*	*Kovář*	3	G Litomyšl	– 1 – 1 1 1 1 0	5	**6,79**
194.–196.	*Klára*	*Machová*	3	GDomažlice	3 – 1 1 – 0 0 –	5	**6,79**
197.–198.	*Jakub*	*Kvasil*	2	GMozartovaPA	3 – – 1 0 – – –	4	**6,76**
197.–198.	*Jana*	*Vývodová*	2	G FHajdyOS	3 1 – – – 0 – –	4	**6,76**
199.	*Jiří*	*Štrincl*	4	GSRandyJN	3 2 – – – 2 – –	7	**6,52**
200.	*Miroslav*	*Mareš*	4	GBudějovPH	3 – 3 – – – – –	$6+i$	**6,27**
201.–202.	*Martina*	*Chamrová*	4	GOPavla PH	3 – 3 – – – – –	6	**6,00**
201.–202.	*Miroslav*	*Juroška*	4	ČaOG FrMýs	3 2 1 – 0 – – –	6	**6,00**
203.	*Tomáš*	*Hrbek*	3	G Chrudim	3 1 – – – – – –	4	**5,53**
204.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	3 1 – – 0 – 0 –	4	**5,51**
205.	*Magdaléna*	*Horváthová*	4	SGJHTr	3 – – 1 1 – – –	5	**5,00**
206.	*Peter*	*Vook*	4	GPošKošice	3 – 2 – – – – –	5	**4,62**
207.	*Anežka*	*Michálková*	3	GaSOŠ Telč	3 – – – – – – –	3	**4,08**
208.–209.	*Robert*	*Pelc*	4	GÚstavníPH	3 – – – 0 1 – –	4	**4,00**
208.–209.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	3 – – – 1 0 – –	4	**4,00**
210.	*Jan*	*Bráblík*	3	GJarošeBO	1 1 – – – 0 – –	2	**2,88**
211.	*Jan*	*Erhart*	4	GFXŠaldyLI	– 1 3 – – – – –	4	**2,83**
212.	*Sarah*	*Jedličková*	4	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**2,76**
213.	*Jiří*	*Čech*	4	G Strakon	1 1 – – – – – –	2	**1,95**
214.–217.	*Jan*	*Klaus*	1	GJPekařeMB	0 0 0 0 – – – 0	0	**0,00**
214.–217.	*Klára*	*Mocová*	0	G Mělník	0 – 0 – 0 – – –	0	**0,00**
214.–217.	*Veronika*	*Nováková*	0	ZŠ Chrast	0 – – – 0 0 – –	0	**0,00**
214.–217.	*Pavla Mária*	*Švagerková*	3	GKukučPopr	0 0 – – – – – 0	0	**0,00**

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*