Matematický
korespondenční
seminář

Milý příteli!

Rok se s rokem sešel a čtyřiatřicátý ročník je u konce. Chtěli bychom proto poblahopřát vítězi jarní části i celého ročníku, kterým se stal *Pavel Turek*. Patří mu velká sláva! V těsném závěsu za Pavlem se umístili *Radovan Švarc* a *Danil Koževnikov*, kterým také blahopřejeme.

Radovanovi se podařil ještě jeden kardinální kousek – za svou PraSečí kariéru nashromáždil neuvěřitelných 1182 bodů, čímž překonal současný rekord „Tondy“ Le Anh Dunga s 1064 body.

Pokud jsi nebyl tak úspěšný jako trio PaRáDa, nezoufej. Ceny dostane pětačtyřicet nejúspěšnějších řešitelů – mohou se těšit na PraSečí tašku nebo penál, někteří z lépe umístěných i na tričko či mikinu. Prvních pět řešitelů navíc vyhraje hodnotnou matematickou literaturu podle vlastního výběru.

Přejeme Ti pěkný závěr školního roku a pestré prázdniny. Těšíme se na Tebe v dalším ročníku PraSete nebo u nás na matfyzu.

Za organizátory

Pepa Svoboda

Obsah závěrečných komentářů

- Návrhy témat seriálu na příští rok
- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí
- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 35. ročníku

Anketa a volba seriálu

Ohlašujeme, že na stránce *mks.mff.cuni.cz/anketa* můžeš vyplnit anketu o tom, co se Ti v PraSeti líbí a co bys naopak dělal(a) jinak. Zpětná vazba je pro nás důležitá, abychom mohli být stále lepší. V anketě můžeš hlasovat především o tématu seriálu na příští rok. Upoutávky k jednotlivým návrhům nalezneš, když otočíš list.

Jarní soustředění

Ve dnech 25. května – 3. června proběhl na základně ve Starém Městě přísně tajný výcvik superhrdinů. V jeho průběhu se supernováčci od zkušených superhrdinů naučili nejen mnoho užitečných superschopností, ale také velikou porci zajímavé matematiky. Společnými silami nakonec všichni porazili superpadoucha Cpt. Obviouse a jen díky nim se můžeme těšit na další soustředění!

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

Náboj

Jedenáctý ročník Náboje[1] se uskutečnil v pátek 13. března. Věříme ale, že soutěžícím tento den smůlu nepřinesl. A že jich nebylo málo – jen v Praze soutěžilo přes 600 středoškoláků a ve všech šesti zemích, které letos Náboj pořádaly, se jich zúčastnilo celkem přes dva tisíce. Mezinárodními vítězi seniorské kategorie se s velkým náskokem stali členové týmu gymnázia *Fazekas Mihály Gyakorló Általános* z Budapešti, kategorii juniorů stejně suverénně opanoval tým *Gimnazjum nr 24* z Gdyně. V českých zemích se nejvíce dařilo oběma týmům *Gymnázia J. G. Jarkovského* z Prahy, které obsadily celkové druhé místo v juniorské kategorii a osmé místo v kategorii seniorů. Všem gratulujeme a těšíme se na následující ročník, naplánovaný na **15. dubna 2016**.

Jarní výlet

Tradiční jarní výlet letos proběhl hned den po Náboji, v sobotu 14. března. Tentokrát nás zavedl na jihovýchod od Prahy, do Českého krasu. Za příjemného předjarního počasí jsme zdolali Kodu, prozkoumali exteriér Koněpruských jeskyní a prošli Axamitovou branou. Děkujeme všem zúčastněným a těšíme se na příště.

[1] *math.naboj.org*

Nabídka seriálů pro 35. ročník

O tématu seriálu můžeš hlasovat v anketě na stránce mks.mff.cuni.cz/anketa!

Do nekonečna a ještě dál.

Před nekonečně mnoha lety, za nekonečně mnoha horami a nekonečně mnoha údolími, rozprostíral se pohádkový svět. Svět, který se od toho našeho liší tím, že dává matematicky perfektní smysl, i když někdy trochu podivný. Svět, který je tak rozsáhlý a rozmanitý, že dokáže pokrýt veškerou matematiku. Svět, ve kterém máte nekonečno na dosah ruky. A kdyby jenom jedno – různých nekonečen tam najdete víc, dokonce nekonečno, a ne jen tak ledajaké. Pojďte se s nimi také seznámit.

Geometrie trojúhelníka

Stále vás nepřestává fascinovat, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě? Nejste sami. A co takhle, že onen průsečík výšek leží na jedné přímce se středem kružnice opsané a těžištěm? Nebo že se osa strany protíná s osou protějšího úhlu na kružnici opsané? Geometrie trojúhelníka zná podobně zajímavých a pěkných tvrzení nepřeberné množství a tento seriál nabízí jejich výběr i vám. Pojďme společně prozkoumat kousek světa syntetické geometrie, jehož vývoj započal už ve starém Řecku. Většina technik, které si při tomto výletu osvojíme, se vám navíc bude hodit při řešení Matematické olympiády i jiných soutěží. Můžete se těšit na spoustu obrázků a hlavně, nikdy už se nezaleknete nápisu *αγεωμέτρητις μηδείς είσιτω*[2].

Polynomy

Co mají společného základní řešení rovnic ve škole, teorie čísel na olympiádách a analýza na VŠ? Co bere algebru s geometrií a převádí je na jedno, na algebraickou geometrii? Polynomy! Nejprve se podíváme na jejich nejjednodušší chování a vlastnosti a postupně se dostaneme až k tomu, s čím se pracuje v té „pravé matice“. Vše budeme pravidelné prokládat olympiádními aplikacemi, včetně několika příkladů z IMA. A možná dojde na čokoládu.

Algoritmická geometrie

Ne každý sice řešil problém, jak oplotit stromy na zahrádce, zato ten, jak se dostat na nejbližší záchod, určitě ano. Geometrie skrývající se za tímto problémem nikoho rozhodně nezarazí. Ale co třeba míchání roztoků nebo řízení obrazu na displeji počítače. Čekali byste geometrii zde? Jak už název napovídá, jedná se o geometrii algoritmickou, tedy žádné obvodové úhly, tětivové čtyřúhelníky či Švrčkovy body, zato narazíme na trochu kombinatoriky a teorie grafů. Jde v podstatě o hledání elegantních postupů, jak může počítač řešit geometrické úlohy. Nebudeme vám lhát, že se tu neobjeví (většinou nenáviděná) analytická geometrie. Můžete to brát jako šanci zjistit, že není jen nástrojem, jak hezké olympiádní geometrie zabít hafem rovnic, nýbrž že je občas hezká i sama o sobě.

[2]Nevstupuj, kdo neznáš geometrii.

Polynomy

2. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1. (58; 56; 2,84; 3,0)

Najděte polynom nabývající celočíselných hodnot ve všech celých číslech, který nemá všechny koeficienty celočíselné. *(Kuba Krásenský)*

Řešení:

Takovým polynomem je například

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Vidíme, že jeho koeficienty celočíselné nejsou. Proč nabývá ve všech bodech celočíselné hodnoty? Když za x dosadíme libovolné celé číslo, jsou x a $x+1$ po sobě jdoucí celá čísla, takže jedno z nich je určitě sudé. Proto je sudý i jejich součin. A když sudé číslo vydělíme dvěma, dostaneme vždy celé číslo.

Poznámky:

Naprostá většina došlých řešení byla správná. Nejčastěji se vyskytoval polynom uvedený ve vzorovém řešení a jeho varianty posunuté o absolutní člen. Zdůvodnění, proč jsou všechny jeho hodnoty celočíselné, provedlo mnoho řešitelů méně elegantním, ale rovněž plně korektním způsobem: prohlásili, že x^2 a x jsou čísla se stejnou paritou, takže $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ je součet buď dvou celých čísel, nebo dvou čísel s desetinnou částí rovnou 0,5.

Překvapilo mě, že jediný *Danil Koževnikov* zmínil přirozený způsob, jak k polynomu $\frac{1}{2}x(x+1)$ dojít – je to totiž součet prvních x přirozených čísel. Kromě toho od něj pochází i nejoriginálnější z řešení, která jsem opravoval: navrhl polynom $\frac{1}{n}(x^{\varphi(n)+1} - x)$. Ten sice nefunguje, protože v Eulerově větě je mezi předpoklady i nesoudělnost x a n, ale je pravdou, že pro každé prvočíslo p bude zadání splňovat polynom $\frac{1}{p}(x^p - x)$. Danilovi v originalitě konkuroval asi jen *Marian Poljak*, který prosazoval polynom $\frac{1}{42}x(x+1)\cdots(x+41)$. *(Kuba Krásenský)*

Úloha 2. (47; 28; 1,85; 2,0)

Pro které trojice reálných čísel a, b, c, kde $a \neq c$, mají polynomy

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1,$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

dva různé společné reálné kořeny? *(Kuba Krásenský)*

Řešení:
Uvažme polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jako v zadání. Pokud tyto dva polynomy mají společné kořeny y, potom pro ně platí $P(y) = Q(y) = 0$. Tedy $P(y) - Q(y) = 0$, z čehož dosazením a úpravou dostaneme $(a - c) \cdot y(y-1)(y+1) = 0$. Výrazem $a - c$ můžeme v rovnici vydělit (protože ze zadání platí $a \neq c$), a z toho plyne, že společnými kořeny zadaných polynomů mohou být pouze čísla -1, 0, 1. Nulu vyřadíme, protože není kořenem polynomu $P(x)$ ani $Q(x)$. Našli jsme jediné dva možné společné kořeny -1 a 1.

Dosazením do zadaných polynomů dostaneme soustavu rovnic pro neznámé a, b, c:

$$a + b + c = -2$$
$$-c + b - a = -2$$

Sečtením obou rovnic, respektive odečtením první rovnice od druhé dostaneme podmínky $b = -2$ a $a = -c$. Rovněž musí platit podmínka ze zadání, tudíž $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zadání odpovídají všechny trojice čísel $(a, b, c) = (x, -2, -x), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Poznámky:
V této úloze lze řešitele rozdělit do dvou skupin – ty, kteří mají řešení podobné autorskému, a ty, kteří se rozhodli vytasit na tuto úlohu Viètovy vztahy. V obou skupinách se vyskytlo až znepokojivě hodně lidí, kteří udělali tutéž chybu – v rovnici dělili výrazem s proměnnou a neověřili, že nedělí nulou (a v tomto případě skutečně nulou vydělili a vyšel jim poté nesmysl). Základní problém při dělení výrazem s proměnnou (třeba $x^2 - 1$) je, že nevíme, jaké nabývá hodnoty. Tedy se nám může stát, že rovnici vydělíme nulou a tím ji naprosto zlikvidujeme. Proto se častěji používá převedení na jednu stranu a vytýkání, případně je třeba zvlášť rozebrat, kdy to, čím dělíme, je nula a ukázat, že to naše řešení neovlivní. *(Honza Krejčí)*

Úloha 3.

(39; 34; 2,59; 3,0)

Najděte všechny reálné polynomy $P(x)$, které pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňují

$$x \cdot P(x-1) = (x+1) \cdot P(x).$$

(David Hruška)

Řešení:
Pomocí matematické indukce ukážeme, že polynom $P(x)$ musí mít kořen v každém bodě $x \in \mathbb{N}_0$. Pokud dosadíme $x = 0$, pak dostaneme

$$0 \cdot P(0-1) = (0+1) \cdot P(0),$$

neboli $P(0) = 0$. Předpokládejme tedy, že $x \in \mathbb{N}_0$ je kořenem polynomu $P(x)$. Ukážeme, že pak musí být kořenem i $x + 1$:

$$(x+1) \cdot P(x+1-1) = (x+1+1) \cdot P(x+1)$$
$$(x+1) \cdot P(x) = (x+2) \cdot P(x+1)$$

Dle indukčního předpokladu je $P(x) = 0$, tudíž levá strana rovnice je nulová. Dostáváme tedy

$$0 = (x+2) \cdot P(x+1).$$

Jelikož $x + 2 > 0$, musí být $P(x+1) = 0$, neboli $x + 1$ je také kořen polynomu $P(x)$, což jsme potřebovali dokázat.

Polynom stupně $n \in \mathbb{N}_0$ má nejvýše n reálných kořenů, zatímco $P(x)$ nabývá nulové hodnoty v nekonečně mnoha bodech. Polynom řešící úlohu tudíž nemůže být nenulový. Naopak polynom $P(x) = 0$ zadání splňuje, je tedy jediným řešením zadané úlohy.

Poznámky:
Jelikož tato úloha byla poměrně přímočará, všechna správná řešení byla podobná vzorovému, někteří místo dosazení $x = 0$ dosadili $x = -1$ a poté indukci prováděli v záporných číslech. U několika řešitelů jsem se setkal s tvrzením, že $P(x) = 0$ není polynom, tudíž úloha nemá řešení, ovšem v úvodním textu bylo pouze napsáno, že u nulového polynomu nedefinujeme jeho stupeň. Nicméně pokud byl celý postup až na závěr správný, bod jsem nakonec nestrhával.

(Tomáš Novotný)

Úloha 4.

(36; 26; 3,61; 5,0)

Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen?

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:
Ne, žádný takový polynom neexistuje. Postupujme sporem. Mějme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

kde n je nějaké sudé přirozené číslo nebo nula a $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou lichá celá čísla. Dále předpokládejme, že existují dvě nesoudělná celá čísla p, q, kde $q \neq 0$, taková, že $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, tedy že polynom P má racionální kořen.

Předpoklad na existenci racionálního kořenu rozepišme pomocí předpisu polynomu, čímž získáme rovnost, kterou ekvivalentně upravíme vynásobením obou stran číslem q^n. Získáme

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$
$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n = 0.$$

Všechny členy na levé straně, až na ten poslední, jsou dělitelné p. Pravá strana je rovna nule, takže je také dělitelná p. Z toho plyne, že p dělí $a_0 q^n$, ale z nesoudělnosti p a q už nutně p dělí a_0. Analogicky zjistíme, že q dělí a_n. Protože ale a_0 i a_n jsou lichá, musí být lichá i p a q. Tím pádem máme na levé straně součet $n+1$ členů, z nichž každý je součinem několika lichých čísel. Levá strana je tedy rovna nějakému lichému číslu a tak získáváme kýžený spor s rovností nule, která je sudá. Tím je důkaz hotov.

Poznámky:
Větší část důkazu se vlastně zabývá důkazem matematické věty, kterou známe pod názvem *Rational root theorem.* Ta říká, že při zavedení stejného značení jako v úloze p dělí a_0 a q dělí a_n, a to i v případě, že n je sudé a koeficienty libovolné celočíselné. Důkaz tohoto tvrzení v plné obecnosti vypadá stejně jako ten, který jsme předvedli v řešení. Kdo větu znal a vzpomněl si na ni, mohl ušetřit značné množství práce.

Co se došlých řešení týče, skutečným překvapením, které jsem zažil snad poprvé, pro mě byl fakt, že všichni řešitelé, kteří se dostali k nějakému řešení, se shodli na tom, že daný polynom neexistuje. Většina řešitelů navíc měla i správné zdůvodnění – buď to vzorové, nebo (častěji) podobné řešení, v němž se v upravené rovnosti rozebírají možnosti parit p a q a opět se dojte ke sporu se sudostí nuly.

Další řešení využívala Viètových vztahů nebo diskriminantu. Pro kvadratické polynomy tyto způsoby možná fungují, ale pro vyšší řády jsou Viètovy vztahy prakticky nepoužitelné a diskriminant naprosto nepoužitelný, protože podobný vzorec pro rovnosti stupňů vyšších než čtyři neexistuje. Těmto řešením jsem tedy zpravidla neuděloval více než jeden bod.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Úloha 5.

(22; 11; 2,36; 1,5)

Nenulový polynom s celočíselnými koeficienty má alespoň dva různé kladné reálné kořeny, přičemž jeden z nich je roven 2015. Dokažte, že nějaký jeho koeficient je menší nebo rovný −2015.

(David Hruška)

Řešení:

Označme hledaný polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou celá čísla a navíc $a_n \neq 0$. Podle zadání víme, že 2015 je kořen, a proto $P(x) = (x - 2015) \cdot Q(x)$, kde

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Matematickou indukcí od $n-1$ dolů dokážeme, že $Q(x)$ má celočíselné koeficienty. Porovnáním koeficientů ve vztahu $P(x) = (x - 2015) \cdot Q(x)$ dostaneme $a_n = b_{n-1}$, $a_0 = -2015b_0$ a $a_k = b_{k-1} - 2015b_k$ pro k od 1 do $n-2$, tudíž snadno získáme základní krok, že b_{n-1} je celočíselné. Předpokládejme, že b_k je celočíselné, pak z $a_k = b_{k-1} - 2015b_k$ plyne celočíselnost b_{k-1} a důkaz je hotov.

Úlohu dokončíme sporem. Předpokládejme, že každý koeficient polynomu $P(x)$ je větší než -2015. V tomto případě ukážeme, že každý koeficient b_i je nekladný. Důkaz matematickou indukcí začneme u a_0. Víme totiž, že $-2015b_0 = a_0 > -2015$, a proto $b_0 < 1$, neboli $b_0 \leq 0$, neboť b_0 je celé číslo. Dále předpokládejme, že b_k je nekladný, pak platí

$$-2015b_{k+1} = a_{k+1} - b_k > -2015,$$

a proto $b_{k+1} < 1$, neboli $b_{k+1} \leq 0$ a důkaz je hotov.

Protože $Q(x)$ má jen nekladné koeficienty a je nenulový, dostaneme po dosazení kladného reálného čísla záporný výsledek. To je ale spor s podmínkou ze zadání, podle které by měl mít $Q(x)$ ještě nějaký kladný kořen.

Poznámky:

Přítomnost dvou kořenů původního polynomu zavádí k tomu, abychom ho rozložili na součin kvadratického polynomu a zbytku, což nám dává složitější algebraické vztahy, se kterými se hůře manipuluje. Někteří řešitelé prohlásili, že polynom $Q(x)$ je celočíselný, což vůbec není zřejmé a je potřeba dokázat. Dokonce platí i obecnější tvrzení, že rozložíme-li monický celočíselný polynom na dva monické polynomy, pak tyto činitele musí být také celočíselné.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 6.

(17; 10; 2,82; 3,0)

Trojice kladných reálných čísel a, b, c a x, y, z mají stejný součin a stejný součet a navíc platí $\max(a, b, c) \geq \max(x, y, z)$. *Dokažte, že* $\min(a, b, c) \geq \min(x, y, z)$. *(David Hruška)*

Řešení:

BÚNO predpokladajme $a \geq b \geq c > 0$, $x \geq y \geq z > 0$. Máme teda

$$\max(a, b, c) = a, \quad \max(x, y, z) = x, \quad \min(a, b, c) = c, \quad \min(x, y, z) = z.$$

Uvažujme polynómy

$$p(t) = (t-a)(t-b)(t-c) = t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc,$$
$$q(t) = (t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz.$$

Odčítaním a využitím rovností spomínaných v zadaní dostávame

$$p(t) - q(t) = (ab + bc + ca - xy - yz - zx)t.$$

Označme $k = (ab + bc + ca - xy - yz - zx)$. Pretože a je kladné a najväčšie z našej šestice čísel a zároveň koreň polynómu p, tak po dosadení do polynómov máme $q(a) \geq 0$ a $p(a) = 0$. Potom

$$ka = p(a) - q(a) \leq 0,$$

z čoho dostávame $k \leq 0$.

Ďalej pre spor predpokladajme $c < z$. Potom je c najmenšie z našej šestice čísel. Vieme, že je kladné a je koreňom polynómu p. Dosadíme do polynómov a máme $q(c) < 0$ a $p(c) = 0$. Z toho dostávame

$$kc = p(c) - q(c) > 0,$$

a teda $k > 0$, čo je spor. Platí preto $c \geq z$, čiže $\min(a, b, c) = c \geq \min(x, y, z) = z$.

Poznámky:

Väčšina správnych riešení sa inšpirovala názvom série a zostrojila si vyššie spomínané polynómy. Ďalej sa už postupy líšili, niektoré boli elegantné, iné viac krkolomné, ale nakoniec prišli do cieľa. Tí, ktorí polynómy nenašli, sa snažili z podmienok o súčte a súčine vyjadriť niektoré premenné, ale len málokedy sa im úlohu podarilo vyriešiť. *(Marta Kossaczká)*

Úloha 7.

(12; 6; 2,50; 2,5)

Najděte všechny polynomy, jejichž koeficienty jsou pouze 1 *nebo* −1, *takové, že je lze rozložit na součin lineárních polynomů s reálnými koeficienty.* *(Kuba Krásenský)*

Řešení:

Nechť polynom má stupeň n s reálnými kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zavedeme následující značení:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad B = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j \qquad C = \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Podle zadání a Vièteových vztahů víme, že A, B, C se rovnají 1 nebo −1. Navíc platí

$$1 = A^2 = D + 2B,$$

což znamená, že B je záporný, protože D, součet čtverců, nabývá pouze nezáporných hodnot, tudíž $B = -1$ a $D = 3$. Nyní použijeme AG nerovnost:

$$3 = D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = n \sqrt[n]{C^2} = n$$

Stačí se tedy zaměřit na polynomy stupně nejvýše 3. Pro $n = 1, 2$ snadno vyzkoušíme všechny možnosti. Můžeme si pomoci předpokladem, že vedoucí koeficient je 1, protože jinak se dá polynom vynásobit −1.

V případě $n = 3$ si všimneme, že musí nastat v AG nerovnosti rovnost, tedy $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$. Součin těchto tří kořenů je ± 1, a proto každý z nich je 1 nebo −1. Navíc platí, že $B = -1$, a proto všechny nemůžou mít stejné znaménko. Nakonec nám zůstanou kandidáti $(x-1)(x+1)(x+1)$ a $(x-1)(x-1)(x+1)$, které ověříme roznásobováním.

Hledané polynomy jsou tedy

$$\begin{array}{rrr} x+1, & x^2+x-1, & x^3+x^2-x-1, \\ x-1, & -x^2-x+1, & -x^3-x^2+x+1, \\ -x+1, & x^2-x-1, & x^3-x^2-x+1, \\ -x-1, & -x^2+x+1, & -x^3+x^2+x-1. \end{array}$$

Poznámky:
Kombinace Viètových vztahů a AG nerovnosti byla dosti triková, a proto přišlo pouze málo správných řešení. Někteří se snažili dokázat, že kořeny hledaných polynomů musí být 1 nebo -1, což nemusí platit: uvažme například $x^2 + x - 1$. Nesmíme také zapomenout, že nalezením horní meze pro stupeň polynomu úloha ještě nekončí, protože přímočaré ověření, které kubické polynomy vyhovují, je velice pracné a zdlouhavé. Řešitelům, kteří si všimli rovnosti v AG odhadu, jsem udělil imaginární bod. *(Anh Dung „Tonda" Le)*

Úloha 8.

(4; 2; 2,50; 2,5)

Je dána funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taková, že pro libovolná různá celá k, l platí $k - l \mid f(k) - f(l)$. Navíc existuje polynom $P(x)$ takový, že $|f(k)| < P(k)$ pro každé celé k. Dokažte, že existuje polynom $Q(x)$ takový, že $Q(k) = f(k)$ pro všechna celá k. *(Anh Dung „Tonda" Le)*

Řešení:
Ukážeme, že pro funkci $g(n) = f(n) - f(0)$ existuje polynom Q, který je jí roven. Poté bude existovat také pro funkci f, neboť ta je pouze posunutá o konstantu. Dle zadání $n-0 \mid f(n)-f(0)$, z čehož plyne, že $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, navíc pro každá dvě různá celá čísla k, l platí

$$k - l \mid f(k) - f(l) = (f(k) - f(0)) - (f(l) - f(0)) = g(k) - g(l).$$

Označme d stupeň polynomu P. Existuje právě jeden[3] polynom Q stupně nejvýše d takový, že $g(n) = Q(n)$ pro $n = 1, 2, \ldots, d + 1$. Dále ukážeme, že $g(z) = Q(z)$ pro všechna celá čísla z. Mějme libovolné $n \geq 2(d + 1)$. Koeficienty polynomu Q jsou vždy racionální čísla (protože funkce g nabývá pouze celočíselných hodnot) a můžeme najít nejmenší společný násobek jejich jmenovatelů M. Označme polynom $R(x) = M \cdot Q(x)$, což je jistě polynom s celočíselnými koeficienty. Pro každé $k = 1, 2, \ldots, d + 1$ je

$$M \cdot (g(n) - Q(n)) = M \cdot (g(n) - g(k)) - (R(n) - R(k))$$

dělitelné[4] $n - k$. Z toho plyne

$$M \cdot (g(n) - Q(n)) \equiv 0 \pmod{\operatorname{nsn}(n - 1, n - 2, \ldots, n - d - 1)}.$$

Dále ukážeme, že to pro dostatečně velké n už musí nastat rovnost $g(n) = Q(n)$. Obě funkce $g(n)$ a $Q(n)$ jsou omezeny polynomem stupně d, a proto $M \cdot (g(n) - Q(n))$ je také shora omezeno nějakým polynomem stupně d. Dokážeme, že nejmenší spolenčný násobek uvedených čísel je zdola omezen polynomem stupně $d + 1$. Všimněme si, že nsn jakýchkoliv čísel je alespoň jejich součin dělený největším společným dělitelem každé dvojice. Protože největší společný dělitel čísel n a k může být nejvýše roven jejich rozdílu, dostáváme následující odhad

$$\begin{aligned}\operatorname{nsn}(n - 1, n - 2, \ldots, n - d - 1) &\geq \frac{(n - 1)(n - 2) \cdots (n - d - 1)}{d^{\binom{d+1}{2}}} \geq \\ &\geq \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2}}{d^{\binom{d+1}{2}}} \geq n^{d+1} \cdot \frac{1}{2^{d+1} \cdot d^{\binom{d+1}{2}}} = Cn^{d+1},\end{aligned}$$

kde C je nějaká kladná konstanta nezávislá na n.

[3] Pokud o tom slyšíš poprvé, zkus si vyhledat heslo Lagrangeova interpolace.

[4] Využíváme toho, že pro polynom s celočíselnými koeficienty R platí $n - k \mid R(n) - R(k)$ (viz úvodní text k této sérii).

Pro dostatečně velké n již nutně

$$|M \cdot (g(n) - Q(n))| < \mathrm{nsn}(n-1, \ldots, n-d-1),$$

a proto $g(n) = Q(n)$. Tvrzení zbývá ukázat pro ostatní celá čísla. Mějme libovoné celé číslo z. Pro nekonečně mnoho dostatečně velkých n platí, že

$$M \cdot (g(z) - Q(z)) = M \cdot (g(z) - g(n)) - (R(z) - R(n))$$

je dělitelné $z - n$, z čehož již nutně plyne rovnost $g(z) = Q(z)$ pro všechna celá čísla z.

Poznámky:

Přišla pouze čtyři řešení a polovina z nich byla správná. Jejich hlavní myšlenka byla stejná jako v uvedeném řešení. *(Filip Hlásek)*

Hvězdy a souhvězdí

3. jarní série Vzorové řešení

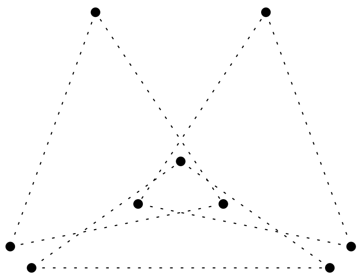
Úloha 1.

(65; 35; 2,00; 2,0)

Na hvězdné obloze existují tři souhvězdí, z nichž každé je tvořeno trojicí hvězd (každá hvězda patří pouze do jednoho souhvězdí). Víme, že uvnitř každého ze tří trojúhelníků (souhvězdí) najdeme z libovolného jiného souhvězdí právě jednu hvězdu. Nakreslete nějaké možné rozmístění těchto devíti hvězd na obloze.

(Filip Hlásek)

Řešení:
Tato úloha byla typu „nalezni obrázek“, jedním ze správných řešení je toto:

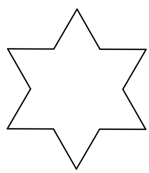


Poznámky:
Úloha byla velmi jednoduchá, ale našla se velká spousta lidí, kteří si špatně vyložili frázi „z libovolného souhvězdí“. Tato fráze neznamená, že stačí vybrat jedno souhvězdí. Znamená, že ať už si vybereme jakékoliv, tak vlastnost platí. Lze si to představit tak, že se soupeřem hrajeme hru a souhvězdí nám vybírá on (a to tak, aby to pro nás bylo co nejtěžší). *(Honza Krejčí)*

Úloha 2.

(58; 48; 2,50; 3,0)

David se rozhodl vydláždit celou rovinu pomocí Davidových hvězd (viz obrázek).



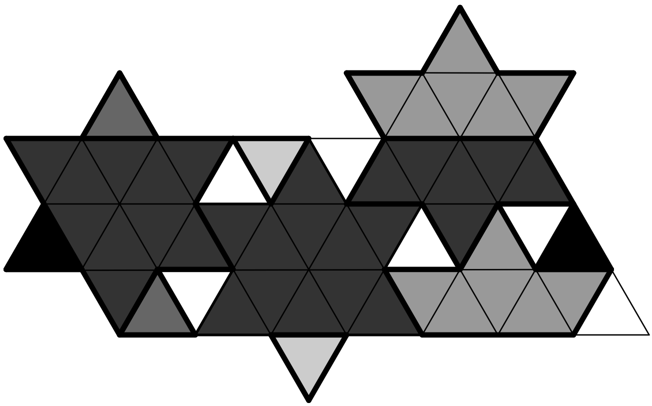
Brzy ale zjistil, že se mu nedaří klást je vedle sebe tak, aby nevznikaly mezery. Proto některé z dosud nepoložených dlaždiček rozlámal, každou na dvanáct stejných rovnostranných trojúhelníků. Těmi chtěl své dláždění doplnit tak, aby byla pokrytá celá rovina, aby se žádné dlaždice nepřekrývaly a zároveň aby spolu žádné dva trojúhelníky nesousedily hranou. Mohlo se mu to podařit?

(Kuba Krásenský)

Řešení (podle Luciena Šímy):

Umístíme vedle sebe podle zadání čtyři Davidovy hvězdy (na obrázku je jedna useklá v polovině, dalším třem z rovnoběžníku přesahuje cíp). Pak si všimneme, že pokud ohraničíme rovnoběžník o stranách délky sedm a tři trojúhelníčky, mohou na sebe tyto čtyřúhelníky snadno navazovat. Z obrázku je vidět, že při umisťování dalšího rovnoběžníku se překryjí části označené stejnou barvou. Proto bude umístění hvězd a trojúhelníků stále vyhovovat podmínkám.

Rovnoběžníky pak už jasně vydláždí celou rovinu.



Poznámky:

Úloha byla snadná na dokázání obrázkem, s čímž se většinou řešitelé spokojili. Vzhledem k bodovému ohodnocení úlohy mi dostatečně názorný obrázek stačil. Slovní vysvětlení ale nikdy neuškodí, proto bych chtěla pochválit ty, kteří si dali tu práci a popsali své úvahy. Špatných řešení bylo málo a všechny z jediného důvodu, a to vynechání informace ze zadání. Jestliže se dva trojúhelníky nemají dotýkat hranou, tak opravdu nelze uznat řešení, jehož postup je na dvou takových trojúhelnících přímo založen. Čtěte zadání pořádně!

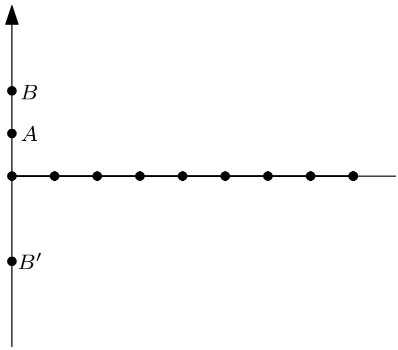
(Bára Kociánová)

Úloha 3.

(47; 37; 2,40; 3,0)

Honza měl na své hvězdné mapě sto hvězd a změřil vzdálenost mezi každými dvěma z nich. Pak se rozhodl, že dá Tomášovi hádanku, a prozradil mu všechny vzdálenosti, které změřil, až na jednu. Prozradil mu i to, ke které dvojici hvězd patří která vzdálenost. Tomášovým úkolem bylo uhodnout zbývající vzdálenost. Po dlouhém uvažování Tomáš zjistil, že hledanou vzdálenost není schopen určit jednoznačně. Jak se to mohlo stát? *(Mirek Olšák)*

Řešení:
Stačí najít dvě rozmístění hvězd, která mají stejné všechny vzdálenosti kromě jedné. Uvažme tedy následující rozmístění v rovině: 98 hvězd bude v bodech $[i, 0]$, kde $0 \leq i \leq 97$, hvězda A bude v bodě $[0, 1]$ a hvězda B bude v bodě $[0, 2]$. Ve druhém rozmístění pouze změníme polohu hvězdy B, a to tak, že ji dáme do bodu $[0, -2]$. Její vzdálenost od žádné z 98 hvězd na přímce se nezměnila a stejně tak se nezměnily vzdálenosti ostatních hvězd, které jsme nechali na místě. Rozdíl je tedy pouze ve vzdálenosti $|AB|$, což jsme chtěli.



Poznámky:
V zadání nebylo uvedeno, že hvězdy musejí být různé, takže došlo několik řešení, kde bylo 98 hvězd v jednom bodě. Někteří řešitelé se pokusili úlohu zjednodušit tím, že uvažovali pouze čtyři hvězdy a ukázali, že při postupném kreslení jim na konci zbydou dva různé body pro umístění poslední hvězdy. To se však při větším počtu hvězd obecně nestane, protože jde o průsečík více než dvou kružnic. Naprostá většina ostatních řešení byla správně. *(Martin Čech)*

Úloha 4. (38; 32; 3,82; 5,0)

V Mléčné dráze se nachází konečný počet hvězd. Dokažte, že umíme najít šest takových, že když uvažujeme šestici kružnic procházejících Zemí se středy v příslušných hvězdách, bude každá hvězda Mléčné dráhy ležet uvnitř některé kružnice.

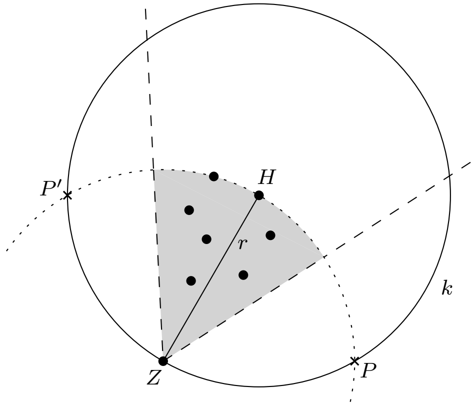
(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

Zvolme tři přímky procházející Zemí tak, aby svíraly po dvou úhel $60°$ a navíc žádná z nich neprocházela hvězdou (což lze, neboť hvězd je konečně mnoho). Tím se Mléčná dráha rozdělí na šest shodných úhlů s vrcholem v Zemi. V každém z úhlů obsahujícím aspoň jednu hvězdu vybereme nějakou hvězdu mající maximální vzdálenost od Země. Dokážeme, že takto vybrané hvězdy splňují podmínku ze zadání.

Vezměme si jeden z úhlů U a uvažujme nyní pouze hvězdy ležící v něm. Označme H vybranou hvězdu, Z Zemi a r vzdálenost H od Z, dále k kružnici se středem H procházející bodem Z. Chceme ukázat, že všechny hvězdy z U leží uvnitř k. Zkontruujeme ještě kružnici se středem Z procházející H a její průsečíky s k nazveme P, P'. Platí, že $|\sphericalangle HZP| = |\sphericalangle HZP'| = 60°$, neboť obě kružnice mají stejný poloměr. Úsečka ZH svírá s rameny U úhel ostře menší než $60°$, takže P a P' leží vně U. Vidíme tedy, že celá kruhová výseč[5] se středem Z a poloměrem r určená úhlem U leží uvnitř k. Ale v této výseči leží všechny hvězdy (neboť leží v úhlu U a zároveň mají od Země vzdálenost maximálně r), a tedy všechny leží i uvnitř k.

[5] Přesněji celá výseč kromě bodu Z.



Kružnice kolem vybrané hvězdy

Vzali jsme libovolný z úhlů a ukázali, že všechny v něm ležící hvězdy leží uvnitř některé ze zkonstruovaných kružnic. Jelikož těchto šest úhlů dává dohromady celou rovinu, tak všechny hvězdy leží uvnitř nějaké kružnice.

Poznámky:

Převážná část správných řešení používala stejnou konstrukci. Drobným úskalím často bylo neuvažování krajních případů, kdy nějaká hvězda leží na kružnici (a tedy ne uvnitř ní). Za to jsem ale body nestrhával. (Vzorové řešení se tomuto vyhnulo zvolením dělicích přímek tak, aby neprocházely hvězdami).

Pozorný čtenář si jistě všiml, že pokud byl některý úhel prázdný, vybrali jsme hvězd méně než šest. A několik pozorných řešitelů upozorňovalo na to, že pokud je hvězd v Mléčné dráze pět a méně, tak jich dokonce ani šest vybrat nelze. Což je samozřejmě pravda, v zadání úlohy měl být požadavek vybrat *maximálně* šest hvězd, nikoli právě šest. *(Tonda Češík)*

Úloha 5.

(8; 4; 2,13; 1,0)

Astronomové chtějí vybrat skupinu hvězd, které pojmenují po slavných matematicích. Každý astronom hlasuje pro deset hvězd a bude spokojen, když alespoň jedna z jeho navrhovaných bude zvolena. Je známo, že pro každou šestici astronomů existuje dvojice hvězd, při jejímž zvolení bude všech šest astronomů spokojeno. Dokažte, že lze zvolit skupinu o deseti hvězdách tak, aby byli spokojení všichni astronomové.

(Martin Töpfer)

Řešení:

Pro nejvýše 10 astronomů taková volba triviálně existuje, dále pro zamezení nejasnostem požadujme alespoň deset astronomů.

Pokud existuje nějaký astronom, který má s každým zbylým společnou preferenci, tak zvolíme právě jeho desítku a jsme hotovi.

Pokud žádný takový neexistuje, tak zvolíme náhodného astronoma A a k němu astronoma B, který s A nemá žádnou společnou preferenci. Kdyby existoval nějaký astronom C, který nemá společnou preferenci ani s A ani s B, šestice obsahující astronomy A, B, C by nešla uspokojit dvěma hvězdami. Každý další astronom má proto společnou preferenci s A nebo s B (nebo s oběma zároveň), proto zvolením všech preferencí A i B uspokojíme všechny astronomy.

Rozdělme množinu hvězd, pro které hlasoval astronom A (resp. B), na dvě disjunktní pětiprvkové množiny A_1 a A_2 (resp. B_1 a B_2). Nyní sporem ukážeme, že jedna z množin $A_1 \cup B_1$,

$A_1 \cup B_2$, $A_2 \cup B_1$ nebo $A_2 \cup B_1$ uspokojí všechny astronomy. Pro spor předpokládejme, že žádná z těchto čtyř desetiprvkových množin nevyhovuje. To znamená, že pro každou z těchto množin existuje astronom, jehož volba se ani v jedné hvězdě neshoduje s danou množinou. Označme tyto astronomy po řadě C, D, E a F. Podle zadání by šestici astronomů A, B, C, D, E a F měly uspokojit dvě hvězdy. Aby byli spokojení astronomové A a B, musí být jedna hvězda v A_1 nebo A_2 a druhá v B_1 nebo B_2. Vyzkoušením čtyř možností, v jakých množinách mohou být dané dvě hvězdy, dostaneme, že takovouto šestici astronomů nedokážeme dvěma hvězdami uspokojit. Dostáváme spor, a tedy jedna z množin $A_1 \cup B_1$, $A_1 \cup B_2$, $A_2 \cup B_1$, $A_2 \cup B_1$ uspokojí všechny astronomy.

Poznámky:
Ukázalo se, že úloha byla velmi obtížná. Sice pro její vyřešení nebylo potřeba žádných nestandardních znalostí, ale trik s rozdělením na čtyři množiny hvězd byl na pátou úlohu asi přeci jen příliš složitý. *(Martin Töpfer)*

Úloha 6.

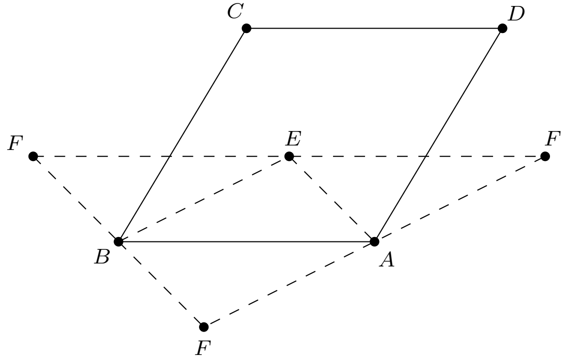
(22; 6; 1,36; 0,0)

Galaxii s konečným počtem hvězd nazveme pravidelnou, pokud pro každé tři její hvězdy existuje hvězda, která spolu s nimi tvoří nedegenerovaný rovnoběžník[6]. Najděte všechny možné počty hvězd pravidelné galaxie. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:
Žádné tři hvězdy nesmějí ležet na jedné přímce, protože by neexistovala čtvrtá hvězda, která by s nimi tvořila nedegenerovaný čtyřúhelník.

Ukážeme, že jediná možná řešení jsou 1,2 a 4. Pro každé souhvězdí s jedním nebo dvěma hvězdami podmínka platí triviálně. V souhvězdí se čtyřmi hvězdami stačí umístit hvězdy do vrcholů rovnoběžníka. Dále je zřejmé, že souhvězdí se třemi hvězdami nemůže splňovat podmínku v zadání.

Uvažujme souhvězdí s více než 4 hvězdami a vyberme tři hvězdy A, B, C takové, že trojúhelník ABC má největší obsah. K těmto třem bodům můžeme najít bod D, aby A, B, C, D tvořily rovnoběžník r, bez újmy a obecnosti leží A, B, C, D na obvodu r v tomto pořadí (jinak zpřeházíme značení bodů A, B, C). Pak každý trojúhelník s vrcholy v těchto čtyřech bodech má největší obsah. Díky předpokládané velikosti souhvězdí existuje ještě bod E. Víme, že obsahy $\triangle EAB$ a $\triangle ECD$ jsou menší než obsah trojúhelníků s vrcholy v rovnoběžníku r, a proto bod E leží mezi přímkami AB a CD. Analogicky E leží mezi přímkami AD a BC.



[6] Tím myslíme rovnoběžník s nenulovým obsahem.

K A, B, E můžeme najít bod F takový, že tyto čtyři body tvoří rovnoběžník. Pro dané body A, B, E existují tři možné polohy bodu F, přičemž všechny leží mimo rovnoběžník r, což je spor. Pravidelné souhvězdí s více než 4 hvězdami tedy neexistuje.

Poznámky:
Kromě pár řešení se stejnou myšlenkou jako ve vzorovém se drtivá většina snažila dokázat, že pokud máme víc než 4 hvězdy, pak vždy musíme přidat další hvězdy, aby podmínka o rovnoběžnících byla zachována, nebo eventuálně se objeví tři kolineární body. Bohužel se jen několika z nich podařilo mě přesvědčit, protože není vůbec jasné, proč proces přidání bodů nemůže skončit po konečně mnoha krocích. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 7.

(12; 7; 2,67; 3,0)

Každá hvězda má nějakou svítivost. Rovinné souhvězdí se nazývá ostré, pokud žádné jeho tři hvězdy neleží v přímce a žádné jeho tři jeho hvězdy se stejnými ani s po dvou různými hodnotami svítivosti netvoří tupoúhlý trojúhelník. Kolik nejvíce hvězd může ostré souhvězdí mít?

(Honza Krejčí)

Řešení:

Najprv ukážeme, že ak máme 4 hviezdy s rovnakými svietivosťami (resp. po dvoch rôznymi), tak musia tieto 4 hviezdy tvoriť obdĺžnik. Podľa zadania nemôžu žiadne tri ležať na priamke, a teda musia tvoriť nejaký štvoruholník. Ak je konvexný, tak vzhľadom na to, že súčet vnútorných uhlov je 360°, musí to byť obdĺžnik, inak jeden z vnútorných uhlov bude tupý, a teda bude existovať tupouhlý trojuholník. Ak by bol nekonvexný, tak jeden vrchol (ozn. A) je vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými tromi (ozn. BCD). Vieme, že:

$$360^\circ = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB,$$

a teda by tam zase bol tupouhlý trojuholník.

Teraz dokážeme, že nemôže byť 5 hviezd s rovnakou alebo po dvoch rôznou svietivosťou. Pre spor predpokladajme, že máme 5 takýchto hviezd. Označme ich A, B, C, D, E. Podla predošlého pozorovania vieme, že body A, B, C, D aj A, B, C, E tvoria obdĺžnik. A teda $D = E$, čo je spor. Takže môžu byť maximálne 4 rôzne svietivosti a 4 hviezdy jednej svietivosti.

Ďalej ukážeme, že ak by boli v súhvezdí 4 rôzne svietivosti, tak toto súhvezdie môže mať maximálne 4 hviezdy. Pre spor predpokladajme, že máme 5 hviezd. Označme ich A, B, C, D, E tak, aby A, B, C, D mali rôzne svietivosti a E rovnakú ako D. Podľa prvého pozorovania vieme, že body A, B, C, D aj A, B, C, E tvoria obdĺžnik. A teda $D = E$ a máme len 4 body.

V ostrom súhvedí teda nemôže byť viac ako 12 hviezd (3 rôzne svietivosti, z každej 4 hviezdy). Dokážeme, že ostré súhvezdie s 12 hviezdami naozaj môže existovať. Zostrojíme ho. Uvažujme rovnostranný trojuholník A, B, C so stranami o dĺžke 100. Okolo každého z vrcholov umiestnime štyri hviezdy(A_1, A_2, A_3, A_4, resp. B_1, B_2, B_3, B_4, resp. ...) s rovnakou svietivosťou (odlišnou ako štvorice pri zvyšných vrcholoch) tak, aby tieto štyri tvorili štvorec s uhlopriečkou 2 a stredom v danom vrchole. Overíme, že súhvezdie tvorené hviezdami $A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4, C_1, \ldots, C_4$, je ostré. Je zrejmé, že žiadne tri hviezdy s rovnakou alebo po dvoch rôznou svietivosťou neležia na priamke. Ďalej, hviezdy s rovnakou svietivosťou tvoria iba pravouhlé trojuholníky. Ukážeme, že vzdialenosť dvoch hviezd s rôznou svietivosťou je aspoň 98 a najviac 102. BÚNO uvažujme A_1, B_1. Podľa trojuholníkových nerovností máme

$$|A_1B| \le |A_1A| + |AB| = 101, \text{ teda}$$
$$|A_1B_1| \le |A_1B| + |B_1B| \le 102 \text{ a } |AB| \le |A_1A| + |A_1B| \text{ a } |A_1B| \le |A_1B_1| + |B_1B|,$$

teda $99 \le |A_1B|$, a preto $98 \le |A_1B_1|$. Takže strany trojuholníka s vrcholmi rôznej svietivosti sú všetky minimálne 98 a maximálne 102. Takýto trojuholník zrejme nemôže byť tupouhlý (podľa kosínusovej vety). Takže naše súhvezdie je naozaj ostré s 12 hviezdami.

Poznámky:
Riešení bolo pomerne málo, správnych ešte menej. Každý, kto sa k číslu 12 dopracoval, mal celý dôkaz v podstate dobre. Ostatní zadanie buď nepochopili, neuvedomili si, že trojuholníky môžu byť aj pravouhlé, alebo iba prišli k zlému menšiemu číslu. *(Marta Kossaczká)*

Úloha 8.

(15; 4; 1,20; 0,0)

Jupiter a Mars tráví nedělní odpoledne hraním her. Jupiter připraví 2000 hvězd a mezi každými dvěma most. Jupiter začíná a oba se střídají v tazích. Ve svém tahu Jupiter smaže jeden most, kdežto Mars dva nebo tři. Prohraje ten, který po svém tahu nějakou hvězdu izoluje (nevychází z ní žádný most). Který z nich má vyhrávající strategii[7]?

(Anh Dung „Tonda" Le)

Řešení:
Most nazvěme *odebratelný*, pokud po jeho odebrání nezůstane izolovaná hvězda. Označme k velikost maximální možné množiny odebratelných mostů v určité fázi hry, všechny takové množiny si označme $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Na počátku je tedy k rovno

$$\binom{2000}{2} - 1000 = 1998000,$$

neboť na konci musí zbýt minimálně 1000 mostů spojujících dvojice hvězd. O tomto k dokážeme následující tvrzení:

Tvrzení. *Smazáním kteréhokoliv odebratelného mostu mezi libovolnými hvězdami sníží Jupiter k vždy o jedna nebo o dva.*

Zjevně se smazáním libovolného odebratelného mostu k sníží alespoň o jedničku. Mohou nastat následující dvě možnosti:

(i) Když je smazaný most v nějaké maximální množině M_i odebratelných mostů, pak se k sníží právě o jedničku, neboť v M_i zůstane $k-1$ mostů.

(ii) Jinak tento most neleží v žádné takové množině. Odebráním všech mostů libovolné z těchto množin (BÚNO M_1) zůstane alespoň jedna z hvězd A nebo B, které smazaný most spojoval, izolovaná (v opačném případě bychom odebrali $k+1$ odebratelných mostů, což by byl spor s definicí k).

Jupiter sám tyto hvězdy neizoloval, tudíž mezi smazanými mosty z množiny M_1 musel být alespoň pro jednu z hvězd A, B nějaký most z ní vycházející (jehož smazáním byla příslušná hvězda izolována). Pokud tedy onen most nebo dva ponecháme nesmazané (tj. smažeme jen $k-1$ nebo $k-2$ mostů), nedostaneme žádnou izolovanou hvězdu. Tudíž lze po libovolném Jupiterově tahu stále smazat alespoň $k-2$ mostů.

Pokud tedy Jupiter sníží svým tahem k o jedna, Mars smaže (například) z M_1 libovolné tři mosty, pokud Jupiter sníží k o dva, Mars smaže z M_1 libovolné dva mosty. V obou případech se po těchto dvou tazích celkem sníží k o čtyři. Jelikož na začátku je k dělitelné čtyřmi, bude Mars touto strategií dělitelnost k čtyřmi udržovat. Na konci hry tedy zbyde na Jupitera nula odebratelných mostů, a tudíž hru vyhraje Mars.

Poznámky:
Byť osmička nepatřila v tomto ročníku k nejtěžším, správná řešení se sešla jen tři. Většina nesprávných řešení mylně předpokládala, že na konci hry musí vždy zůstat právě tisíc mostů, neboli se jich musí odebrat právě 1998000, což by znamenalo, že by Mars mohl mazat vždy právě dva mosty a vyhrál by.

[7] Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství nezávisle na tazích protihráče.

Došlá správná řešení byla založena na trochu jiné myšlence než řešení vzorové, a to na rozdělení hvězd do čtyř skupin po pěti stech a následně rozdělení mostů do skupinek podle toho, jaké typy hvězd spojují. Tyto skupinky vždy obsahovaly čtyři nebo šest mostů. V případě, že Jupiter odebral most z nějaké skupinky čtyř mostů, tak z ní Mars odebral další tři. Když Jupiter poprvé odebral most ze skupinky šesti mostů, smazal Mars dva, takže v ní zbyly tři; když z ní Jupiter odebral most podruhé, smazal Mars zbývající dva. Bohužel toto řešení vyžadovalo rozebrat poměrně velké množství případů, nicméně kroky vedoucí k jeho nalezení byly přímější než v řešení autorském. *(Tomáš Novotný)*

Letem grafovým světem

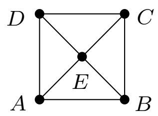
3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (20; 17; 4,00; 5,0)

Nalezněte souvislý permutační graf, jenž není intervalový ani bipartitní.

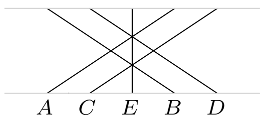
(Martin „E.T.“ Sýkora)

ŘEŠENÍ:
Ukažme, že zadání vyhovuje například graf na následujícím obrázku:



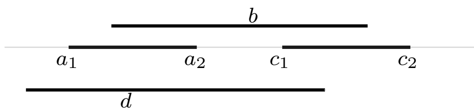
Graf G

Ihned vidíme, že je souvislý, a snadno si též rozmyslíme, že je permutační. „Permutační“ reprezentace grafu G může vypadat takto:



Dále si všimneme, že graf G obsahuje kružnici na lichém počtu vrcholů – konkrétně CED – tedy podle věty 38 z prvního dílu seriálu není bipartitní. Stačí tak ukázat, že není ani intervalový. To dokážeme sporem.

Pro spor předpokládejme, že má intervalovou reprezentaci. Odebráním intervalu odpovídajícího vrcholu E bychom dostali intervalovou reprezentaci indukovaného podgrafu $ABCD$, takže i tento podgraf by byl intervalový. Ukážeme ale, že to není možné: Nechť úsečky $a = (a_1, a_2)$ a $c = (c_1, c_2)$ reprezentují po řadě vrcholy A a C. Protože mezi těmito vrcholy nevede hrana, jsou úsečky a a b disjunktní. BÚNO můžeme předpokládat, že a leží „nalevo“ od b. Pak ale úsečka b reprezentující vrchol B musí obsahovat nějaký bod z a i c (protože vrchol B je spojen hranou jak s vrcholem A, tak s vrcholem C), tedy musí speciálně obsahovat bod a_2. Tentýž bod ale musí z obdobných důvodů obsahovat i úsečka d reprezentující vrchol D. Tím pádem ale úsečky b a d nejsou disjunktní. To je ve sporu s tím, že mezi vrcholy B a D nevede hrana.



Ilustrační obrázek

Tím jsme dokázali, že graf G není intervalový, a tedy vyhovuje zadání.

Poznámky:
Většina řešitelů si s úlohou poradila bez větších problémů, všechna řešení byla víceméně shodná se vzorovým a lišila se nanejvýš použitím jiného (ale podobného) grafu nebo nepatrně stručnější argumentací. Za to jsem samozřejmě body nestrhával, stejně tak jako za jistou drobnou chybu, které se dopustilo několik řešitelů. Ti tvrdili, že jejich graf má za podgraf C_4, a proto není intervalový. Problém je v tom, že těmto řeštelům vypadlo slovo „indukovaný“ – například graf K_4 zjevně intervalový je, a přesto má C_4 za (neindukovaný) podgraf.

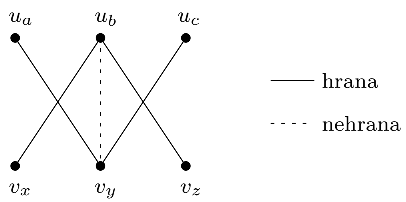
(Martin „E.T.“ Sýkora)

Úloha 2.

(5; 5; 4,60; 5,0)

Mějme bipartitní graf G s partitami U a V. Ukažte, že G umíme reprezentovat jako průnikový graf úseček pouze dvou různých směrů právě tehdy, když vrcholy lze očíslovat $U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ a $V = \{v_1, \ldots, v_l\}$ tak, aby pro žádnou volbu $1 \le a < b < c \le k$, $1 \le x < y < z \le l$ nenastala situace na obrázku (zbylé dvojice mohou být propojeny libovolně). Jinými slovy, za předpokladu splnění uvedených nerovností platí implikace

$$\{u_a, v_y\}, \{u_c, v_y\}, \{u_b, v_x\}, \{u_b, v_z\} \in E \Rightarrow \{u_b, v_y\} \in E.$$



(Peter „πtr“ Korcsok)

Řešení:
Nejprve dokážeme, že graf se správným očíslováním vrcholů lze reprezentovat jako průnikový úseček dvou různých směrů. Uvažme jedno konkrétní očíslování vrcholů u_1, u_2, …, u_k a v_1, v_2, …, v_l. Vrchol u_i bude reprezentován vodorovnou úsečkou se souřadnicí $y = i$. Krajní body této úsečky budou odpovídat nejmenšímu, resp. největšímu indexu souseda vrcholu u_i vzhledem k očíslování vrcholů V. Například je-li vrchol u_4 spojen s vrcholy v_2, v_7, v_9, bude reprezentován úsečkou s krajními body $(2, 4)$ a $(9, 4)$. Analogicky budou vrcholy partity V reprezentovány svislými úsečkami. Vrcholy stupně maximálně jedna ale musíme vyřešit zvlášť: izolované vrcholy můžeme reprezentovat úsečkami nalevo od všech ostatních úseček, případně nad nimi; listy (vrcholy stupně jedna) jako krátké úsečky (například délky 0,5) kolem bodu, kterým mají procházet.

Zbývá ukázat, že popsaný průnikový graf obsahuje právě požadované hrany. Byla-li v G hrana $\{u_i, v_j\}$, určitě úsečka odpovídající u_i prochází souřadnicí $x = j$ a podobně úsečka odpovídající v_j prochází souřadnicí $y = i$. Zmíněné úsečky se protínají v bodě (j, i) a v uvedeném průnikovém grafu mezi nimi bude hrana. Dále uvažujme, že mezi vrcholy u_i a v_j nebyla v G hrana. Pro spor předpokládejme, že v průnikovém grafu mezi nimi hrana je. Tato hrana musí odpovídat průsečíku příslušných úseček v bodě (j, i). To znamená, že existují a, c, x, z takové, že

$$1 \le a < i < c \le k, \quad 1 \le x < j < z \le l$$

(a, c, x, z mohou odpovídat krajním bodům úseček představujících vrcholy v_j, u_i) a nastává zakázaná situace ze zadání (při $b = i$, $y = j$). To je ve sporu s předpokladem a důkaz této části je hotov.

V druhé části důkazu ukážeme, jak očíslovat vrcholy grafu reprezentovaného jako průnikový graf úseček dvou různých směrů. Předpokládejme jednodušší situaci, kde všechny vrcholy odpovídající úsečkám v jednom směru musejí být z téže partity[8]. Jednotlivé rovnoběžné úsečky očíslujeme postupně ve směru jejich společné kolmice. Mějme nyní libovolné $1 \leq a < b < c \leq k, 1 \leq x < y < z \leq l$ a nechť úsečka b se protíná s x a se z a zároveň y se protíná s a a s c. Potom se již nutně musí v našem uspořádání protínat také b s y.

Pro pořádek bychom měli ještě dokázat, že pokud má bipartitní graf reprezentaci pomocí úseček dvou směrů, pak má i takovou, kde navíc žádné dvě úsečky neleží na jedné přímce. Tuto část jsme ale nezamýšleli jako součást zadání a našli jsme pro ni jen poměrně dlouhý a ne moc hezký důkaz, proto ho tady neuvedeme. Za chybu se omlouváme. Ale máme pro Tebe nabídku: Můžeš toto tvrzení pojmout jako dobrovolné cvičení. Pokud autory seriálu přesvědčíš o tom, žes ho vyřešil, a navíc budeš první, můžeš se těšit na čokoládu.

Poznámky:

Úlohu odeslalo velice málo lidí, nejspíše kvůli děsivě znějícímu zadání. Na druhou stranu v podstatě všechna řešení byla správná, samotná úloha tedy tak náročná nebyla.

(Filip Hlásek)

Úloha 3.

(6; 5; 4,17; 5,0)

Nechť G je doplněk intervalového grafu. Určete jeho barevnost, pokud víte, že velikost jeho největšího úplného podgrafu je n.[9] *(Peter „πtr“ Korcsok)*

Řešení:

Zo zadania vieme, že graf G obsahuje úplný podgraf veľkosti n – automaticky teda potrebujeme aspoň n farieb. Ukážeme, že nám tento počet stačí.

Pretože G je doplnok intervalového grafu, môžeme si vrcholy predstavovať ako intervaly určitej priamky, pričom rovnakú farbu môžu dostať iba tie, ktoré majú neprázdny prienik. Bude sa nám hodiť označiť jeden „koniec“ tejto priamky ako ľavý a ten druhý ako pravý – potom budeme tvrdiť, že interval $\langle a, b\rangle$ je „ostro vľavo“ od intervalu $\langle c, d\rangle$, pokiaľ platí $b < c$.

Vytvorme množinu M_1, kam dáme všetky vrcholy, ktoré nemajú žiaden iný interval ostro vľavo. Každá dvojica z týchto intervalov sa musí nutne pretínať, teda ich môžeme všetky nafarbiť farbou 1 a ďalej ich už uvažovať nemusíme. Tento krok teraz budeme opakovať: ako množinu M_2 označíme opäť všetky vrcholy, ktoré nemajú (v grafe $G \setminus M_1$) žiaden interval ostro vľavo. Znovu platí, že sa každá dvojica intervalov v M_2 musí pretínať, preto im môžeme dať farbu 2. Takto pokračujeme až do momentu, keď budú všetky vrcholy nafarbené. Dostaneme tak množiny $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Že ich je aspoň n, už vieme, ale prečo ich nebude viac?

Na to si stačí uvedomiť, že pre každý interval I z M_i existuje nejaký interval I' v M_{i-1}, ktorý je od neho ostro vľavo – inak by sme pri vytváraní množiny M_{i-1} zaradili aj interval I. Ak by sme teda potrebovali viac ako n množín, vieme postupne nájsť $n+1$ navzájom disjunktných intervalov, čo je ale spor s veľkosťou najväčšieho úplného podgrafu.

[8] Bohužel nám ze zadání vypadl předpoklad, že žádné dvě úsečky neleží v jedné přímce. Naštěstí s tím ale všichni řešitelé počítali.

[9] *Úplný podgraf* je podgraf izomorfní úplnému grafu; graf může obsahovat více úplných podgrafů stejné velikosti.

Poznámky:
Väčšina z došlých riešení postupovala podobne, ako v našom riešení. *Jakub Löwit* sa ale rozhodol využiť znalosti z celého seriálu a existenciu ofarbenia s n farbami dokazoval pomocou Hallovej vety. Toto riešenie tiež funguje, ale je výrazne komplikovanejšie a dlhšie na napísanie.

(Peter „πtr“ Korcsok)

Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1. (40; 28; 2,38; 2,0)

(a) *Anička obarvila každý z bodů roviny červeně, zeleně nebo modře, přičemž každou barvu použila alespoň jednou. Dokažte, že v této rovině existuje pravoúhlý trojúhelník s různobarevnými vrcholy.* *(David Hruška)*

(b) *Bára obarvila každý bod ležící na obvodu rovnostranného trojúhelníka jednou ze dvou barev. Dokažte, že mezi nimi jsou tři stejně barevné vrcholy pravoúhlého trojúhelníka.* *(Honza Krejčí)*

ŘEŠENÍ:

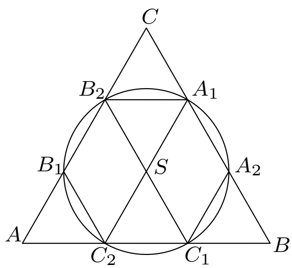
(a) Řešme tuto úlohu sporem a předpokládejme, že existuje takové obarvení roviny, že v něm nenajdeme trojbarevný pravoúhlý trojúhelník.

Uvažme tři různobarevné body, které tvoří trojúhelník. Takovou trojici umíme najít vždy. Kdybychom našli pouze trojici různobarevných bodů na přímce, pak mimo přímku vybereme bod a ten se zbylými dvěma jinak obarvenými body tvoří pravoúhlý trojúhelník.

V tomto trojúhelníku zakreslíme všechny výšky. Vzhledem k tomu, že v rovině dle předpokladu neexistuje trojbarevný pravoúhlý trojúhelník, musí mít pata výšky stejnou barvu jako vrchol, ze kterého je vedena. Potom ovšem na žádné výšce již nemůže ležet bod jiné barvy, protože jinak by tento bod, pata výšky a jeden z krajních bodů strany, na kterou je výška kolmá, tvořily trojbarevný pravoúhlý trojúhelník. Nicméně všechny výšky se protínají v jednom bodě, a ten má být tedy obarven třemi různými barvami najednou, což je spor.

(b) Na stranách trojúhelníka označíme body, které se nacházejí třetinu délky od vrcholu a sestrojíme z nich pravidelný šestiúhelník (jako na obrázku). Pro spor předpokládejme, že existuje obarvení, ve kterém nevznikne jednobarevný pravoúhlý trojúhelník.

Nyní pokud by protilehlé vrcholy (říkejme jim P a Q) šestiúhelníku byly obarveny stejnou barvou, pak všechny čtyři jeho zbývající vrcholy musejí být obarveny druhou barvou, protože leží na Thaletově kružnici nad úsečkou PQ. Nicméně libovolné 3 body z těchto čtyř tvoří pravoúhlý trojúhelník. Proto pro každou dvojici protilehlých vrcholů šestiúhelníku platí, že každý z nich je obarven jinou barvou.



Šestiúhelník můžeme (až na symetrii) obarvit pouze dvěma způsoby: buď vybarvíme tři po sobě jdoucí vrcholy stejnou barvou, nebo je barvíme napřeskáčku (jeden vrchol jednou barvou, jeho sousedy druhou barvou). Není těžké si rozmyslet, že v obou případech najdeme stranu trojúhelníku, na které leží dva různobarevné body šestiúhelníku.

Zaměřme se na tyto různobarevné body na straně trojúhelníka. Bez újmy na obecnosti nechť to jsou body C_1 a C_2. Úsečky C_1A_1 a C_2B_2 jsou kolmé na AB a navíc krajní body každé úsečky jsou obarvené stejně. Je to důsledek toho, že protilehlé body šestiúhelníku mají různou barvu. Nakonec vezmeme bod A, ten tvoří jednobarevný pravoúhlý trojúhelník s body C_1A_1 nebo C_2B_2.

Poznámky:
Většina řešení byla správně. V některých případech se vyskytly nepřesnosti, například v části **(a)** několik řešitelů bez zdůvodnění předpokládalo, že vždy najde trojbarevný trojúhelník – tento fakt si zaslouží zdůvodnit. Docela závažnou chybou v **(b)** byly konstrukce, které se opíraly o to, že když si na jedné straně trojúhelníku zvolím interval a poté vedu kolmice krajními body tohoto intervalu, tak mi na straně nebo stranách vytnou interval „dvojnásobné délky“. Tedy když začnu s jednobarevným intervalem, pak ve „vytnutém“ intervalu nemůžu mít žádný bod první barvy. Poté iterací dojdu ke sporu. Základní problém tohoto postupu je v tom, že se mi docela snadno může stát, že žádný jednobarevný interval nenajdu a potom řešení nefunguje.

(Honza Krejčí)

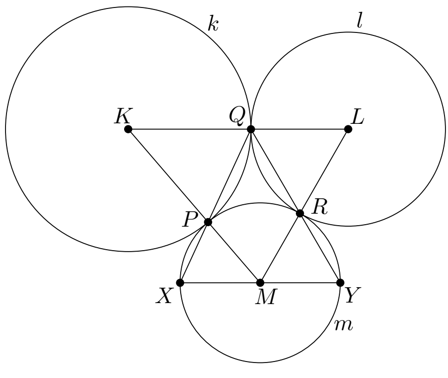
Úloha 2. (33; 29; 2,52; 2,0)

(a) *Kružnice k, l a m mají po dvou vnější dotyk, přičemž k a l se dotýkají v bodě Q. Přímky procházející bodem Q a zbylými dvěma body dotyku protínají kružnici m podruhé v bodech X a Y. Ukažte, že XY je její průměr.* *(Martina Vaváčková)*

(b) *Je dána kružnice k nad průměrem AB a body C, D ležící na stejném oblouku AB. Průsečík tečen ke k v bodech C a D označme E, průsečík přímek AC a BD označme F a konečně nechť G značí průsečík přímek EF a AB. Dokažte, že body E, C, G, D leží na jedné kružnici.*

(Honza Krejčí)

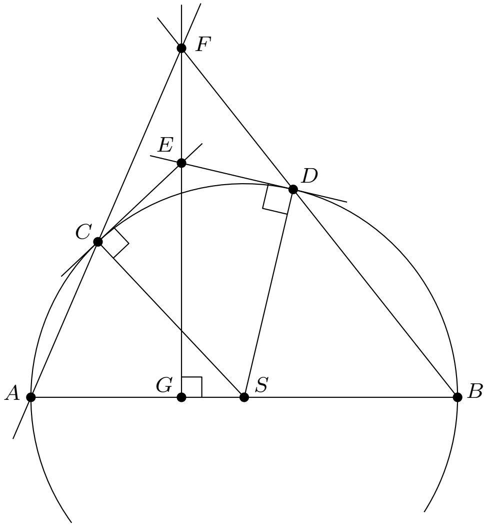
Řešení:
(a) Označme K, L, resp. M středy kružnic k, l, resp. m. Dále nechť P a R jsou postupně body dotyku kružnic m a k, resp. m a l. Bod dotyku dvou kružnic je zároveň jejich střed stejnolehlosti se záporným koeficientem, tudíž bod P je střed stejnolehlosti, ve které se kružnice k zobrazí na kružnici m, tedy bod K na bod M a bod Q na bod X. Díky tomu platí $KQ \parallel MX$. Analogicky $LQ \parallel MY$, ale bod Q leží na přímce KL, a proto $MX \parallel MY$, navíc M leží na přímce XY, z čehož plyne, že XY je průměr.



(a) podle Tomáše Konečného – využívající kruhovou inverzi:
Uvažujme kruhovou inverzi se středem v bodě Q a takovým poloměrem, aby se zachovala kružnice m. Chceme totiž, aby řídící kružnice byla kolmá na m. Rozmyslete si, že toho lze vždy dosáhnout. Obraz kružnice k je přímka dotýkající se kružnice m, přičemž jejich bod dotyku je obraz bodu P, tudíž se jedná o bod X. Analogicky se kružnice l zobrazí na přímku dotýkající se kružnice m v bodě Y. Kružnice k a l se dotýkají v Q, a proto jejich obrazy budou rovnoběžné přímky, z čehož plyne, že XY je průměr kružnice m.

(b) Nejprve vyšetříme případ, kdy A, C, D, B leží na kružnici v tomto pořadí, pak bod F bude ležet vně kružnice. Dále střed úsečky AB označme S a nechť $|\sphericalangle BAF| = \alpha$, $|\sphericalangle ABF| = \beta$.

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle DAB| = \alpha - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 90^\circ.$$



Díky úsekovému úhlu u vrcholu C dostaneme

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle CAD| = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Totéž platí pro $|\sphericalangle EDC|$, tudíž

$$|\sphericalangle CED| = 360^\circ - 2(\alpha + \beta),$$

což je dvojnásobek $|\sphericalangle CFD| = 180^\circ - \alpha - \beta$, a proto uděláme-li kružnici se středem E a poloměrem EC, pak na téhle kružnici také leží bod D, protože dvě tečny z jednoho bodu mají stejnou délku, a také bod F. Trojúhelník CEF je tedy rovnoramenný se základnou CF.

$$|\sphericalangle CEF| = 2 \cdot |\sphericalangle CDF| = 2 \cdot (180^\circ - |\sphericalangle CDB|) = 2 \cdot |\sphericalangle CAB| = 2\alpha,$$
$$|\sphericalangle CFE| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle CEF|) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Bod G je tedy pata kolmice z E na AB. Poloměr kružnice je kolmý na tečnu v bodě dotyku, a proto všechny tři body G, C, D leží na Thaletově kružnici nad průměrem ES, z čehož plyne, že $GCED$ je tětivový čtyřúhelník.

Pokud pořadí bodů na kružnici je A, D, C, B, pak definujme $F' = AD \cap BC$. Bod F je nyní orthocentrum trojúhelníka ABF', kterým musí procházet i $F'E$, neboť jsme výše ukázali, že $F'E$ je kolmá na AB. Bod G je tedy pořád pata kolmice z E na AB.

Poznámky:
Drtivá většina řešitelů se vypořádala s částí (a) bez problému. V části (b) přišlo bohužel jen několik řešení. Klíčem bylo zjistit, že G je projekce bodu E na AB, což navádí k přikreslení středu průměru AB, poté stačí se orientovat v tětivových čtyřúhelnících a chytře úhlit. V geometrických úlohách, kde se vyskytují průsečíky protějších stran nebo úhlopříček tětivového čtyřúhelníka, se též dají uplatnit poláry a póly. Dá se dokázat, že všechny body E, F, F' leží na poláře průsečíku přímek AB a CD, která je kolmá na průměr AB.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 3.

(29; 21; 2,21; 2,0)

(a) *Tonda dostal od Štěpána k narozeninám kartičky se všemi přirozenými čísly od* 11111 *do* 99999*. Sedl si ke stolu a nějak za sebe všechna čísla uspořádal, čímž mu vzniklo dlouhatánské číslo dělitelné číslem* 11111*. „To je ale náhoda!“ řekl si Tonda, ale Štěpán mu sebevědomě oponoval: „Žádná náhoda, to by se stalo při libovolném uspořádání kartiček.“ Dokažte, že měl Štěpán pravdu.*

(Štěpán Šimsa)

(b) *Tonda si pro každé $n \in \{1, \dots, 2015\}$ označil p_n nejmenšího prvočíselného dělitele čísla n^8+1 a chtěl spočítat jejich součet $p_1+p_2+\dots+p_{2015}$. Štěpán prohlásil, že s tím mu nepomůže, ale jako informatik dokáže určit poslední cifru tohoto součtu v šestnáctkové soustavě. Najděte ji dřív, než to Štěpán naprogramuje.* *(David Hruška)*

Řešení:
(a) Nejprve si všimneme, že

$$10^5 = 100000 = 11111 \cdot 9 + 1 \equiv 1 \pmod{11111},$$

umocněním této kongruence na libovolné přirozené číslo k dostaneme i $10^{5k} \equiv 1 \pmod{11111}$. Pokud za sebe v nějakém pořadí poskládáme čísla na kartičkách, dostaneme číslo n, které jde zapsat jako

$$n = a_0 + 10^5 a_1 + 10^{10} a_2 + \dots + 10^{5\cdot 88888} \cdot a_{88888} \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{88888} \pmod{11111},$$

kde a_i jsou čísla na kartičkách. Z kongruence výše vidíme, že číslo n je dělitelné 11111 právě tehdy, když je součet čísel na všech kartičkách dělitelný 11111. Tonda však už jednou číslo dělitelné 11111 dostal, takže součet čísel na všech kartičkách opravdu 11111 dělitelný je, z čehož plyne, že ať za sebe kartičky poskládáme libovolně, bude vzniklé dlouhé číslo také vždycky dělitelné 11111.

(b) Zajímá nás zbytek součtu $p_1 + \dots + p_{2015}$ po dělení 16. Pro lichá n je zřejmě $p_n = 2$, lichých čísel od 1 do 2015 je 1008, takže součet přes lichá n vyjde 2016, což je číslo dělitelné 16. Výsledek bude tedy kongruentní součtu p_n přes sudá n. Pro sudá n je $p_n > 2$, a tak ze zadání

$$n^8 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p_n}.$$

Umocněním této kongruence na druhou získáme

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{p_n}.$$

Z toho plyne, že řád[10] čísla n modulo p_n je 16 pro všechna sudá n. Protože p_n dělí n^8+1 a p_n je prvočíslo, jsou čísla p_n a n nesoudělná a z Malé Fermatovy věty

$$n^{p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_n}.$$

[10] *Řád* čísla n modulo p je nejmenší přirozené r, pro které $n^r \equiv 1 \pmod{p}$.

Kongruence $n^k \equiv 1 \pmod{p_n}$ nastane právě tehdy, když řád čísla n modulo p_n dělí číslo k, v našem případě tak $16 \mid p_n - 1$, čili $p_n \equiv 1 \pmod{16}$. Protože sudých čísel od 1 do 2015 je 1007, dostáváme

$$p_1 + \cdots + p_{2015} \equiv 1007 \equiv 15 \pmod{16}$$

a poslední cifra tohoto součtu v šestnáctkové soustavě je F.

Poznámky:
S částí (a) si většina řešitelů poradila bez problémů. Bod jsem strhával těm, kteří pořádně (nebo vůbec) nezdůvodnili, že stačí ukázat dělitelnost součtu čísel na všech kartičkách číslem 11111. Naprostá většina řešitelů na konci řešení tento součet počítala, místo aby si ulehčila práci a prohlásila, že jeho dělitelnost číslem 11111 plyne ze zadání.

Za řešení části (b) si ti, kteří postupovali podle vzorového řešení, vybojovali imaginární bod – konkrétně jde o *Rada Švarce*, *Jana Jurku* a *Ondreje Bínovského*. Zbylí řešitelé většinou sporem dokázali, že p_n musí být tvaru $16k + 1$, a jejich řešení byla mnohem delší. Většina špatných řešení tvrdila, že čísla tvaru $n^8 + 1$ budou pro sudá n vždy prvočísly. To vůbec není pravda, zkuste si rozložit na součin číslo $8^8 + 1$.

Jestliže Ti něco ze vzorového řešení části (b) není jasné – například pokud jsi nikdy neslyšel, co je to řád prvku modulo nějaké číslo, nebo neznáš ono zmíněné známé tvrzení, doporučuji Ti podívat se do loňského seriálu o teorii čísel[11]. Tam určitě najdeš odpovědi na své otázky.

(Martin Čech)

Úloha 4.

(39; 25; 2,00; 2,0)

(a) *Reálné číslo x splňuje rovnost $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. Spočítejte hodnotu $\sin 2x$.*

(David Hruška)

(b) *Ukažte, že*

$$\frac{2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \cdots + 180\sin 180^\circ}{90} = \operatorname{cotg} 1^\circ.$$

(David Hruška)

Řešení:

(a) Zadanou rovnost upravíme pomocí platného vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ do tvaru

$$(\sin^2 x)(\sin x - 1) = (\cos^2 x)(1 - \cos x).$$

Levá strana je nekladná, pravá nezáporná, obě musí být tedy rovny nule. Vzhledem k tomu, že pro žádné x neplatí $\sin x = \cos x = 1$, je alespoň jedno z čísel $\sin x$, $\cos x$ nulové, a tedy $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 0$.

(b) Pomocí identity $\sin x = \sin(180^\circ - x)$ upravíme levou stranu posčítáním členů tvaru $k\sin(k^\circ)$ a $(180 - k)\sin(180^\circ - k^\circ)$:

$$\frac{180\sin 2^\circ + 180\sin 4^\circ + \cdots + 180\sin(88^\circ) + 90\sin 90^\circ}{90}.$$

Dále trikově rozšíříme:

$$\frac{2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2\sin 4^\circ \sin 1^\circ + \cdots + 2\sin(88^\circ \sin 1^\circ) + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

[11] *mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf*

a použijeme identitu $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, kterou snadno obdržíme ze součtového vzorce pro kosinus:

$$\frac{\cos(2^\circ - 1^\circ) - \cos(2^\circ + 1^\circ) + \cos(4^\circ - 1^\circ) + \cdots - \cos(88^\circ + 1^\circ) + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ},$$

kde se skoro všechny členy odečtou a zbyde

$$\frac{\cos 1^\circ - \cos 89^\circ + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ - \sin 1^\circ + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \operatorname{cotg} 1^\circ,$$

což jsme měli dokázat.

Poznámky:
Část (a) mnoho lidí „řešilo obrázkem“, tedy z grafu funkce $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ vyčetli, že na intervalu $[0, 2\pi)$ jsou jedinými řešeními rovnice $f(x) = 1$ čísla 0 a $\pi/2$, pro která tvrzení úlohy platí. Takový postup ovšem není plnohodnotným řešením, protože graf jsme schopni pouze přibližně načrtnout a nemůže tedy sloužit jako podklad korektního důkazu. Dalo by se namítat, že moderní matematický software často umí řešit i složité rovnice přesně (tedy ne jen přibližně numericky), ale naše úlohy nejsou myšleny jako zábava pro počítače :-) Je samozřejmě v pořádku pomocí softwaru získat o úloze přehled, ověřit si nějakou domněnku. Potom je ale třeba vše pořádně dokázat. V těchto případech jsem s přihlédnutím k jednoduchosti úlohy a malému bodovému rozpětí uděloval nula bodů. S částí (b) nebyly velké problémy, kromě vzorového se vyskytla ještě řešení, která součet vyjádřila jako reálnou část částečného součtu geometrické posloupnosti komplexních jedniček $e^{i\frac{n\pi}{90}}$. *(David Hruška)*

Úloha 5.

(30; 16; 1,63; 2,0)

(a) *Kolem kulatého stolu bylo před rautem přichystáno dvacet židlí. Papalášů však dorazilo více, než se čekalo, takže pak na každé židli seděli dva, a navíc byli každý z jiné politické strany. Situace byla prohlášena za neúnosnou a každou židli musel jeden člověk opustit. Mohli to vždy provést tak, aby pak dva spolustraníci nikdy neseděli na sousedních židlích?* *(David Hruška)*

(b) *V PraSestánu mají poslanci dvou politických stran zajímavý způsob hlasování: ve sněmovně stojí řada n židlí a na ně si střídavě sedají poslanci těchto stran, ovšem tak, že nikdy nesmějí sedět dva poslanci stejné strany vedle sebe (aby si místo práce nepovídali). Pokud již některá ze stran nemůže usadit žádného svého poslance, prohrává tak toto hlasování. V závislosti na n určete, která ze stran (při optimálním postupu) hlasování vyhraje.* *(Filip Hlásek)*

Řešení:

(a) Rozebereme dva možné případy:

(i) Na židlích se nacházejí zástupci alespoň tří stran. Potom tedy existuje taková dvojice sousedních židlí, že na nich sedí papaláši z alespoň tří různých stran. Označme si tyto židle čísly 20 a 1 (po směru hodinových ručiček). Posaďme na židli 1 člena té politické strany, která není zastoupena na židli 20. Následně postupně usazujme papaláše na židle po směru hodinových ručiček tak, aby platila zadaná podmínka (což vždy lze, neboť předchozí židlí máme zakázanou pouze jednu politickou stranu, ale na aktuální židli si lze vybírat ze dvou). Takto postupně rozesadíme papaláše na všechny židle, musíme ovšem zkontrolovat, zda na židlích 20 a 1 nesedí zástupci stejných stran. To se ale stát nemůže, neboť jsme na začátku vybrali na židli 1 člena té strany, která na židli 20 vůbec není zastoupena.

(ii) Pokud se na židlích nacházejí papaláši pouze ze dvou stran, musejí být obě strany nutně zastoupeny na každé židli. V tom případě nám ovšem stačí posadit zástupce jedné strany na sudé a zástupce druhé strany na liché židle.

(b) Označme si začínající stranu jako A a druhou stranu jako B. Nejprve vyřešíme speciální případy:

Pokud $n = 0$, nemá A koho posadit, tudíž vyhraje B. Jestliže $n = 1$, pak naopak zjevně vyhraje A.

Pro zbylá n ukážeme, že vyhraje strana B. Nazvěme prvního usazeného politika ze strany A premiérem. Dále řekněme, že židle je *k-důležitá*, pokud je mezi ní a premiérem $k-1$ dalších židlí. Strana B tedy nejprve usadí svého poslance na jednu z krajních židlí, což vždy může, neboť A obsadila nejvýše jednu z nich. Poté bude strana B odpovídat na tahy strany A následovně:

Pokud strana A usadila politika na k-důležitou židli, pak strana B usadí svého člena na sousední $(k-1)$-důležitou židli. Tento tah vždy může provést, neboť pokud by (pro spor) nemohla, tak by se na sousední $(k-1)$- či $(k-2)$-důležité židli již musela nacházet strana B (strana A na $(k-1)$-důležité židli být nemůže, neboť by nemohla hrát na židli k-důležitou). Jelikož ale vždy, když sedí poslanec strany B na l-důležité židli, sedí na sousední $(l+1)$-důležité židli poslanec strany A, případně tato židle neexistuje (byla-li to krajní), tak nový poslanec strany A se může posadit až na $l+3$-důležitou židli. Tudíž na sousedních $(l+1)$- a $(l+2)$-důležitých židlích strana B poslance nemá, což je spor.

Po libovolném tahu strany A tedy dokáže strana B usadit svého poslance, má tudíž neprohrávající strategii. Ovšem jelikož je počet židlí konečný, musí po určité době hlasování vyhrát.

Poznámky:

Obě úlohy byly docela pracné na důkladné promyšlení všech případů. I když se část (a) dala řešit více způsoby, většina správných řešení postupovala podobně jako ve vzoráku. V části (b) se ale bohužel sešla pouze dvě správná řešení. Ostatní řešitelé vyřešili pouze případ sudého n, kde stačilo hrát symetricky, zatímco pro lichá n jejich řešení nefungovalo. Těmto řešením jsem tedy za část (b) uděloval jen jeden bod. *(Tomáš Novotný)*

Úloha 6.

(30; 26; 2,70; 2,0)

(a) *Víme, že polynom $x^2-(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$ nemá reálný kořen. Dokažte, že čísla a, b a c jsou všechna nenulová a mají stejné znaménko.* *(Kuba Krásenský)*

(b) *Polynom x^3+ax^2+bx+c má tři reálné kořeny a platí $a+b+c \in \langle -2, 0\rangle$. Dokažte, že pak některý z kořenů leží v intervalu $\langle 0, 2\rangle$.* *(David Hruška)*

Řešení:

(a) Pretože polynóm nemá reálny koreň, jeho diskriminant je záporný:

$$(a+b+c)^2 - 4(ab+bc+ca) < 0.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc &< 0,\\ a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc &< 4bc,\\ (b+c-a)^2 &< 4bc. \end{aligned}$$

Ľavá strana je zrejme nezáporná, takže na to, aby platila nerovnosť, musia mať b a c rovnaké znamienka (špeciálne musia byť nenulové). Analogicky sa dopracujeme k nerovnosti

$$(b+a-c)^2 < 4ab$$

a dostávame, že a a b sú nenulové a majú rovnaké znamienka. A teda všetky tri a, b, c majú rovnaké znamienka.

(b) Označme korene našeho polynómu r_1, r_2, r_3. Potom

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Dosadíme do polynómu jednotku a máme $1 + a + b + c = (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3)$. Vieme, že $a + b + c \in \langle -2, 0 \rangle$, a teda

$$1 + a + b + c = (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Pre spor predpokladajme, že žiaden z koreňov neleží v $\langle 0, 2 \rangle$. Potom žiaden z činiteľov z poslednej rovnosti neleží v $\langle -1, 1 \rangle$. Súčin troch čísel, ktoré sú v absolútnej hodnote väčšie ako jeden, je tiež v absolútnej hodnote väčší ako jeden, a teda dostávame spor s

$$(1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Preto aspoň jeden koreň leží v $\langle 0, 2 \rangle$.

Poznámky:
Takmer každý z vás využil nerovnosť plynúcu zo zápornosti diskriminantu. S touto nerovnosťou ste sa už popasovali rôzne. Väčšina čiastočne upravila ľavú stranu na štvorec a potom rozoberala možnosti znamienok. Druhú časť úlohy odovzdalo omnoho menej ľudí, no skoro všetci ju mali správne. *(Marta Kossaczká)*

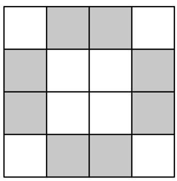
Úloha 7.

(24; 16; 1,83; 2,0)

(a) *Jupiter a Zeus si spolu měří síly. Jupiter připraví šestnáct hvězd uspořádaných do čtvercové mřížky 4×4, přičemž některé z hvězd jsou rozsvícené a některé ne. Zeus pak může zvolit libovolný řádek, sloupec nebo diagonálu (celkem existuje čtrnáct diagonál, jejich délka se pohybuje od jedné do čtyř) a změnit stav všech příslušných hvězd (zhasnuté rozsvítí a naopak). To může opakovat libovolně dlouho. Zeus by chtěl, aby nakonec všechny hvězdy svítily. Jaké počáteční stavy může Jupiter zvolit, aby Diovi tuto radost nedopřál?* *(Kuba Krásenský)*

(b) *Zeus si hraje se svým modelem vesmíru. Jedná se o rovinu s dírami v mřížových bodech*[12]*, do kterých se dají umisťovat hvězdy. Sotva na ni umístil dvě hvězdy, došlo mu, že je chtěl umístit naopak. Je mu ale trapné hvězdy sundat, a tak může vždy jen jednu z hvězd otočit kolem druhé tak, aby opět zapadla do nějakého mřížového bodu. Může takto Zeus hvězdy prohodit v konečném počtu tahů?* *(Štěpán Šimsa)*

Řešení:
(a) Políčka, která sousedí hranou s právě třemi dalšími políčky (tedy ta vybarvená na následujícím obrázku) nazveme *zajímavá.*



Každá řádka i každý sloupec obsahuje právě dvě zajímavé hvězdy, úhlopříčka vždy dvě nebo žádnou. Pokud Zeus přepne řádek (či sloupec nebo úhlopříčku) se dvěma zajímavými hvězdami, mohou nastat tři možnosti:

(i) Jedna přepínaná zajímavá hvězda svítila a druhá ne, počet svítících zajímavých hvězd se tedy nezmění.

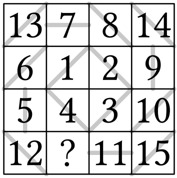
[12] Mřížovými body myslíme ty body roviny, které mají celočíselné souřadnice.

(ii) Obě přepínané zajímavé hvězdy svítily, pak počet svítících zajímavých hvězd klesne o dvě.

(iii) Ani jedna z přepínaných zajímavých hvězd nesvítila. V tom případě se počet svítících zajímavých hvězd zvýší o dvě.

Parita počtu svítících zajímavých hvězd se tak nemění, a pokud bude na začátku svítit lichý počet zajímavých hvězd, nemůže Zeus zařídit, aby na konci svítilo všech osm zajímavých hvězd.

Na druhou stranu, pokud svítí na začátku sudý počet zajímavých hvězd, může Zeus rozsvítit všechny hvězdy podle následujícího obrázku.

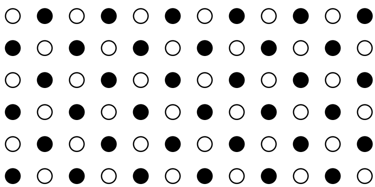


Projde postupně políčka od toho s číslem 1 do toho s číslem 15, a když narazí na políčko, na němž hvězda nesvítí, přepne úhlopříčku podle vyznačeného směru. Tím nikdy nezmění stav hvězdy s nižším číslem, než je číslo aktuálního tahu, a proto po provedení postupu budou svítit všechny hvězdy s čísly 1 až 15. Protože se parita počtu svítících zajímavých hvězd neměnila, bude stále svítit sudý počet zajímavých hvězd. Bude tedy svítit i hvězda s otazníkem a tím všechny hvězdy.

(b) Podle Rada Švarce:
Řekneme, že mřížový bod je *lichý*, resp. *sudý*, pokud je lichý, resp. sudý součet jeho souřadnic. Prvně ukážeme, že se nemění parita mřížových bodů jednotlivých hvězd. Mějme hvězdy na souřadnicích $[a,b],[x,y]$, a první z nich otočme na souřadnice $[c,d]$. Protože vzdálenost první hvězdy od druhé má být stále stejná a dále platí $k^2 \equiv k \pmod 2$, můžeme psát

$$\begin{gathered}(a-x)^2+(b-y)^2=(c-x)^2+(d-y)^2,\\ (a-x)+(b-y)\equiv(c-x)+(d-y) \pmod 2,\\ a+b\equiv c+d \pmod 2.\end{gathered}$$

Nyní pro spor předpokládejme dvě hvězdy, které je možné prohodit, s nejmenší možnou vzájemnou vzdáleností (nejmenší možnou vzdálenost můžeme zvolit, protože druhá mocnina vzdálenosti je přirozené číslo). Pokud by jedna hvězda byla v sudém mřížovém bodě a druhá v lichém, zjevně je není možné prohodit. Nechť tedy jsou obě hvězdy v mřížových bodech se stejnou paritou (bez újmy na obecnosti sudých). Pak se při prohazování tyto hvězdy pohybují celou dobu po sudých mřížových bodech.



Všimneme si, že sudé mřížové body také tvoří mřížku – jen $\sqrt{2}$-krát větší a otočenou o $45°$. Pokud si tedy celý obrázek $\sqrt{2}$-krát zmenšíme a otočíme o $45°$, dostaneme opět prohození dvou hvězd po mřížových bodech, což je spor s minimalitou vzdálenosti.

Poznámky:
Snad termín krátce po soustředění, snad géniové zodia káli, snad osmapadesátá vyšší inteligence se spikli proti nebohé úloze. Ačkoli ani jedna z částí (a), (b) nebyla příliš obtížná, valná část řešitelů poslala jen jednu z nich a zcela správné řešení části (b) dorazilo jen jedno od *Kuby Löwita*. Ve vzorovém řešení zmíněný *Rado Švarc* si elegancí svého postupu vysloužil imaginární bod, ale vzhledem k tomu, že si neuvědomil, že sudé body jsou „našikmo“, neušel bodové ztrátě.

Vzhledem k tomu, že zadání nebylo zcela exaktní v tom, co se po řešitelích chce, rozhodl jsem se v části (a) být benevolentní a uděloval plné dva body už za nalezení jedné konfigurace, kterou Zeus nerozsvítí (pokud tam byl i argument, proč ji nerozsvítí). I část (b) někteří vyřešili jen pro speciální případ, kdy jsou hvězdy vedle sebe – to jsem hodnotil jedním bodem ze tří za klíčovou myšlenku s šachovnicovým obarvením. *(Mirek Olšák)*

2. jarní série – Polynomy

Výsledková listina

1.–2.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	– – – 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
1.–2.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
3.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	3 – – 5 5 5 5 –	$23 + i$	**23,79**
4.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	3 3 2 5 5 5 – –	21	**23,42**
5.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	3 3 3 5 5 3 – –	19	**22,43**
6.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	3 3 3 5 5 0 – –	19	**22,34**
7.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 5 5 0	23	**22,17**
8.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3 2 3 5 – 5 – –	18	**20,84**
9.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	3 3 3 5 – – – –	14	**20,44**
10.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	3 3 3 5 – – – –	14	**19,28**
11.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	3 3 3 5 0 – – –	$14 - i$	**19,08**
12.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	3 2 3 5 – 5 – –	18	**19,05**
13.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	3 2 3 4 5 2 – –	17	**19,00**
14.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	3 3 – 5 4 5 5 –	$22 + i$	**18,69**
15.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	3 2 3 5 0 1 – –	14	**18,36**
16.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 – – 5 –	19	**17,20**
17.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	3 3 3 5 – – – –	14	**16,91**
18.–19.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 – – – –	14	**16,36**
18.–19.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	3 3 3 5 – – – –	14	**16,36**
20.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	3 3 3 4 5 – – –	18	**15,65**
21.–22.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	3 0 – 4 5 1 0 –	13	**15,43**
21.–22.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	3 3 3 4 – – – –	13	**15,43**
23.–24.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	3 3 2 1 2 – – –	11	**15,05**
23.–24.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	3 0 3 5 – 0 – –	11	**15,05**
25.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	3 3 – 3 – – – –	9	**14,11**
26.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	3 1 3 5 1 – – –	13	**13,00**
27.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	3 3 – 5 0 – 0 –	11	**12,67**
28.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	3 1 3 – – – – –	7	**11,57**
29.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 3 3 – 0 1 – –	10	**11,51**
30.–32.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	3 2 1 – 0 – – –	6	**11,38**
30.–32.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	3 0 2 1 – – – –	6	**11,38**
30.–32.	*Jakub*	*Tětek*	1	CírkGPlzeň	3 – 3 – – – – –	6	**11,38**
33.–34.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	3 0 3 1 0 – – –	7	**10,72**
33.–34.	*Michal*	*Převrátil*	2	G Klatovy	3 1 3 – – – – –	7	**10,72**
35.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	3 1 – 0 – – – –	4	**10,11**
36.–37.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
36.–37.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	3 1 1 1 0 – – –	6	**9,48**
38.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	3 3 3 – – – – –	9	**9,00**
39.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	3 – 3 – – – – –	6	**8,93**

40.–41.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	3 – 1 – – – – –	4	**8,48**
40.–41.	*Filip*	*Matějka*	1	GZborovPH	2 2 – – – – – –	4	**8,48**
42.–43.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	– 3 – – – – – –	3	**8,34**
42.–43.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	– 3 0 – – – – –	3	**8,34**
44.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	2 1 2 1 – – 0 –	6	**7,46**
45.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	3 – – 0 0 – 0 –	3	**6,79**
46.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3 1 – – – – – –	4	**6,76**
47.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	2 – 3 0 – – – –	5	**6,42**
48.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	3 1 3 – – – – –	7	**6,26**
49.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	3 – – 1 – – – –	4	**5,46**
50.–51.	*Eva*	*Klimentová*	2	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**5,27**
50.–51.	*Ivana*	*Krumlová*	2	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**5,27**
52.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	3 1 – – – – – –	$4 - i$	**5,19**
53.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	2 – – – – 0 – –	2	**4,89**
54.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3 0 3 – – – – –	6	**4,86**
55.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	3 0 – – – – – –	3	**4,81**
56.–58.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**4,23**
56.–58.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	3 – – – – – – –	3	**4,23**
56.–58.	*Karel*	*Vlachovský*	3	MasG Plzeň	3 0 – – – – – –	3	**4,23**
59.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	3 – – – – – – –	3	**3,47**
60.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	1 – – – – – – –	1	**1,91**
61.–63.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	– 0 – – – – 0 –	0	**0,00**
61.–63.	*Lukáš*	*Pavela*	0	LSG Letohrad	– 0 – – – – – –	0	**0,00**
61.–63.	*Tomáš*	*Troján*	0	GNerudCheb	0 0 0 0 0 0 0 0	0	**0,00**

3. jarní série – Hvězdy a souhvězdí

Výsledková listina

1.–2.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–2.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
3.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	3 3 3 5 5 – 5 –	21	**23,42**
4.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	3 3 3 5 – – 5 –	19	**20,57**
5.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3 3 3 5 – 3 – –	17	**20,12**
6.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	3 3 3 5 – 0 – –	14	**19,28**
7.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	3 3 3 4 – – – 1	14	**19,12**
8.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	1 3 3 5 – – – –	12	**19,02**
9.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	1 3 3 5 – 3 – –	15	**17,79**
10.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	3 0 3 5 0 – 1 –	12	**17,70**
11.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 – 5 – –	19	**17,20**
12.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	2 3 3 5 – – – –	13	**16,90**
13.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	1 – – 5 – 5 5 5	21	**16,52**
14.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	3 3 3 5 – – – –	14	**16,36**
15.–17.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	3 3 3 2 – 1 – 0	12	**16,00**
15.–17.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	2 3 3 4 – – – –	12	**16,00**
15.–17.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 – 1 – 2	16	**16,00**
18.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	3 0 3 4 0 1 0 0	11	**15,74**
19.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	1 3 3 4 – 1 – –	12	**15,50**
20.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	1 3 3 5 – 0 – –	12	**15,37**
21.–23.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	1 3 3 5 – – – –	12	**14,47**
21.–23.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	1 3 3 5 – – – 0	12	**14,47**
21.–23.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	1 3 3 5 – – – –	12	**14,47**
24.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	2 3 3 5 – – – –	13	**14,35**
25.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	1 3 3 – – – – –	7	**13,98**
26.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	1 – – 5 2 – – –	8	**13,81**
27.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	3 0 3 5 0 – 0 –	11	**13,47**
28.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
29.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	3 3 3 2 0 0 0 0	11	**13,01**
30.–31.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	3 3 1 2 – 0 – –	9	**13,00**
30.–31.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3 3 3 – – 0 – –	9	**13,00**
32.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	1 3 3 – – 0 – –	7	**12,64**
33.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 – – – –	14	**12,34**
34.–35.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	1 3 3 1 – – – –	8	**11,89**
34.–35.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	1 3 2 2 – 0 – –	8	**11,89**
36.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	1 3 – 3 – – – –	7	**11,84**
37.–40.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
37.–40.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	3 3 – – – 0 – 0	6	**11,38**
37.–40.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	3 3 – – – – – –	6	**11,38**

37.–40.	*Marián*	*Okál*	1	SŠNvh	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
41.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	3 3 2 5 – – – –	13	**10,34**
42.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	1 3 – – – – – –	4	**10,11**
43.–44.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	1 3 1 0 – – – 0	5	**10,00**
43.–44.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	1 3 1 – – – – 0	5	**10,00**
45.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	3 – 3 – – – – –	6	**9,48**
46.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	3 3 2 – – 0 – –	8	**9,40**
47.–49.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	1 3 – – – – – –	4	**8,48**
47.–49.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	1 3 – – – – – –	4	**8,48**
47.–49.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	1 0 3 0 – 0 – –	4	**8,48**
50.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	1 – 2 – – – – 0	3	**8,34**
51.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3 3 0 – – – – –	6	**8,00**
52.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	1 3 1 1 – 0 0 0	6	**7,46**
53.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	1 3 – – – 0 – 0	4	**6,76**
54.–55.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	1 3 1 1 – – – –	6	**6,00**
54.–55.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	3 3 – – – – – –	6	**6,00**
56.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	3 – 3 – – – 2 –	8	**5,70**
57.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	3 0 1 – – – – –	4	**5,53**
58.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	3 1 – – – – – –	4	**5,51**
59.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	1 3 0 0 – – – –	4	**4,99**
60.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	3 0 – – – – – –	3	**4,17**
61.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	– – – – – – 4 –	4	**3,76**
62.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	1 – – – – – – –	1	**2,67**
63.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	1 0 – – – – – –	1	**2,21**
64.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	1 – – – – – – –	1	**1,17**
65.–66.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	0 0 0 – – – – –	0	**0,00**
65.–66.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	0 0 0 – – – – –	0	**0,00**

3. seriálová série – Letem grafovým světem 3

Výsledková listina

1.–4.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–4.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	5	5	5	15	**15,00**
1.–4.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	5	5	5	15	**15,00**
1.–4.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	5	5	5	15	**15,00**
5.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	5	–	4	9	**12,00**
6.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	5	3	–	8	**11,27**
7.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	5	–	1	6	**9,42**
8.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	5	–	–	5	**8,51**
9.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	5	–	–	5	**7,36**
10.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	5	–	–	5	**6,76**
11.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	5	–	–	5	**6,40**
12.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	4	–	–	4	**6,19**
13.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	5	–	–	5	**5,85**
14.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	5	–	–	5	**5,00**
15.–16.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	3	–	–	3	**4,90**
15.–16.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	3	–	–	3	**4,90**
17.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	5	–	–	5	**4,15**
18.–20.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	0	–	–	0	**0,00**
18.–20.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	0	–	–	0	**0,00**
18.–20.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	0	–	–	0	**0,00**

Výsledková listina jarní části semináře

1.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	25	25	25	34	15	15	**139,16**	512
2.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	25	25	17	31	15	15	**127,62**	1067
3.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	23	22	23	30	13	12	**124,45**	124
4.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	18	22	25	29	9	15	**118,89**	554
5.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	18	22	19	26	10	9	**104,85**	125
6.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	24	24	21	–	15	15	**97,96**	337
7.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	17	17	17	25	9	–	**85,20**	282
8.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	21	19	14	24	6	–	**84,68**	85
9.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	13	23	14	14	9	11	**83,65**	84
10.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	19	21	20	17	–	5	**81,18**	81
11.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	19	19	14	26	–	–	**78,03**	201
12.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	19	15	16	13	8	6	**77,80**	78
13.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	20	13	16	21	1	5	**76,00**	76
14.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	13	15	13	16	7	6	**72,62**	73
15.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	21	19	8	21	3	–	**72,00**	72
16.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	21	15	16	15	3	–	**70,61**	71
17.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	7	17	18	17	–	7	**65,98**	209
18.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	15	19	11	9	3	9	**65,72**	66
19.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	14	11	13	19	9	0	**65,56**	66
20.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	20	–	18	18	9	–	**64,15**	64
21.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	20	16	14	13	–	–	**63,73**	64
22.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	18	18	16	9	–	0	**61,04**	189
23.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	19	14	12	13	–	–	**57,52**	139
24.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	15	20	–	20	–	–	**56,04**	56
25.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	10	15	16	12	1	–	**55,45**	55
26.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	20	19	–	–	15	–	**53,80**	765
27.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	14	12	9	6	4	6	**51,65**	383
28.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	15	9	12	4	3	7	**50,99**	51
29.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	17	5	12	10	2	4	**50,62**	408
30.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	15	6	13	15	1	0	**50,42**	106
31.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	15	7	19	7	–	–	**48,48**	48
32.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	11	16	10	9	1	–	**46,85**	522
33.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	16	10	19	0	–	–	**45,55**	46
34.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	12	5	15	11	2	–	**44,78**	141
35.	*Jakub*	*Tětek*	1	CírkGPlzeň	19	11	–	–	14	–	**44,43**	44
36.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	11	7	13	7	2	5	**44,29**	44
37.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	19	8	8	3	–	–	**38,23**	38
38.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	13	8	8	7	–	–	**36,50**	37
39.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	14	–	13	9	–	–	**35,60**	36
40.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	18	11	–	–	6	–	**35,08**	35

41.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	15	9	9	–	–	–	**34,01**	34
42.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	11	4	8	6	1	–	**30,73**	31
43.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	16	–	0	15	–	–	**30,70**	290
44.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	10	7	7	5	–	–	**29,81**	103
45.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	16	12	2	–	–	–	**29,64**	142
46.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	4	13	5	7	–	–	**28,91**	121
47.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	16	–	10	–	–	–	**25,89**	26
48.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	10	–	16	–	–	–	**25,69**	103
49.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	14	11	–	–	–	–	**25,19**	25
50.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	9	–	12	4	–	–	**25,11**	25
51.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	5	6	–	12	1	–	**24,26**	315
52.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	10	–	14	–	–	–	**23,79**	40
53.	*Michal*	*Převrátil*	2	G Klatovy	13	11	–	–	–	–	**23,72**	24
54.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	13	–	10	–	–	–	**23,14**	23
55.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	11	–	11	–	–	–	**22,76**	23
56.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	–	–	14	8	–	–	**22,73**	23
57.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	5	–	4	–	14	–	**22,65**	503
58.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	11	5	4	–	–	–	**20,91**	35
59.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	11	9	–	–	–	–	**20,24**	104
60.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	11	–	8	–	–	–	**19,86**	20
61.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	8	0	10	–	–	–	**18,48**	18
62.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	7	–	11	–	–	–	**18,17**	18
63.–64.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	17	–	–	–	–	–	**17,00**	17
63.–64.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	8	9	–	–	–	–	**17,00**	17
65.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	–	–	17	–	–	–	**16,90**	17
66.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	8	8	–	–	–	–	**16,68**	17
67.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	–	16	–	–	–	–	**16,36**	16
68.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	6	5	6	–	–	–	**16,25**	16
69.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	9	–	6	–	–	–	**15,00**	15
70.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	10	3	1	–	–	–	**14,62**	391
71.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	14	–	–	–	–	–	**14,27**	14
72.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	5	2	7	–	–	–	**13,94**	14
73.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	10	–	0	3	–	–	**13,21**	13
74.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	–	–	13	–	–	–	**13,03**	13
75.–77.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	11	–	–	0	–	–	**11,38**	11
75.–77.	*Marián*	*Okál*	1	SŠNvh	–	–	11	–	–	–	**11,38**	11
75.–77.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	11	–	–	–	–	–	**11,38**	11
78.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	5	–	6	–	–	–	**11,00**	11
79.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	7	–	3	–	–	–	**9,46**	9
80.	*Tereza*	*Kislingerová*	2	G Klatovy	9	–	–	–	–	–	**8,80**	113
81.	*Filip*	*Matějka*	1	GZborovPH	–	8	–	–	–	–	**8,48**	8
82.–83.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	4	4	–	–	–	–	**8,46**	8
82.–83.	*Karel*	*Vlachovský*	3	MasG Plzeň	4	4	–	–	–	–	**8,46**	8
84.–85.	*Matej*	*Choma*	3	G Gröss BA	8	–	–	–	–	–	**8,00**	8
84.–85.	*Marek*	*Jaroš*	3	GJM Gal	8	–	–	–	–	–	**8,00**	8
86.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	2	–	6	–	–	–	**7,66**	287
87.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	–	–	6	1	–	–	**6,98**	11
88.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	7	–	–	–	–	–	**6,88**	149
89.	*Filip*	*Čermák*	1	MendelG OP	7	–	–	–	–	–	**6,79**	7
90.	*Lucie*	*Janštová*	2	SlovanG OL	7	–	–	–	–	–	**6,76**	7
91.	*Ondrej*	*Bínovský*	4	GAnMeTr	–	–	–	6	–	–	**5,94**	32

92.–93.	*Eva*	*Klimentová*	2	GJarošeBO	–	5	–	–	–	–	**5,27**	5
92.–93.	*Ivana*	*Krumlová*	2	GJarošeBO	–	5	–	–	–	–	**5,27**	5
94.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	–	5	–	–	–	–	**4,89**	5
95.	*Tomáš*	*Troján*	0	GNerudCheb	4	0	–	–	–	–	**3,66**	4
96.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	3	–	–	–	–	–	**2,84**	13
97.–100.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	0	–	–	–	–	–	**0,00**	0
97.–100.	*Lukáš*	*Pavela*	0	LSG Letohrad	–	0	–	–	–	–	**0,00**	0
97.–100.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	0	–	–	–	–	–	**0,00**	0
97.–100.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	0	–	–	–	–	–	**0,00**	0

Výsledková listina seriálu

1.–3.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	15	15	15	**45,00**	284
1.–3.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	15	15	15	**45,00**	984
1.–3.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	15	15	15	**45,00**	418
4.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	14	13	12	**39,01**	39
5.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	11	9	15	**34,95**	470
6.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	11	9	11	**31,25**	31
7.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	10	10	9	**29,86**	50
8.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	15	14	–	**28,93**	509
9.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	14	7	6	**27,67**	28
10.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	12	8	6	**26,55**	27
11.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	9	15	–	**24,00**	735
12.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	13	9	–	**22,07**	219
13.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	8	3	7	**19,26**	19
14.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	10	9	–	**18,05**	18
15.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	12	–	5	**17,22**	17
16.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	10	6	–	**16,76**	17
17.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	5	4	6	**15,08**	346
18.–19.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	15	–	–	**15,00**	203
18.–19.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	15	–	–	**15,00**	388
20.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	8	2	4	**14,58**	372
21.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	15	–	–	**14,54**	353
22.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	8	1	5	**14,00**	14
23.	*Jakub*	*Tětek*	1	CírkGPlzeň	–	14	–	**13,77**	14
24.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	7	–	7	**13,52**	157
25.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	13	–	–	**12,59**	224
26.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	0	3	9	**11,02**	11
27.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	4	6	–	**10,43**	10
28.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	10	–	–	**10,39**	382
29.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	10	–	–	**10,26**	26
30.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	10	–	–	**10,00**	10
31.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	9	–	–	**9,45**	9
32.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	0	9	0	**9,16**	9
33.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	7	2	–	**8,93**	105
34.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	9	–	–	**8,68**	151
35.	*Marek*	*Murin*	3	GJHroncaBA	8	–	–	**8,48**	8
36.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	5	3	–	**8,37**	8
37.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	6	1	–	**7,85**	8
38.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	6	1	0	**7,48**	63
39.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	7	–	–	**7,47**	7
40.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	7	–	–	**7,36**	7

41.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	0	2	5	**6,75**	7
42.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	7	–	–	**6,62**	211
43.–44.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	6	–	–	**6,40**	6
43.–44.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	6	–	–	**6,40**	6
45.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	5	1	–	**6,33**	297
46.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	6	–	–	**6,03**	129
47.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	6	–	–	**6,00**	6
48.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	5	–	–	**5,33**	284
49.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	5	–	–	**5,27**	5
50.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	3	3	–	**5,02**	5
51.	*Ondřej*	*Zeman*	4	G Lovosice	5	–	–	**4,81**	28
52.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	4	1	–	**4,57**	480
53.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	3	1	–	**4,25**	4
54.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	4	–	–	**4,07**	4
55.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	4	–	–	**4,00**	4
56.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	4	–	–	**3,94**	185
57.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	4	–	0	**3,81**	132
58.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	3	–	–	**2,51**	3
59.–62.	*Dominika*	*Levická*	4	GMRŠKošice	0	–	–	**0,00**	0
59.–62.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	0	–	–	**0,00**	81
59.–62.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	0	–	–	**0,00**	259
59.–62.	*Emese*	*Szabó*	4	GZKMJ Gal	0	–	–	**0,00**	0

Výsledková listina 34. ročníku

1.	*Pavel*	*Turek*	2	GTomkovaOL	25	25	25	25	25	25	25	34	15	15	15	**254,16**	627
2.	*Radovan*	*Švarc*	4	G ČTřebová	25	25	25	25	25	25	17	31	15	15	15	**242,62**	1182
3.	*Danil*	*Koževnikov*	1	GKepleraPH	23	24	24	24	23	22	23	30	14	13	12	**233,35**	233
4.	*Filip*	*Bialas*	2	GOpatovPH	25	24	25	24	24	24	21	–	15	15	15	**211,06**	450
5.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	1	GZborovPH	21	23	23	21	18	22	19	26	10	10	9	**203,91**	224
6.	*Jakub*	*Löwit*	3	GČeskoliPH	21	21	23	–	18	22	25	29	11	9	15	**194,73**	630
7.	*Jan*	*Jurka*	4	GMLerchaBO	17	20	22	21	17	17	17	25	13	9	–	**178,13**	375
8.	*Lucien*	*Šíma*	3	PORG PH	19	21	22	21	21	19	14	24	10	6	–	**177,47**	177
9.	*Marie*	*Dohnalová*	2	GNadKavaPH	18	22	19	22	19	21	20	17	12	–	5	**173,68**	174
10.	*Petr*	*Gebauer*	1	G Mělník	19	19	11	22	13	23	14	14	11	9	11	**167,49**	167
11.	*Tomáš*	*Domes*	2	MendelG OP	19	21	19	17	19	15	16	13	12	8	6	**165,43**	165
12.	*Zuzana*	*Johanovská*	3	GOpatovPH	19	22	19	17	13	15	13	16	14	7	6	**163,86**	164
13.	*Marian*	*Poljak*	3	GJŠkodyPŘ	19	19	22	20	19	19	14	26	6	–	–	**163,78**	287
14.	*Jan*	*Škvára*	4	GJŠkodyPŘ	19	21	21	18	20	13	16	21	8	1	5	**163,46**	163
15.	*Jiří*	*Vala*	1	G Mikulov	21	22	22	21	21	19	8	21	3	3	–	**160,71**	161
16.	*Veronika*	*Hladíková*	2	GMikul23PL	19	19	23	23	21	15	16	15	5	3	–	**159,05**	159
17.	*Lenka*	*Kopfová*	0	CZŠSL HnM	23	23	24	23	15	20	–	20	9	–	–	**158,81**	159
18.	*Pavel*	*Hudec*	1	GJarkovPH	22	19	19	20	20	–	18	18	10	9	–	**154,13**	154
19.	*Tomáš*	*Konečný*	2	GJirsíkaČB	22	21	19	17	7	17	18	17	7	–	7	**152,49**	295
20.	*Vojtěch*	*Lanz*	1	GZborovPH	21	21	23	22	18	18	16	9	4	–	0	**150,93**	279
21.	*Adéla*	*Kostelecká*	3	GLesníZlín	19	21	21	21	20	16	14	13	4	–	–	**149,47**	149
22.	*Jan*	*Soukup*	4	G Klatovy	18	25	17	21	20	19	–	–	9	15	–	**143,20**	854
23.	*Aleš*	*Krčil*	2	G Humpolec	18	16	22	20	14	11	13	19	0	9	0	**140,97**	141
24.	*Michal*	*Töpfer*	2	GJPekařeMB	22	22	16	22	15	9	12	4	8	3	7	**139,98**	140
25.	*Daniel*	*Kopf*	3	SlezkéG OP	18	18	21	20	10	15	16	12	6	1	–	**138,61**	139
26.	*Vít*	*Kalisz*	3	FSG Pirna	20	16	19	20	15	6	13	15	6	1	0	**130,38**	186
27.	*Daniel*	*Magula*	1	PiarGNitra	17	8	21	16	15	19	11	9	0	3	9	**127,59**	128
28.	*Jan*	*Šorm*	3	GJarošeBO	15	18	18	18	17	5	12	10	8	2	4	**127,52**	485
29.	*Hedvika*	*Ranošová*	1	GBudějovPH	19	19	11	19	19	14	12	13	0	–	–	**125,08**	206
30.	*Dominik*	*Krasula*	2	G Krnov	18	15	18	16	14	12	9	6	5	4	6	**123,93**	455
31.	*Martin*	*Števko*	0	GAlejKošic	21	22	23	10	16	10	19	0	–	–	–	**122,01**	122
32.	*Ondřej*	*Knopp*	1	G Třeboň	21	22	19	18	18	11	–	–	4	6	–	**118,51**	119
33.	*Kamila*	*Kyzlíková*	1	GZborovPH	19	18	17	17	15	7	19	7	–	–	–	**118,36**	118
34.	*Kateřina*	*Nová*	2	G Vimperk	17	18	20	9	12	5	15	11	7	2	–	**116,81**	213
35.	*Jaroslav*	*Paidar*	1	SPŠMasarLI	20	19	19	14	14	–	13	9	3	–	–	**110,48**	110
36.	*Václav*	*Steinhauser*	1	ZŠVranéNVl	15	21	23	20	16	–	0	15	0	–	–	**109,79**	369
37.	*Daniel*	*Pišťák*	3	GZborovPH	11	19	10	17	11	16	10	9	4	1	–	**108,59**	584
38.	*Jana*	*Řežábková*	3	PORG PH	19	20	20	21	–	–	14	8	6	–	–	**108,42**	108
39.	*Denisa*	*Chytilová*	1	GJŠkodyPŘ	17	22	16	15	19	8	8	3	–	–	–	**108,27**	108
40.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	16	24	14	17	13	8	8	7	–	–	–	**108,06**	108
41.	*Eduard*	*Batmendijn*	4	CGStĽubovňa	25	25	25	13	–	–	–	–	15	–	–	**102,58**	291
42.	*Marek*	*Malý*	2	G Neratov	16	12	17	13	11	7	13	7	0	2	5	**102,08**	102
43.	*Nina*	*Hronkovičová*	4	G Partizan	19	23	19	16	17	–	–	–	6	–	–	**100,00**	100
44.	*Zuzana*	*Svobodová*	3	G FrýdlNOs	20	20	13	14	5	6	–	12	5	1	–	**97,78**	389
45.	*Anh*	*Le Hoang*	3	GJarošeBO	14	20	22	13	4	13	5	7	–	–	–	**97,50**	190

46.	*Petr*	*Jakubčík*	1	PORG PH	18	10	17	21	16	12	2	–	–	–	–	**96,03**	208
47.	*Radek*	*Olšák*	0	GMensaPH	22	21	17	–	10	–	14	–	10	–	–	**94,66**	111
48.	*Viktor*	*Němeček*	4	GJMasar JI	25	19	19	16	–	–	–	–	15	–	–	**93,51**	432
49.	*Jan*	*Gocník*	3	GJŠkodyPŘ	15	20	20	21	–	16	–	–	–	–	–	**92,29**	92
50.	*Vojtěch*	*Lukeš*	3	G LPika PL	19	21	15	20	7	–	–	–	9	–	–	**90,72**	233
51.	*Matěj*	*Konečný*	4	G Jírov ČB	19	19	22	16	–	–	–	–	15	–	–	**90,37**	463
52.	*Karolína*	*Kuchyňová*	4	GMLerchaBO	20	20	18	19	–	–	–	–	10	–	–	**87,58**	460
53.	*Vojtěch*	*Suchánek*	4	GJarošeBO	20	19	22	21	–	–	–	–	4	–	–	**86,64**	268
54.	*Václav*	*Rozhoň*	4	GJirsíkaČB	22	17	17	17	–	–	–	–	13	–	–	**86,06**	297
55.	*Anna*	*Gajdová*	4	G ValMez	18	21	16	19	–	–	–	–	10	–	–	**84,00**	84
56.	*Lucie*	*Hronová*	2	GJarošeBO	13	22	9	15	9	–	12	4	–	–	–	**83,90**	84
57.	*Samuel*	*Karaba*	1	SŠNvh	21	18	17	3	16	–	10	–	–	–	–	**83,76**	84
58.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	GJarošeBO	18	15	13	–	15	9	9	–	–	–	–	**79,83**	80
59.	*Martin*	*Vrabec*	4	GMRŠKošice	–	21	15	21	8	9	–	–	5	–	–	**79,54**	80
60.	*Jan*	*Dittrich*	3	GJarošeBO	17	10	12	4	11	4	8	6	3	1	–	**77,78**	78
61.	*Filip*	*Chudoba*	1	PORG PH	16	13	16	10	11	–	8	–	–	–	–	**74,28**	74
62.	*Zuzana*	*Tréglová*	2	G Žatec	21	12	6	8	10	–	16	–	–	–	–	**73,41**	150
63.	*Jozef*	*Burkuš*	2	G Rožňava	18	15	17	9	5	2	7	–	–	–	–	**73,14**	73
64.	*Richard*	*Hladík*	2	GaOA MarLáz	18	9	19	–	–	–	17	–	7	–	–	**70,88**	71
65.	*Nodari*	*Gogatishvili*	1	GZborovPH	11	14	17	3	14	11	–	–	–	–	–	**69,88**	70
66.	*Markéta*	*Horová*	3	GMikul23PL	15	20	15	20	–	–	–	–	–	–	–	**69,54**	220
67.	*Jaromír*	*Mielec*	2	GVolgogrOS	18	20	7	9	10	3	1	–	–	–	–	**67,97**	444
68.	*Jakub*	*Marták*	3	G GolNitra	13	7	11	6	10	7	7	5	–	–	–	**67,20**	140
69.	*Jakub*	*Ševčík*	3	GKukučPopr	15	9	16	5	11	5	4	–	–	–	–	**67,01**	81
70.	*Markéta*	*Calábková*	4	GJŠkodyPŘ	12	12	17	11	2	–	6	–	5	–	–	**65,03**	344
71.	*Daniel*	*Bárta*	0	GChodoviPH	20	16	13	–	14	–	–	–	–	–	–	**64,16**	64
72.	*Anh Minh*	*Tran*	3	GJarošeBO	14	16	13	12	–	–	–	–	7	–	–	**63,45**	63
73.	*Stano*	*Šípka*	3	GKukučPopr	12	12	13	8	6	5	6	–	–	–	–	**62,62**	63
74.	*Eliška*	*Cejnarová*	1	G Jaroměř	16	13	15	–	8	0	10	–	–	–	–	**61,90**	62
75.	*Vladimír*	*Lukačko*	1	GVarŽilina	15	17	11	–	7	–	11	–	–	–	–	**61,27**	61
76.	*Viktor*	*Szabo*	1	GJHroncaBA	17	17	15	7	–	5	–	–	–	–	–	**60,23**	60
77.	*Martin*	*Surma*	4	GJWolkraPV	22	19	17	–	–	–	–	–	–	–	–	**57,52**	352
78.	*Matej*	*Hockicko*	1	SSOŠTA PP	15	14	19	–	7	–	3	–	–	–	–	**57,44**	57
79.	*František*	*Couf*	2	GZborovPH	–	10	–	10	5	–	4	–	15	14	–	**57,03**	537
80.	*Barbora*	*Sedláková*	4	GKonštanPV	8	11	9	14	9	–	6	–	–	–	–	**57,00**	57
81.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	13	0	20	–	13	–	10	–	–	–	–	**56,61**	57
82.	*Pavel*	*Myšička*	4	G Čáslav	14	16	11	11	–	–	–	–	4	–	–	**56,00**	56
83.	*Ondřej*	*Darmovzal*	4	GJarošeBO	15	18	20	–	–	–	–	–	–	–	–	**53,83**	121
84.	*Ondřej*	*Lomický*	2	G Plasy	16	21	17	–	–	–	–	–	–	–	–	**53,74**	54
85.	*Matěj*	*Hasala*	0	ZŠ Teplice	14	–	20	–	8	8	–	–	–	–	–	**51,39**	51
86.	*Lukáš*	*Kubacki*	2	GNadKavaPH	14	9	8	–	11	9	–	–	–	–	–	**51,30**	135
87.	*Štefan*	*Hollán*	1	G Bytča	17	16	7	–	11	–	–	0	–	–	–	**50,89**	51
88.	*Sára*	*Elichová*	0	GKepleraPH	15	13	8	–	–	–	13	–	–	–	–	**49,79**	50
89.	*Peter*	*Macko*	0	ŠpMNDaG BA	22	14	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**49,47**	49
90.	*Jakub*	*Hledík*	4	GSŘMRSkuteč	12	14	10	7	–	–	–	–	7	–	–	**48,81**	253
91.	*Štěpán*	*Procházka*	4	GSRandyJN	16	16	15	–	–	–	–	–	–	–	–	**48,32**	89
92.	*Alžběta*	*Neubauerová*	1	GNadKavaPH	10	7	8	–	11	–	11	–	–	–	–	**48,03**	48
93.	*Lucia*	*Klasová*	1	G Gröss BA	19	11	16	–	–	–	–	–	–	–	–	**46,55**	47
94.	*Kristína*	*Szabová*	1	GVarŽilina	17	14	3	–	11	–	–	–	–	–	–	**44,69**	45
95.	*Jiří*	*Nábělek*	1	G Bílovec	18	17	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**44,53**	45
96.	*Jakub*	*Tětek*	1	CírkGPlzeň	–	–	–	–	19	11	–	–	–	14	–	**44,43**	44

97.	*Alena*	*Zahradníčková*	4	GKřenováBO	15	14	4	–	5	–	6	–	–	–	–	**44,00**	44
98.	*Tomáš*	*Terem*	3	GTajBanBys	11	15	8	–	–	–	–	–	6	–	–	**41,22**	41
99.	*Barbora*	*Mouleová*	1	G Plasy	13	14	14	0	0	–	–	–	–	–	–	**40,26**	40
100.	*Marek*	*Murin*	3	GJHroncaBA	18	–	13	–	–	–	–	–	8	–	–	**40,10**	40
101.	*Pál*	*Somogyi*	3	GIM Šamorín	9	4	11	6	4	4	–	–	–	–	–	**38,78**	39
102.	*Šimon*	*Karch*	1	G KomHavíř	19	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,36**	38
103.	*Soňa*	*Burešová*	1	GHeyrovPH	21	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,13**	38
104.	*Radek*	*Zikmund*	4	G HavlBrod	17	21	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,00**	38
105.	*Martin*	*Strnad*	1	G Dobříš	15	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**37,32**	37
106.	*Zuzana*	*Frankovská*	3	GJHroncaBA	20	10	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**36,92**	37
107.	*Leoš*	*Smetana*	2	G Jaroměř	13	14	9	–	–	–	–	–	–	–	–	**36,53**	37
108.	*Marek*	*Černý*	4	G Chrudim	17	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**35,71**	47
109.	*Jan*	*Pekař*	1	GJPekařeMB	17	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**35,35**	35
110.	*Stepan*	*Yakimov*	4		–	–	21	13	–	–	–	–	–	–	–	**34,27**	34
111.	*Marián*	*Poppr*	4	GJNerudyPH	18	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**33,92**	471
112.	*Tomáš*	*Kuzma*	3	GJHroncaBA	18	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**33,46**	156
113.	*Katarína*	*Krajčiová*	4	GAlejKošic	18	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**33,06**	536
114.	*Zuzana*	*Urbanová*	2	GUBalvanJN	17	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**32,90**	33
115.	*Ondřej*	*Zeman*	4	G Lovosice	–	11	17	–	–	–	–	–	5	–	–	**32,88**	56
116.	*Timotej*	*Šujan*	3	GJarošeBO	15	10	4	–	3	–	–	–	–	–	–	**32,60**	43
117.	*Jakub*	*Matěna*	3	GČeskoliPH	21	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**32,55**	54
118.	*Přemysl*	*Šťastný*	2	G Žamberk	17	5	–	9	–	–	–	–	–	–	–	**31,70**	79
119.	*David*	*Pokorný*	3	G Bučovice	10	8	–	–	10	–	0	3	–	–	–	**31,51**	32
120.	*Václav*	*Málek*	3	G Chotěboř	17	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**30,74**	31
121.	*Jan*	*Knížek*	4	G Strakon	19	–	12	–	–	–	–	–	–	–	–	**30,18**	60
122.	*Anežka*	*Soukupová*	1	SPŠchemBrno	15	7	8	–	0	–	–	–	–	–	–	**30,16**	30
123.	*Lukáš*	*Fruněk*	2	GLesníZlín	17	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**28,79**	29
124.	*Michal*	*Bubeník*	2	BiskG Brno	13	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**28,05**	28
125.	*Pavla*	*Nováková*	3	GJarošeBO	13	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**27,94**	28
126.	*Zdeněk*	*Lukeš*	3	GNeumannŽR	13	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,94**	27
127.	*Iva*	*Švecová*	1	GJMasar JI	20	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,79**	27
128.	*Marián*	*Okál*	1	SŠNvh	15	–	–	–	–	–	11	–	–	–	–	**26,27**	26
129.	*Michaela*	*Jakešová*	3	GJarošeBO	9	11	6	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,09**	26
130.	*Tereza*	*Kislingerová*	2	G Klatovy	17	–	–	–	9	–	–	–	–	–	–	**25,95**	130
131.	*Petr*	*Gintar*	3	MendelG OP	6	4	9	–	–	–	6	1	–	–	–	**25,84**	30
132.	*Lukáš*	*Zíb*	3	GPísnickPH	15	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**25,73**	26
133.	*Martin*	*Scheubrein*	3	G MasNámTŘ	13	8	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**25,70**	26
134.	*Ondrej*	*Bínovský*	4	GAnMeTr	10	–	10	–	–	–	–	6	–	–	–	**25,16**	51
135.	*Filip*	*Oplt*	2	GBudějovPH	19	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,64**	25
136.	*Šárka*	*Vavrečková*	2	GBezručeFM	15	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,53**	25
137.	*Martin*	*Zahradníček*	4	GŠlapanice	16	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,27**	24
138.	*Dominika*	*Levická*	4	GMRŠKošice	–	16	8	–	–	–	–	–	0	–	–	**24,00**	24
139.	*Michal*	*Převrátil*	2	G Klatovy	–	–	–	–	13	11	–	–	–	–	–	**23,72**	24
140.	*Matúš*	*Varhaník*	1	G Bytča	11	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,76**	23
141.	*Borek*	*Požár*	1	G Rakovník	16	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,68**	23
142.	*Noemk*	*Kuželová*	3	GBalbínaHK	9	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,64**	23
143.	*Soňa*	*Lisníková*	2	GBezručeFM	13	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,48**	22
144.	*David*	*Kozina*	1	SPŠEIT BO	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,43**	22
145.	*Veronika*	*Venclová*	1	G Chrudim	14	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,29**	22
146.	*Lucie*	*Janštová*	2	SlovanG OL	13	–	2	–	7	–	–	–	–	–	–	**21,67**	22
147.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	–	13	8	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,37**	21

148.	*Michaela*	*Brabcová*	3 G Jírov ČB	–	16	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,85**	98
149.	*Michal*	*Porubsky*	3 GCyMeNitra	11	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,56**	21
150.	*Tomáš*	*Macek*	2 G Náchod	20	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,12**	20
151.	*Minh Thao*	*Nguyen*	3 GEBenešeKL	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**19,00**	19
152.	*Petr*	*Ježek*	1 GBNěmcovHK	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,52**	19
153.	*Marek*	*Jaroš*	3 GJM Gal	–	10	–	–	8	–	–	–	–	–	–	**18,30**	18
154.	*Lukáš*	*Pavela*	0 LSG Letohrad	18	–	–	–	–	0	–	–	–	–	–	**18,23**	18
155.–158.	*Martin*	*Barnovský*	2 GStĽubovňa	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
155.–158.	*Petr*	*Chmel*	2 G Kralupy	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
155.–158.	*Jan*	*Dopita*	2 GBudějovPH	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
155.–158.	*Adrián*	*Mokrý*	2 GNVPlániPH	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,77**	18
159.	*Jakub*	*Gregora*	1 GLanškroun	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,70**	18
160.	*Andrej*	*Čermák*	1 GJF Šaľa	13	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,53**	18
161.	*Jan*	*Václavek*	3 G Ústí n O	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,24**	137
162.	*František*	*Zajíc*	2 G Nymburk	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,90**	17
163.–164.	*Jakub*	*Ditrich*	1 GÚstavníPH	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,83**	17
163.–164.	*Roman*	*Walica*	1 G Třinec	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,83**	17
165.	*Adéla*	*Jalovcová*	2 GNerudCheb	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**16,00**	16
166.	*Matěj*	*Kletečka*	1 G HavlBrod	16	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,89**	16
167.	*Kristýna*	*Šudomová*	3 GValašKlob	12	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,70**	156
168.–169.	*Filip*	*Keller*	0 G Milevsko	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,39**	15
168.–169.	*Jaroslava*	*Šamanová*	0 G Tišnov	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,39**	15
170.	*Tomáš*	*Troján*	0 GNerudCheb	12	–	–	–	4	0	–	–	–	–	–	**15,32**	15
171.–173.	*Ronald*	*Luc*	2 GJarošeBO	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,00**	22
171.–173.	*Martin*	*Repčík*	4 GTomkovaOL	9	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,00**	15
171.–173.	*Emese*	*Szabó*	4 GZKMJ Gal	4	3	8	–	0	–	–	–	0	–	–	**15,00**	15
174.–176.	*Jan*	*Došek*	1 G Brandýs	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
174.–176.	*Vladislav*	*Najvárek*	1 GBezručeFM	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
174.–176.	*Adéla*	*Zvěřinová*	1 GJiříPoděb	10	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,89**	15
177.	*Pavel*	*Šklíba*	2 GDašickáPA	–	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,79**	15
178.	*Eva*	*Klimentová*	2 GJarošeBO	–	–	–	9	–	5	–	–	–	–	–	**14,75**	15
179.	*Anežka*	*Michálková*	3 GaSOŠ Telč	4	8	–	3	–	–	–	–	–	–	–	**14,62**	47
180.	*Martin*	*Kutiš*	3 G Humpolec	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,47**	14
181.	*Jan*	*Šuta*	2 GJŠkodyPŘ	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
182.	*Zuzana*	*Klimsová*	1 GJMasar JI	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,81**	14
183.	*Marie*	*Vonzino*	2 GTomkovaOL	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,69**	67
184.	*Adéla*	*Šedová*	3 GJungmanLT	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,38**	25
185.	*Ekaterina*	*Pichugina*	0 GJarkovPH	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,03**	13
186.	*Martina*	*Petráková*	2 GOA Pelh	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
187.–190.	*Martin*	*Beran*	1 SPŠLegioJI	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
187.–190.	*Matyáš*	*Kalous*	1 GDomažlice	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
187.–190.	*Vladimír*	*Kistan*	1 G Rýmařov	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
187.–190.	*Matěj*	*Konvalinka*	1 GOA Sedlča	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
191.	*Miroslav*	*Mareš*	4 GBudějovPH	6	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,27**	12
192.	*Jakub*	*Kvasil*	2 GMozartovaPA	7	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,03**	12
193.–194.	*Karel*	*Jílek*	4 GKepleraPH	–	–	7	5	–	–	–	–	–	–	–	**12,00**	57
193.–194.	*Pavel*	*Mikuš*	4 G Mělník	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,00**	12
195.	*Marie*	*Freibergová*	2 G Děčín	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,89**	12
196.	*Martin*	*Kopřiva*	3 GMikul23PL	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,78**	184
197.	*Markéta*	*Doležalová*	3 GTNovákBO	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,39**	11
198.	*Daniela*	*Hrbáčová*	1 WichtG OS	11	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,38**	11

199.	*Adam*	*Říha*	3	G ČesLípa	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,09**	48
200.	*David*	*Neugebauer*	2	SlezkéG OP	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,72**	11
201.	*Kateřina*	*Čížková*	1	G Rokycany	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
202.	*Tereza*	*Rašková*	4	GTomkovaOL	7	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,71**	25
203.–207.	*Ludmila*	*Hudská*	2	RakGymPH	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
203.–207.	*Veronika*	*Jehličková*	2	GNadKavaPH	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
203.–207.	*Kateřina*	*Škorvánková*	2	G Rokycany	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
203.–207.	*Pavel*	*Turinský*	2	G Brandýs	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
203.–207.	*David*	*Ucháč*	2	EDUCA PAR	–	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,48**	9
208.	*Milan*	*Kubala*	3	GTajBanBys	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
209.–210.	*Alexandra*	*Horkavá*	1	GB Sučany	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,48**	8
209.–210.	*Filip*	*Matějka*	1	GZborovPH	–	–	–	–	–	8	–	–	–	–	–	**8,48**	8
211.	*Karel*	*Vlachovský*	3	MasG Plzeň	–	–	–	–	4	4	–	–	–	–	–	**8,46**	8
212.–214.	*Petr*	*Bartoš*	4	OpenGate	7	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
212.–214.	*Matej*	*Choma*	3	G Gröss BA	–	–	–	–	8	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
212.–214.	*Jiří*	*Matyáš*	3	OATGM KnO	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
215.	*Andrea*	*Kučerová*	3	G ČKrumlov	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,43**	84
216.	*Jan*	*Bráblík*	3	GJarošeBO	3	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,11**	7
217.	*Jiří*	*Čech*	4	G Strakon	2	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,85**	17
218.–221.	*Filip*	*Čermák*	1	MendelG OP	–	–	–	–	7	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
218.–221.	*Jakub*	*Jelen*	1	GBalbínaHK	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
218.–221.	*Dominik*	*Kovář*	3	G Litomyšl	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
218.–221.	*Klára*	*Machová*	3	GDomažlice	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
222.–223.	*Jakub*	*Dostál*	2	SlovanG OL	–	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
222.–223.	*Jana*	*Vývodová*	2	G FHajdyOS	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
224.	*Jiří*	*Štrincl*	4	GSRandyJN	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,52**	47
225.–226.	*Martina*	*Chamrová*	4	GOPavla PH	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,00**	6
225.–226.	*Miroslav*	*Juroška*	4	ČaOG FrMýs	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,00**	6
227.	*Tomáš*	*Hrbek*	3	G Chrudim	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,53**	6
228.	*Sarah*	*Jedličková*	4	GJarošeBO	3	–	3	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,52**	45
229.	*Ivana*	*Krumlová*	2	GJarošeBO	–	–	–	–	–	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
230.	*Matěj*	*Coufal*	2	G HavlBrod	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,19**	21
231.	*Magdaléna*	*Horváthová*	4	SGJHTr	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
232.	*Peter*	*Vook*	4	GPošKošice	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,62**	45
233.	*Robert*	*Pelc*	4	GÚstavníPH	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
234.	*Matyáš*	*Bosák*	0	OpenGate	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,66**	4
235.	*Jan*	*Erhart*	4	GFXŠaldyLI	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,83**	228
236.–240.	*Jan*	*Klaus*	1	GJPekařeMB	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
236.–240.	*Klára*	*Mocová*	0	G Mělník	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
236.–240.	*Veronika*	*Nováková*	0	ZŠ Chrast	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
236.–240.	*Peter Kulcsár*	*Szabó*	3	GHSelyhoKM	–	–	–	0	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	29
236.–240.	*Pavla Mária*	*Švagerková*	3	GKukučPopr	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*