

Rok se s rokem sešel a čtyřiatřicátý ročník je u konce. Chtěli bychom proto poblahopřát vítězi jarní části i celého ročníku, kterým se stal *Pavel Turek*. Patří mu velká sláva! V těsném závěsu za Pavlem se umístili *Radovan Švarc* a *Daniil Koževnikov*, kterým také blahopřejeme.

Radovanovi se podařil ještě jeden kardinální kousek – za svou PraSečí kariéru nashromáždil neuvěřitelných 1182 bodů, čímž překonal současný rekord „Tondy“ Le Anh Dunga s 1064 body.

Pokud jsi nebyl tak úspěšný jako trio PaRáDa, nezoufej. Ceny dostane pětáctýřicet nejúspěšnějších řešitelů – mohou se těšit na PraSečí tašku nebo penál, někteří z lépe umístěných i na tričko či mikinu. Prvních pět řešitelů navíc vyhraje hodnotnou matematickou literaturu podle vlastního výběru.

Prejeme Ti pěkný závěr školního roku a pestré prázdniny. Těšíme se na Tebe v dalším ročníku PraSete nebo u nás na matfyzu.

Za organizátory

Pepa Svoboda

### Obsah závěrečných komentářů

- Návrhy témat seriálu na příští rok
- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí
- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 35. ročníku

### ANKETA A VOLBA SERIÁLU

Ohlašujeme, že na stránce [mks.mff.cuni.cz/anketa](https://mks.mff.cuni.cz/anketa) můžeš vyplnit anketu o tom, co se Ti v PraSeti líbí a co bys naopak dělal(a) jinak. Zpětná vazba je pro nás důležitá, abychom mohli být stále lepší. V anketě můžeš hlasovat především o tématu seriálu na příští rok. Upoutávky k jednotlivým návrhům nalezneš, když otočíš list.

### JARNÍ SOUSTŘEDĚNÍ

Ve dnech 25. května – 3. června proběhl na základně ve Starém Městě přísně tajný výcvik superhrdinů. V jeho průběhu se supernováčci od zkušených superhrdinů naučili nejen mnoho užitečných superschopností, ale také velkou porci zajímavé matematiky. Společnými silami nakonec všichni porazili superpadoucha Cpt. Obviouse a jen díky nim se můžeme těšit na další soustředění!



## Náboj

Jedenáctý ročník Náboje<sup>1</sup> se uskutečnil v pátek 13. března. Věříme ale, že soutěžícím tento den smůlu nepřinesl. A že jich nebylo málo – jen v Praze soutěžilo přes 600 středoškoláků a ve všech šesti zemích, které letos Náboj pořádaly, se jich zúčastnilo celkem přes dva tisíce. Mezinárodními vítězi seniorské kategorie se s velkým náskokem stali členové týmu gymnázia *Fazekas Mihály Gyakorló Általános* z Budapešti, kategorii juniorů stejně suverénně opanoval tým *Gimnazjum nr 24* z Gdyně. V českých zemích se nejvíce dařilo oběma týmům *Gymnázia J. G. Jarkovského* z Prahy, které obsadily celkové druhé místo v juniorské kategorii a osmé místo v kategorii seniorů. Všem gratulujeme a těšíme se na následující ročník, naplánovaný na **15. dubna 2016**.

## Jarní výlet

Tradiční jarní výlet letos proběhl hned den po Náboji, v sobotu 14. března. Tentokrát nás zavedl na jihovýchod od Prahy, do Českého krasu. Za příjemného předjarního počasí jsme zdolali Kodu, prozkoumali exteriér Koněpruských jeskyní a prošli Axamitovou branou. Děkujeme všem zúčastněným a těšíme se na příště.

---

<sup>1</sup>[math.naboj.org](http://math.naboj.org)

# Nabídka seriálů pro 35. ročník

*O tématu seriálu můžete hlasovat v anketě na stránce [mks.mff.cuni.cz/anketa](http://mks.mff.cuni.cz/anketa)!*

## Do nekonečna a ještě dál.

Před nekonečně mnoha lety, za nekonečně mnoha horami a nekonečně mnoha údolími, rozprostíral se pohádkový svět. Svět, který se od toho našeho liší tím, že dává matematicky perfektní smysl, i když někdy trochu podivný. Svět, který je tak rozsáhlý a rozmanitý, že dokáže pokrýt veškerou matematiku. Svět, ve kterém máte nekonečno na dosah ruky. A kdyby jenom jedno – různých nekonečen tam najdete víc, dokonce nekonečno, a ne jen tak ledajaké. Pojdte se s nimi také seznámit.

## Geometrie trojúhelníka

Stále vás nepřestává fascinovat, že se výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě? Nejste sami. A co takhle, že onen průsečík výšek leží na jedné přímce se středem kružnice opsané a těžištěm? Nebo že se osa strany protíná s osou protějšího úhlu na kružnici opsané? Geometrie trojúhelníka zná podobně zajímavých a pěkných tvrzení nepřeborné množství a tento seriál nabízí jejich výběr i vám. Pojdme společně prozkoumat kousek světa syntetické geometrie, jehož vývoj započal už ve starém Řecku. Většina technik, které si při tomto výletu osvojíme, se vám navíc bude hodit při řešení Matematické olympiády i jiných soutěží. Můžete se těšit na spoustu obrázků a hlavně, nikdy už se nezaleknete nápisu  $\alpha\gamma\epsilon\omega\mu\acute{\epsilon}\tau\eta\rho\eta\tau\iota\varsigma\ \mu\eta\delta\epsilon\acute{\iota}\varsigma\ \epsilon\acute{\iota}\sigma\iota\tau\omega^2$ .

## Polynomy

Co mají společného základní řešení rovnic ve škole, teorie čísel na olympiádách a analýza na VŠ? Co bere algebru s geometrií a převádí je na jedno, na algebraickou geometrii? Polynomy! Nejprve se podíváme na jejich nejjednodušší chování a vlastnosti a postupně se dostaneme až k tomu, s čím se pracuje v té „pravé matici“. Vše budeme pravidelně prokládat olympiádními aplikacemi, včetně několika příkladů z IMA. A možná dojde na čokoládu.

## Algoritmická geometrie

Ne každý sice řešil problém, jak oplotit stromy na zahrádce, zato ten, jak se dostat na nejbližší záchod, určitě ano. Geometrie skrývající se za tímto problémem nikoho rozhodně nezarází. Ale co třeba míchání roztoků nebo řízení obrazu na displeji počítače. Čekali byste geometrii zde? Jak už název napovídá, jedná se o geometrii algoritmickou, tedy žádné obvodové úhly, tětíkové čtyřúhelníky či Švrčkovy body, zato narazíme na trochu kombinatoriky a teorie grafů. Jde v podstatě o hledání elegantních postupů, jak může počítač řešit geometrické úlohy. Nebudeme vám lhát, že se tu neobjeví (většinou nenáviděná) analytická geometrie. Můžete to brát jako šanci zjistit, že není jen nástrojem, jak hezké olympiádní geometrie zabít hafem rovnic, nýbrž že je občas hezká i sama o sobě.

---

<sup>2</sup>Nevstupuj, kdo neznáš geometrii.

# Polynomy

2. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(58; 56; 2,84; 3,0)

Najděte polynom nabývající celočíselných hodnot ve všech celých čísech, který nemá všechny koeficienty celočíselné. (Kuba Krásenský)

ŘEŠENÍ:

Takovým polynomem je například

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Vidíme, že jeho koeficienty celočíselné nejsou. Proč nabývá ve všech bodech celočíselné hodnoty? Když za  $x$  dosadíme libovolné celé číslo, jsou  $x$  a  $x+1$  po sobě jdoucí celá čísla, takže jedno z nich je určitě sudé. Proto je sudý i jejich součin. A když sudé číslo vydělíme dvěma, dostaneme vždy celé číslo.

POZNÁMKY:

Naprostá většina došlých řešení byla správná. Nejčastěji se vyskytoval polynom uvedený ve vzorovém řešení a jeho varianty posunuté o absolutní člen. Zdůvodnění, proč jsou všechny jeho hodnoty celočíselné, provedlo mnoho řešitelů méně elegantním, ale rovněž plně korektním způsobem: prohlásili, že  $x^2$  a  $x$  jsou čísla se stejnou paritou, takže  $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$  je součet buď dvou celých čísel, nebo dvou čísel s desetinnou částí rovnou 0,5.

Překvapilo mě, že jediný *Daniil Koževnikov* zmínil přirozený způsob, jak k polynomu  $\frac{1}{2}x(x+1)$  dojít – je to totiž součet prvních  $x$  přirozených čísel. Kromě toho od něj pochází i nejoriginálnější z řešení, která jsem opravoval: navrhl polynom  $\frac{1}{n}(x^{\varphi(n)+1} - x)$ . Ten sice nefunguje, protože v Eulerově větě je mezi předpoklady i nesoudělnost  $x$  a  $n$ , ale je pravdou, že pro každé prvočíselo  $p$  bude zadání splňovat polynom  $\frac{1}{p}(x^p - x)$ . Danilovi v originalitě konkuroval asi jen *Marian Poljak*, který prosazoval polynom  $\frac{1}{42}x(x+1) \cdots (x+41)$ . (Kuba Krásenský)

## Úloha 2.

(47; 28; 1,85; 2,0)

Pro které trojice reálných čísel  $a, b, c$ , kde  $a \neq c$ , mají polynomy

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1, \\ Q(x) &= x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1 \end{aligned}$$

dva různé společné reálné kořeny?

(Kuba Krásenský)

ŘEŠENÍ:

Uvažme polynomy  $P(x)$  a  $Q(x)$  jako v zadání. Pokud tyto dva polynomy mají společné kořeny  $y$ , potom pro ně platí  $P(y) = Q(y) = 0$ . Tedy  $P(y) - Q(y) = 0$ , z čehož dosazením a úpravou dostaneme  $(a - c) \cdot y(y - 1)(y + 1) = 0$ . Výrazem  $a - c$  můžeme v rovnici vydělit (protože ze zadání platí  $a \neq c$ ), a z toho plyne, že společnými kořeny zadaných polynomů mohou být pouze čísla  $-1, 0, 1$ . Nulu vyradíme, protože není kořenem polynomu  $P(x)$  ani  $Q(x)$ . Našli jsme jediné dva možné společné kořeny  $-1$  a  $1$ .

Dosazením do zadaných polynomů dostaneme soustavu rovnic pro neznámé  $a, b, c$ :

$$\begin{aligned} a + b + c &= -2 \\ -c + b - a &= -2 \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic, respektive odečtením první rovnice od druhé dostaneme podmínky  $b = -2$  a  $a = -c$ . Rovněž musí platit podmínka ze zadání, tudíž  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zadání odpovídají všechny trojice čísel  $(a, b, c) = (x, -2, -x), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

POZNÁMKY:

V této úloze lze řešitele rozdělit do dvou skupin – ty, kteří mají řešení podobné autorskému, a ty, kteří se rozhodli vytasit na tuto úlohu Viětovy vztahy. V obou skupinách se vyskytlo až znepokojivě hodně lidí, kteří udělali tutéž chybu – v rovnici dělili výrazem s proměnnou a neověřili, že nedělí nulou (a v tomto případě skutečně nulou vydělili a vyšel jim poté nesmysl). Základní problém při dělení výrazem s proměnnou (třeba  $x^2 - 1$ ) je, že nevíme, jaké nabývá hodnoty. Tedy se nám může stát, že rovnici vydělíme nulou a tím ji naprosto zlikvidujeme. Proto se častěji používá převedení na jednu stranu a vytykání, případně je třeba zvlášť rozebrat, kdy to, čím dělíme, je nula a ukázat, že to naše řešení neovlivní. (Honza Krejčí)

### Úloha 3.

(39; 34; 2,59; 3,0)

Najděte všechny reálné polynomy  $P(x)$ , které pro každé  $x \in \mathbb{R}$  splňují

$$x \cdot P(x - 1) = (x + 1) \cdot P(x).$$

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Pomocí matematické indukce ukážeme, že polynom  $P(x)$  musí mít kořen v každém bodě  $x \in \mathbb{N}_0$ . Pokud dosadíme  $x = 0$ , pak dostaneme

$$0 \cdot P(0 - 1) = (0 + 1) \cdot P(0),$$

neboli  $P(0) = 0$ . Předpokládejme tedy, že  $x \in \mathbb{N}_0$  je kořenem polynomu  $P(x)$ . Ukážeme, že pak musí být kořenem i  $x + 1$ :

$$\begin{aligned} (x + 1) \cdot P(x + 1 - 1) &= (x + 1 + 1) \cdot P(x + 1) \\ (x + 1) \cdot P(x) &= (x + 2) \cdot P(x + 1) \end{aligned}$$

Dle indukčního předpokladu je  $P(x) = 0$ , tudíž levá strana rovnice je nulová. Dostáváme tedy

$$0 = (x + 2) \cdot P(x + 1).$$

Jelikož  $x + 2 > 0$ , musí být  $P(x + 1) = 0$ , neboli  $x + 1$  je také kořen polynomu  $P(x)$ , což jsme potřebovali dokázat.

Polynom stupně  $n \in \mathbb{N}_0$  má nejvýše  $n$  reálných kořenů, zatímco  $P(x)$  nabývá nulové hodnoty v nekonečně mnoha bodech. Polynom řešící úlohu tudíž nemůže být nenulový. Naopak polynom  $P(x) = 0$  zadání splňuje, je tedy jediným řešením zadané úlohy.

POZNÁMKY:

Jelikož tato úloha byla poměrně přímočará, všechna správná řešení byla podobná vzorovému, někteří místo dosazení  $x = 0$  dosadili  $x = -1$  a poté indukci prováděli v záporných číslech. U několika řešitelů jsem se setkal s tvrzením, že  $P(x) = 0$  není polynom, tudíž úloha nemá řešení, ovšem v úvodním textu bylo pouze napsáno, že u nulového polynomu nedefinujeme jeho stupeň. Nicméně pokud byl celý postup až na závěr správný, bod jsem nakonec nestrhával.

(Tomáš Novotný)

**Úloha 4.**

(36; 26; 3,61; 5,0)

*Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen?*  
(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Ne, žádný takový polynom neexistuje. Postupujeme sporem. Mějme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

kde  $n$  je nějaké sudé přirozené číslo nebo nula a  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  jsou lichá celá čísla. Dále předpokládejme, že existují dvě nesoudělná celá čísla  $p, q$ , kde  $q \neq 0$ , taková, že  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ , tedy že polynom  $P$  má racionální kořen.

Předpoklad na existenci racionálního kořenu rozepíšme pomocí předpisu polynomu, čímž získáme rovnost, kterou ekvivalentně upravíme vynásobením obou stran číslem  $q^n$ . Získáme

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_0 q^n = 0.$$

Všechny členy na levé straně, až na ten poslední, jsou dělitelné  $p$ . Pravá strana je rovna nule, takže je také dělitelná  $p$ . Z toho plyne, že  $p$  dělí  $a_0 q^n$ , ale z nesoudělnosti  $p$  a  $q$  už nutně  $p$  dělí  $a_0$ . Analogicky zjistíme, že  $q$  dělí  $a_n$ . Protože ale  $a_0$  i  $a_n$  jsou lichá, musí být lichá i  $p$  a  $q$ . Tím pádem máme na levé straně součet  $n + 1$  členů, z nichž každý je součinem několika lichých čísel. Levá strana je tedy rovna nějakému lichému číslu a tak získáváme kýžený spor s rovností nule, která je sudá. Tím je důkaz hotov.

POZNÁMKY:

Větší část důkazu se vlastně zabývá důkazem matematické věty, kterou známe pod názvem *Rational root theorem*. Ta říká, že při zavedení stejného značení jako v úloze  $p$  dělí  $a_0$  a  $q$  dělí  $a_n$ , a to i v případě, že  $n$  je sudé a koeficienty libovolné celočíselné. Důkaz tohoto tvrzení v plné obecnosti vypadá stejně jako ten, který jsme předvedli v řešení. Kdo větu znal a vzpomněl si na ni, mohl ušetřit značné množství práce.

Co se došlých řešení týče, skutečným překvapením, které jsem zažil snad poprvé, pro mě byl fakt, že všichni řešitelé, kteří se dostali k nějakému řešení, se shodli na tom, že daný polynom neexistuje. Většina řešitelů navíc měla i správné zdůvodnění – buď to vzorové, nebo (častěji) podobné řešení, v němž se v upravené rovnosti rozebírají možnosti parit  $p$  a  $q$  a opět se dojte ke sporu se sudostí nuly.

Další řešení využívala Viètových vztahů nebo diskriminantu. Pro kvadratické polynomy tyto způsoby možná fungují, ale pro vyšší řády jsou Viètovy vztahy prakticky nepoužitelné a diskriminant naprosto nepoužitelný, protože podobný vzorec pro rovnosti stupňů vyšších než čtyři neexistuje. Těmto řešením jsem tedy zpravidla neuděloval více než jeden bod.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

### Úloha 5.

(22; 11; 2,36; 1,5)

Nenulový polynom s celočíselnými koeficienty má alespoň dva různé kladné reálné kořeny, přičemž jeden z nich je roven 2015. Dokažte, že nějaký jeho koeficient je menší nebo rovný  $-2015$ .

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Označme hledaný polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde koeficienty  $a_0, a_1, \dots, a_n$  jsou celá čísla a navíc  $a_n \neq 0$ . Podle zadání víme, že 2015 je kořen, a proto  $P(x) = (x - 2015) \cdot Q(x)$ , kde

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Matematickou indukcí od  $n - 1$  dolů dokážeme, že  $Q(x)$  má celočíselné koeficienty. Porovnáním koeficientů ve vztahu  $P(x) = (x - 2015) \cdot Q(x)$  dostaneme  $a_n = b_{n-1}$ ,  $a_0 = -2015b_0$  a  $a_k = b_{k-1} - 2015b_k$  pro  $k$  od 1 do  $n - 2$ , tudíž snadno získáme základní krok, že  $b_{n-1}$  je celočíselné. Předpokládejme, že  $b_k$  je celočíselné, pak z  $a_k = b_{k-1} - 2015b_k$  plyne celočíselnost  $b_{k-1}$  a důkaz je hotov.

Úlohu dokončíme sporem. Předpokládejme, že každý koeficient polynomu  $P(x)$  je větší než  $-2015$ . V tomto případě ukážeme, že každý koeficient  $b_i$  je nekladný. Důkaz matematickou indukcí začneme u  $a_0$ . Víme totiž, že  $-2015b_0 = a_0 > -2015$ , a proto  $b_0 < 1$ , neboli  $b_0 \leq 0$ , neboť  $b_0$  je celé číslo. Dále předpokládejme, že  $b_k$  je nekladný, pak platí

$$-2015b_{k+1} = a_{k+1} - b_k > -2015,$$

a proto  $b_{k+1} < 1$ , neboli  $b_{k+1} \leq 0$  a důkaz je hotov.

Protože  $Q(x)$  má jen nekladné koeficienty a je nenulový, dostaneme po dosazení kladného reálného čísla záporný výsledek. To je ale spor s podmínkou ze zadání, podle které by měl mít  $Q(x)$  ještě nějaký kladný kořen.

POZNÁMKY:

Přítomnost dvou kořenů původního polynomu zavádí k tomu, abychom ho rozložili na součin kvadratického polynomu a zbytku, což nám dává složitější algebraické vztahy, se kterými se hůře manipuluje. Někteří řešitelé prohlásili, že polynom  $Q(x)$  je celočíselný, což vůbec není zřejmé a je potřeba dokázat. Dokonce platí i obecnější tvrzení, že rozložíme-li monický celočíselný polynom na dva monické polynomy, pak tyto činitele musí být také celočíselné.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

### Úloha 6.

(17; 10; 2,82; 3,0)

Trojice kladných reálných čísel  $a, b, c$  a  $x, y, z$  mají stejný součin a stejný součet a navíc platí  $\max(a, b, c) \geq \max(x, y, z)$ . Dokažte, že  $\min(a, b, c) \geq \min(x, y, z)$ .

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

BÚNO předpokládáme  $a \geq b \geq c > 0$ ,  $x \geq y \geq z > 0$ . Máme teda

$$\max(a, b, c) = a, \quad \max(x, y, z) = x, \quad \min(a, b, c) = c, \quad \min(x, y, z) = z.$$

Uvažujme polynómy

$$p(t) = (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc,$$

$$q(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz.$$

Odčítáním a využitím rovností spomínaných v zadaní dostávame

$$p(t) - q(t) = (ab + bc + ca - xy - yz - zx)t.$$

Označme  $k = (ab + bc + ca - xy - yz - zx)$ . Pretože  $a$  je kladné a najväčšie z našej šestice čísel a zároveň koreň polynómu  $p$ , tak po dosadení do polynómov máme  $q(a) \geq 0$  a  $p(a) = 0$ . Potom

$$ka = p(a) - q(a) \leq 0,$$

z čoho dostávame  $k \leq 0$ .

Ďalej pre spor predpokladajme  $c < z$ . Potom je  $c$  najmenšie z našej šestice čísel. Vieme, že je kladné a je koreňom polynómu  $p$ . Dosadíme do polynómov a máme  $q(c) < 0$  a  $p(c) = 0$ . Z toho dostávame

$$kc = p(c) - q(c) > 0,$$

a teda  $k > 0$ , čo je spor. Platí preto  $c \geq z$ , čiže  $\min(a, b, c) = c \geq \min(x, y, z) = z$ .

POZNÁMKY:

Väčšina správnych riešení sa inšpirovala názvom série a zostrojila si vyššie spomínané polynómy. Ďalej sa už postupy líšili, niektoré boli elegantné, iné viac krkolomné, ale nakoniec prišli do cieľa. Tí, ktorí polynómy nenašli, sa snažili z podmienok o súčte a súčine vyjadriť niektoré premenné, ale len málokedy sa im úlohu podarilo vyriešiť. (Marta Kossaczka)

### Úloha 7.

(12; 6; 2,50; 2,5)

Najdzte všetky polynómy, jejichž koeficienty jsou pouze 1 nebo  $-1$ , takové, že je lze rozložit na součin lineárních polynómů s reálnými koeficienty. (Kuba Krásenský)

ŘEŠENÍ:

Nechť polynom má stupeň  $n$  s reálnými kořeny  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Zavedeme následující značení:

$$A = \sum_{i=1}^n x_i \quad B = \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j \quad C = \prod_{i=1}^n x_i \quad D = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Podle zadání a Viětových vztahů víme, že  $A, B, C$  se rovnají 1 nebo  $-1$ . Navíc platí

$$1 = A^2 = D + 2B,$$

což znamená, že  $B$  je záporný, protože  $D$ , součet čtverců, nabývá pouze nezáporných hodnot, tudíž  $B = -1$  a  $D = 3$ . Nyní použijeme AG nerovnost:

$$3 = D = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq n \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2} = n \sqrt[n]{C^2} = n$$

Stačí se tedy zaměřit na polynomy stupně nejvýše 3. Pro  $n = 1, 2$  snadno vyzkoušíme všechny možnosti. Můžeme si pomoci předpokladem, že vedoucí koeficient je 1, protože jinak se dá polynom vynásobit  $-1$ .

V případě  $n = 3$  si všimneme, že musí nastat v AG nerovnosti rovnost, tedy  $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$ . Součin těchto tří kořenů je  $\pm 1$ , a proto každý z nich je 1 nebo  $-1$ . Navíc platí, že  $B = -1$ , a proto všechny nemůžou mít stejné znaménko. Nakonec nám zůstanou kandidáti  $(x-1)(x+1)(x+1)$  a  $(x-1)(x-1)(x+1)$ , které ověříme roznásobováním.

Hledané polynómy jsou tedy

$$\begin{array}{lll} x+1, & x^2+x-1, & x^3+x^2-x-1, \\ x-1, & -x^2-x+1, & -x^3-x^2+x+1, \\ -x+1, & x^2-x-1, & x^3-x^2-x+1, \\ -x-1, & -x^2+x+1, & -x^3+x^2+x-1. \end{array}$$



POZNÁMKY:

Kombinace Viětových vztahů a AG nerovnosti byla dosti trikovaná, a proto přišlo pouze málo správných řešení. Někteří se snažili dokázat, že kořeny hledaných polynomů musí být 1 nebo  $-1$ , což nemusí platit: uvažme například  $x^2 + x - 1$ . Nesmíme také zapomenout, že nalezením horní meze pro stupeň polynomu úloha ještě nekončí, protože přímočaré ověření, které kubické polynomy vyhovují, je velice pracné a zdlouhavé. Řešitelům, kteří si všimli rovnosti v AG odhadu, jsem udělil imaginární bod.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

## Úloha 8.

(4; 2; 2,50; 2,5)

Je dána funkce  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  taková, že pro libovolná různá celá  $k, l$  platí  $k - l \mid f(k) - f(l)$ . Navíc existuje polynom  $P(x)$  takový, že  $|f(k)| < P(k)$  pro každé celé  $k$ . Dokažte, že existuje polynom  $Q(x)$  takový, že  $Q(k) = f(k)$  pro všechna celá  $k$ .

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Ukážeme, že pro funkci  $g(n) = f(n) - f(0)$  existuje polynom  $Q$ , který je jí roven. Poté bude existovat také pro funkci  $f$ , neboť ta je pouze posunutá o konstantu. Dle zadání  $n - 0 \mid f(n) - f(0)$ , z čehož plyne, že  $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , navíc pro každá dvě různá celá čísla  $k, l$  platí

$$k - l \mid f(k) - f(l) = (f(k) - f(0)) - (f(l) - f(0)) = g(k) - g(l).$$

Označme  $d$  stupeň polynomu  $P$ . Existuje právě jeden<sup>3</sup> polynom  $Q$  stupně nejvýše  $d$  takový, že  $g(n) = Q(n)$  pro  $n = 1, 2, \dots, d + 1$ . Dále ukážeme, že  $g(z) = Q(z)$  pro všechna celá čísla  $z$ . Mějme libovolné  $n \geq 2(d + 1)$ . Koeficienty polynomu  $Q$  jsou vždy racionální čísla (protože funkce  $g$  nabývá pouze celočíselných hodnot) a můžeme najít nejmenší společný násobek jejich jmenovatelů  $M$ . Označme polynom  $R(x) = M \cdot Q(x)$ , což je jistě polynom s celočíselnými koeficienty. Pro každé  $k = 1, 2, \dots, d + 1$  je

$$M \cdot (g(n) - Q(n)) = M \cdot (g(n) - g(k)) - (R(n) - R(k))$$

dělitelné<sup>4</sup>  $n - k$ . Z toho plyne

$$M \cdot (g(n) - Q(n)) \equiv 0 \pmod{\text{nsn}(n - 1, n - 2, \dots, n - d - 1)}.$$

Dále ukážeme, že to pro dostatečně velké  $n$  už musí nastat rovnost  $g(n) = Q(n)$ . Obě funkce  $g(n)$  a  $Q(n)$  jsou omezeny polynomem stupně  $d$ , a proto  $M \cdot (g(n) - Q(n))$  je také shora omezeno nějakým polynomem stupně  $d$ . Dokažeme, že nejmenší společný násobek uvedených čísel je zdola omezen polynomem stupně  $d + 1$ . Všimněme si, že  $\text{nsn}$  jakýchkoliv čísel je alespoň jejich součin dělený největším společným dělitelem každé dvojice. Protože největší společný dělitel čísel  $n$  a  $k$  může být nejvýše roven jejich rozdílu, dostáváme následující odhad

$$\begin{aligned} \text{nsn}(n - 1, n - 2, \dots, n - d - 1) &\geq \frac{(n - 1)(n - 2) \cdots (n - d - 1)}{d^{\binom{d+1}{2}}} \geq \\ &\geq \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2}}{d^{\binom{d+1}{2}}} \geq n^{d+1} \cdot \frac{1}{2^{d+1} \cdot d^{\binom{d+1}{2}}} = Cn^{d+1}, \end{aligned}$$

kde  $C$  je nějaká kladná konstanta nezávislá na  $n$ .

<sup>3</sup>Pokud o tom slyšíš poprvé, zkus si vyhledat heslo Lagrangeova interpolace.

<sup>4</sup>Využíváme toho, že pro polynom s celočíselnými koeficienty  $R$  platí  $n - k \mid R(n) - R(k)$  (viz úvodní text k této sérii).

Pro dostatečně velké  $n$  již nutně

$$|M \cdot (g(n) - Q(n))| < nsn(n-1, \dots, n-d-1),$$

a proto  $g(n) = Q(n)$ . Tvrzení zbývá ukázat pro ostatní celá čísla. Mějme libovonné celé číslo  $z$ . Pro nekonečně mnoho dostatečně velkých  $n$  platí, že

$$M \cdot (g(z) - Q(z)) = M \cdot (g(z) - g(n)) - (R(z) - R(n))$$

je dělitelné  $z - n$ , z čehož již nutně plyne rovnost  $g(z) = Q(z)$  pro všechna celá čísla  $z$ .

POZNÁMKY:

Přišla pouze čtyři řešení a polovina z nich byla správná. Jejich hlavní myšlenka byla stejná jako v uvedeném řešení. (Filip Hlásek)

# Hvězdy a souhvězdí

3. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

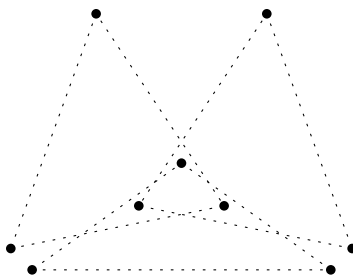
(65; 35; 2,00; 2,0)

Na hvězdné obloze existují tři souhvězdí, z nichž každé je tvořeno trojicí hvězd (každá hvězda patří pouze do jednoho souhvězdí). Víme, že uvnitř každého ze tří trojúhelníků (suhvězdí) najdeme z libovolného jiného souhvězdí právě jednu hvězdu. Nakreslete nějaké možné rozmístění těchto devíti hvězd na obloze.

(Filip Hlásek)

ŘEŠENÍ:

Tato úloha byla typu „nalezni obrázek“, jedním ze správných řešení je toto:



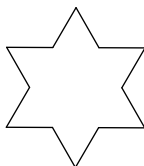
POZNÁMKY:

Úloha byla velmi jednoduchá, ale našla se velká spousta lidí, kteří si špatně vyložili frázi „z libovolného souhvězdí“. Tato fráze neznamená, že stačí vybrat jedno souhvězdí. Znamená, že ať už si vybereme jakékoliv, tak vlastnost platí. Lze si to představit tak, že se soupeřem hrajeme hru a souhvězdí nám vybírá on (a to tak, aby to pro nás bylo co nejtěžší). (Honza Krejčí)

## Úloha 2.

(58; 48; 2,50; 3,0)

David se rozhodl vydláždít celou rovinu pomocí Davidových hvězd (viz obrázek).



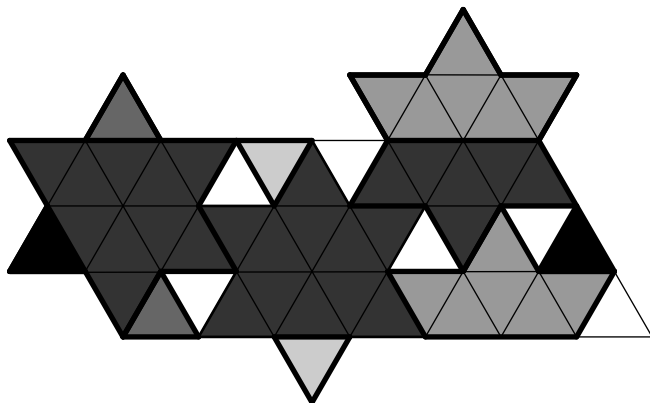
Brzy ale zjistil, že se mu nedaří klást je vedle sebe tak, aby nevznikaly mezery. Proto některé z dosud nepoložených dlaždiček rozlámal, každou na dvanáct stejných rovnostranných trojúhelníků. Těmi chtěl své dláždění doplnit tak, aby byla pokrytá celá rovina, aby se žádné dlaždice nepřekrývaly a zároveň aby spolu žádné dva trojúhelníky nesousedily hranou. Mohlo se mu to podařit?

(Kuba Krásenský)

ŘEŠENÍ (PODLE LUCIENA ŠÍMY):

Umístíme vedle sebe podle zadání čtyři Davidovy hvězdy (na obrázku je jedna useklá v polovině, dalším třem z rovnoběžníku přesahuje cíp). Pak si všimneme, že pokud ohraničíme rovnoběžník o stranách délky sedm a tři trojúhelníčky, mohou na sebe tyto čtyřúhelníky snadno navazovat. Z obrázku je vidět, že při umísťování dalšího rovnoběžníku se překryjí části označené stejnou barvou. Proto bude umístění hvězd a trojúhelníků stále vyhovovat podmínkám.

Rovnoběžníky pak už jasně vydláždí celou rovinu.



POZNÁMKY:

Úloha byla snadná na dokázání obrázkem, s čímž se většinou řešitelé spokojili. Vzhledem k bodovému ohodnocení úlohy mi dostatečně názorný obrázek stačil. Slovní vysvětlení ale nikdy neuškodí, proto bych chtěla pochválit ty, kteří si dali tu práci a popsali své úvahy. Špatných řešení bylo málo a všechny z jediného důvodu, a to vynechání informace ze zadání. Jestliže se dva trojúhelníky nemají dotýkat hranou, tak opravdu nelze uznat řešení, jehož postup je na dvou takových trojúhelnících přímo založen. Čtete zadání pořádně!

(Bára Kociánová)

### Úloha 3.

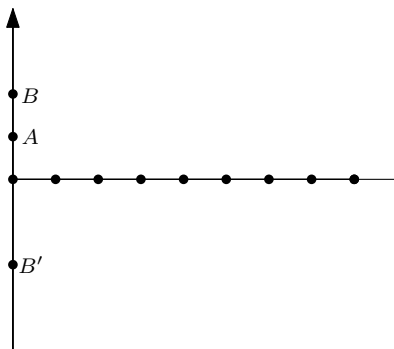
(47; 37; 2,40; 3,0)

Honza měl na své hvězdné mapě sto hvězd a změřil vzdálenost mezi každými dvěma z nich. Pak se rozhodl, že dá Tomášovi hádanku, a prozradil mu všechny vzdálenosti, které změřil, až na jednu. Prozradil mu i to, ke které dvojici hvězd patří která vzdálenost. Tomášovým úkolem bylo uhodnout zbývající vzdálenost. Po dlouhém uvažování Tomáš zjistil, že hledanou vzdálenost není schopen určit jednoznačně. Jak se to mohlo stát?

(Mirek Olšák)

ŘEŠENÍ:

Stačí najít dvě rozmístění hvězd, která mají stejné všechny vzdálenosti kromě jedné. Uvažme tedy následující rozmístění v rovině: 98 hvězd bude v bodech  $[i, 0]$ , kde  $0 \leq i \leq 97$ , hvězda  $A$  bude v bodě  $[0, 1]$  a hvězda  $B$  bude v bodě  $[0, 2]$ . Ve druhém rozmístění pouze změníme polohu hvězdy  $B$ , a to tak, že ji dáme do bodu  $[0, -2]$ . Její vzdálenost od žádné z 98 hvězd na přímce se nezmění a stejně tak se nezmění vzdálenosti ostatních hvězd, které jsme nechali na místě. Rozdíl je tedy pouze ve vzdálenosti  $|AB|$ , což jsme chtěli.



POZNÁMKY:

V zadání nebylo uvedeno, že hvězdy musejí být různé, takže došlo několik řešení, kde bylo 98 hvězd v jednom bodě. Někteří řešitelé se pokusili úlohu zjednodušit tím, že uvažovali pouze čtyři hvězdy a ukázali, že při postupném kreslení jim na konci zbydou dva různé body pro umístění poslední hvězdy. To se však při větším počtu hvězd obecně nestane, protože jde o průsečík více než dvou kružnic. Naprostá většina ostatních řešení byla správně. (Martin Čech)

#### Úloha 4.

(38; 32; 3,82; 5,0)

V Mléčné dráze se nachází konečný počet hvězd. Dokažte, že umíme najít šest takových, že když uvažujeme šestici kružnic procházejících Zemí se středy v příslušných hvězdách, bude každá hvězda Mléčné dráhy ležet uvnitř některé kružnice.

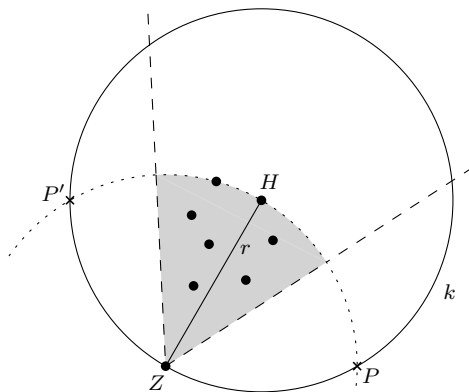
(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Zvolme tři přímky procházející Zemí tak, aby svíraly po dvou úhel  $60^\circ$  a navíc žádná z nich neprocházela hvězdou (což lze, neboť hvězd je konečně mnoho). Tím se Mléčná dráha rozdělí na šest shodných úhlů s vrcholem v Zemi. V každém z úhlů obsahujícím aspoň jednu hvězdu vybereme nějakou hvězdu mající maximální vzdálenost od Země. Dokážeme, že takto vybrané hvězdy splňují podmínku ze zadání.

Vezměme si jeden z úhlů  $U$  a uvažujme nyní pouze hvězdy ležící v něm. Označme  $H$  vybranou hvězdu,  $Z$  Zemí a  $r$  vzdálenost  $H$  od  $Z$ , dále  $k$  kružnici se středem  $H$  procházející bodem  $Z$ . Chceme ukázat, že všechny hvězdy z  $U$  leží uvnitř  $k$ . Zkontruujeme ještě kružnici se středem  $Z$  procházející  $H$  a její průsečíky s  $k$  nazveme  $P, P'$ . Platí, že  $|\angle HZP| = |\angle HZP'| = 60^\circ$ , neboť obě kružnice mají stejný poloměr. Úsečka  $ZH$  svírá s rameny  $U$  úhel ostře menší než  $60^\circ$ , takže  $P$  a  $P'$  leží vně  $U$ . Vidíme tedy, že celá kruhová výseč<sup>5</sup> se středem  $Z$  a poloměrem  $r$  určená úhlem  $U$  leží uvnitř  $k$ . Ale v této výseči leží všechny hvězdy (neboť leží v úhlu  $U$  a zároveň mají od Země vzdálenost maximálně  $r$ ), a tedy všechny leží i uvnitř  $k$ .

<sup>5</sup>Přesněji celá výseč kromě bodu  $Z$ .



Kružnice kolem vybrané hvězdy

Vzali jsme libovolný z úhlů a ukázali, že všechny v něm ležící hvězdy leží uvnitř některé ze zkonstruovaných kružnic. Jelikož těchto šest úhlů dává dohromady celou rovinu, tak všechny hvězdy leží uvnitř nějaké kružnice.

POZNÁMKY:

Převážná část správných řešení používala stejnou konstrukci. Drobným úskalím často bylo neuvažování krajních případů, kdy nějaká hvězda leží na kružnici (a tedy ne uvnitř ní). Za to jsem ale body nestrhával. (Vzorové řešení se tomuto vyhnulo zvolením dělicích přímk tak, aby neprocházely hvězdami).

Pozorný čtenář si jistě všiml, že pokud byl některý úhel prázdný, vybrali jsme hvězd méně než šest. A několik pozorných řešitelů upozorňovalo na to, že pokud je hvězd v Mléčné dráze pět a méně, tak jich dokonce ani šest vybrat nelze. Což je samozřejmě pravda, v zadání úlohy měl být požadavek vybrat *maximálně* šest hvězd, nikoli právě šest. (Tonda Češík)

**Úloha 5.**

(8; 4; 2,13; 1,0)

Astronomové chtějí vybrat skupinu hvězd, které pojmenují po slavných matematicích. Každý astronom hlasuje pro deset hvězd a bude spokojen, když alespoň jedna z jeho navrhaných bude zvolena. Je známo, že pro každou šestici astronomů existuje dvojice hvězd, při jejímž zvolení bude všech šest astronomů spokojeno. Dokažte, že lze zvolit skupinu o deseti hvězdách tak, aby byli spokojeni všichni astronomové.

(Martin Töpfer)

ŘEŠENÍ:

Pro nejvýše 10 astronomů taková volba triviálně existuje, dále pro zamezení nejasnostem požadujeme alespoň deset astronomů.

Pokud existuje nějaký astronom, který má s každým zbylým společnou preferenci, tak zvolíme právě jeho desítku a jsme hotovi.

Pokud žádný takový neexistuje, tak zvolíme náhodného astronoma  $A$  a k němu astronoma  $B$ , který s  $A$  nemá žádnou společnou preferenci. Kdyby existoval nějaký astronom  $C$ , který nemá společnou preferenci ani s  $A$  ani s  $B$ , šestice obsahující astronomy  $A, B, C$  by nešla uspokojit dvěma hvězdami. Každý další astronom má proto společnou preferenci s  $A$  nebo s  $B$  (nebo s oběma zároveň), proto zvolením všech preferencí  $A$  i  $B$  uspokojíme všechny astronomy.

Rozdělme množinu hvězd, pro které hlasoval astronom  $A$  (resp.  $B$ ), na dvě disjunktní pěti-prvkové množiny  $A_1$  a  $A_2$  (resp.  $B_1$  a  $B_2$ ). Nyní sporem ukážeme, že jedna z množin  $A_1 \cup B_1$ ,

$A_1 \cup B_2$ ,  $A_2 \cup B_1$  nebo  $A_2 \cup B_1$  uspokojí všechny astronomy. Pro spor předpokládejme, že žádná z těchto čtyř desetiprvkových množin nevyhovuje. To znamená, že pro každou z těchto množin existuje astronom, jehož volba se ani v jedné hvězdě neshoduje s danou množinou. Označme tyto astronomy po řadě  $C$ ,  $D$ ,  $E$  a  $F$ . Podle zadání by šestici astronomů  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  a  $F$  měly uspokojit dvě hvězdy. Aby byli spokojeni astronomové  $A$  a  $B$ , musí být jedna hvězda v  $A_1$  nebo  $A_2$  a druhá v  $B_1$  nebo  $B_2$ . Vyzkoušením čtyř možností, v jakých množinách mohou být dané dvě hvězdy, dostaneme, že takovouto šestici astronomů nedokážeme dvěma hvězdami uspokojit. Dostáváme spor, a tedy jedna z množin  $A_1 \cup B_1$ ,  $A_1 \cup B_2$ ,  $A_2 \cup B_1$ ,  $A_2 \cup B_1$  uspokojí všechny astronomy.

POZNÁMKY:

Ukázalo se, že úloha byla velmi obtížná. Sice pro její vyřešení nebylo potřeba žádných nestandardních znalostí, ale trik s rozdělením na čtyři množiny hvězd byl na pátou úlohu asi přeci jen příliš složitý. (Martin Töpfer)

## Úloha 6.

(22; 6; 1,36; 0,0)

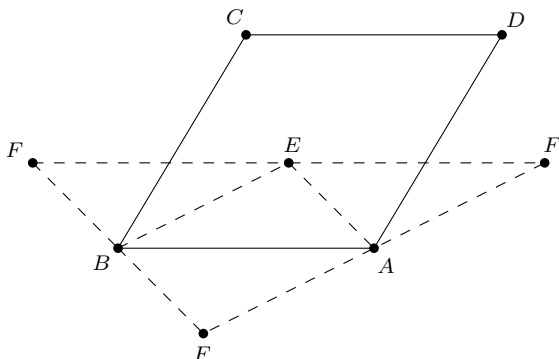
Galaxii s konečným počtem hvězd nazveme *pravidelnou*, pokud pro každé tři její hvězdy existuje hvězda, která spolu s nimi tvoří nedegenerovaný rovnoběžník<sup>6</sup>. Najděte všechny možné počty hvězd pravidelné galaxie. (Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Žádné tři hvězdy nesmějí ležet na jedné přímce, protože by neexistovala čtvrtá hvězda, která by s nimi tvořila nedegenerovaný čtyřúhelník.

Ukážeme, že jediná možná řešení jsou 1, 2 a 4. Pro každé souhvězdí s jedním nebo dvěma hvězdami podmínka platí triviálně. V souhvězdí se čtyřmi hvězdami stačí umístit hvězdy do vrcholů rovnoběžníka. Dále je zřejmé, že souhvězdí se třemi hvězdami nemůže splňovat podmínku v zadání.

Uvažujme souhvězdí s více než 4 hvězdami a vyberme tři hvězdy  $A$ ,  $B$ ,  $C$  takové, že trojúhelník  $ABC$  má největší obsah. K těmto třem bodům můžeme najít bod  $D$ , aby  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  tvořily rovnoběžník  $r$ , bez újmy a obecnosti leží  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  na obvodu  $r$  v tomto pořadí (jinak zpřeházíme značení bodů  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ). Pak každý trojúhelník s vrcholy v těchto čtyřech bodech má největší obsah. Díky předpokládané velikosti souhvězdí existuje ještě bod  $E$ . Víme, že obsahy  $\triangle EAB$  a  $\triangle ECD$  jsou menší než obsah trojúhelníků s vrcholy v rovnoběžníku  $r$ , a proto bod  $E$  leží mezi přímkami  $AB$  a  $CD$ . Analogicky  $E$  leží mezi přímkami  $AD$  a  $BC$ .



<sup>6</sup>Tím myslíme rovnoběžník s nenulovým obsahem.

K  $A, B, E$  môžeme nájsť bod  $F$  takový, že tyto čtyri body tvorí rovnobežník. Pro dané body  $A, B, E$  existujú tri možné polohy bodu  $F$ , pričomž všetky ležia mimo rovnobežník  $r$ , což je spor. Pravidelné souhvězdí s více než 4 hvězdami tedy neexistuje.

POZNÁMKY:

Kromě pár řešení se stejnou myšlenkou jako ve vzorovém se drtivá většina snažila dokázat, že pokud máme víc než 4 hvězdy, pak vždy musíme přidat další hvězdy, aby podmínka o rovnoběžnících byla zachována, nebo eventuálně se objeví tři kolineární body. Bohužel se jen několika z nich podařilo mě přesvědčit, protože není vůbec jasné, proč proces přidání bodů nemůže skončit po konečně mnoha krocích.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

## Úloha 7.

(12; 7; 2,67; 3,0)

Každá hvězda má nějakou svítivost. Rovinné souhvězdí se nazývá *ostré*, pokud žádné jeho tři hvězdy neleží v přímce a žádné jeho tři jeho hvězdy se stejnými ani s po dvou různými hodnotami svítivosti netvoří tupouhlý trojúhelník. Kolik nejvíce hvězd může ostré souhvězdí mít?

(Honza Krejčí)

ŘEŠENÍ:

Najprv ukážeme, že ak máme 4 hviezdy s rovnakými svietivosťami (resp. po dvoch rôznych), tak musia tieto 4 hviezdy tvoríť obdĺžnik. Podľa zadania nemôžu žiadne tri ležať na priamke, a teda musia tvoríť nejaký štvoruholník. Ak je konvexný, tak vzhľadom na to, že súčet vnútorných uhlov je  $360^\circ$ , musí to byť obdĺžnik, inak jeden z vnútorných uhlov bude tupý, a teda bude existovať tupouhlý trojuholník. Ak by bol nekonvexný, tak jeden vrchol (ozn.  $A$ ) je vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými tromi (ozn.  $BCD$ ). Vieme, že:

$$360^\circ = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB,$$

a teda by tam zase bol tupouhlý trojuholník.

Teraz dokážeme, že nemôže byť 5 hviezd s rovnakou alebo po dvoch rôznou svietivosťou. Pre spor predpokladajme, že máme 5 takýchto hviezd. Označme ich  $A, B, C, D, E$ . Podľa predošlého pozorovania vieme, že body  $A, B, C, D$  aj  $A, B, C, E$  tvoria obdĺžnik. A teda  $D = E$ , čo je spor. Takže môžu byť maximálne 4 rôzne svietivosti a 4 hviezdy jednej svietivosti.

Ďalej ukážeme, že ak by boli v súhvezdí 4 rôzne svietivosti, tak toto súhvezdie môže mať maximálne 4 hviezdy. Pre spor predpokladajme, že máme 5 hviezd. Označme ich  $A, B, C, D, E$  tak, aby  $A, B, C, D$  mali rôzne svietivosti a  $E$  rovnakú ako  $D$ . Podľa prvého pozorovania vieme, že body  $A, B, C, D$  aj  $A, B, C, E$  tvoria obdĺžnik. A teda  $D = E$  a máme len 4 body.

V ostrom súhvezdí teda nemôže byť viac ako 12 hviezd (3 rôzne svietivosti, z každej 4 hviezdy). Dokážeme, že ostré súhvezdie s 12 hviezdami naozaj môže existovať. Zostrojíme ho. Uvažujme rovnostranný trojuholník  $A, B, C$  so stranami o dĺžke 100. Okolo každého z vrcholov umiestnime štyri hviezdy ( $A_1, A_2, A_3, A_4$ , resp.  $B_1, B_2, B_3, B_4$ , resp.  $\dots$ ) s rovnakou svietivosťou (odlišnou ako štvorice pri zvyšných vrchoch) tak, aby tieto štyri tvorili štvorec s uhlopriečkou 2 a stredom v danom vrchole. Overíme, že súhvezdie tvorené hviezdami  $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4, C_1, \dots, C_4$ , je ostré. Je zrejmé, že žiadne tri hviezdy s rovnakou alebo po dvoch rôznou svietivosťou neležia na priamke. Ďalej, hviezdy s rovnakou svietivosťou tvoria iba pravouhlé trojuholníky. Ukážeme, že vzdialenosť dvoch hviezd s rôznou svietivosťou je aspoň 98 a najviac 102. BÚNO uvažujme  $A_1, B_1$ . Podľa trojuholníkových nerovností máme

$$|A_1B_1| \leq |A_1A| + |AB| = 101, \text{ teda}$$

$$|A_1B_1| \leq |A_1B| + |B_1B| \leq 102 \text{ a } |AB| \leq |A_1A| + |A_1B| \text{ a } |A_1B| \leq |A_1B_1| + |B_1B|,$$

teda  $99 \leq |A_1B|$ , a preto  $98 \leq |A_1B_1|$ . Takže strany trojuholníka s vrcholmi rôznej svietivosti sú všetky minimálne 98 a maximálne 102. Takýto trojuholník zrejme nemôže byť tupouhlý (podľa kosínusovej vety). Takže naše súhvezdie je naozaj ostré s 12 hviezdami.



POZNÁMKY:

Riešení bolo pomerne málo, správnych ešte menej. Každý, kto sa k číslu 12 dopracoval, mal celý dôkaz v podstate dobre. Ostatní zadanie buď nepochopili, nevedomili si, že trojuholníky môžu byť aj pravouhlé, alebo iba prišli k zlému menšiemu číslu. (Marta Kossaczká)

## Úloha 8.

(15; 4; 1,20; 0,0)

Jupiter a Mars trávi nedelnú odpoledne hraním her. Jupiter pripraví 2000 hviezd a medzi každými dvoma most. Jupiter začína a oba sa striedajú v tazích. Ve svojom tahu Jupiter smaže jeden most, kdežto Mars dva alebo tri. Prohraje ten, ktorý po svojom tahu niekajou hviezdou izoluje (nevychází z ní žiadny most). Který z nich má vyhrávající strategii<sup>7</sup>?

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Most nazvěme *odebratelnyj*, pokud po jeho odebrání nezůstane izolovaná hvězda. Označme  $k$  velikost maximální možné množiny odebratelných mostů v určité fázi hry, všechny takové množiny si označme  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Na počátku je tedy  $k$  rovno

$$\binom{2000}{2} - 1000 = 1998000,$$

neboť na konci musí zbyť minimálně 1000 mostů spojujících dvojice hviezd. O tomto  $k$  dokážeme následující tvrzení:

**Tvrzení.** *Smazáním kteréhokoliv odebratelného mostu mezi libovolnými hviezdami sníží Jupiter  $k$  vždy o jedna nebo o dva.*

Zjevně se smazáním libovolného odebratelného mostu  $k$  sníží alespoň o jedničku. Mohou nastat následující dvě možnosti:

- (i) Když je smazaný most v nějaké maximální množině  $M_i$  odebratelných mostů, pak se  $k$  sníží právě o jedničku, neboť v  $M_i$  zůstane  $k - 1$  mostů.
- (ii) Jinak tento most neleží v žádné takové množině. Odebráním všech mostů libovolné z těchto množin (BÚNO  $M_1$ ) zůstane alespoň jedna z hviezd  $A$  nebo  $B$ , které smazaný most spojoval, izolovaná (v opačném případě bychom odebrali  $k + 1$  odebratelných mostů, což by byl spor s definicí  $k$ ).

Jupiter sám tyto hvězdy neizoloval, tudíž mezi smazanými mosty z množiny  $M_1$  musel být alespoň pro jednu z hviezd  $A, B$  nějaký most z ní vycházející (jehož smazáním byla příslušná hvězda izolována). Pokud tedy onen most nebo dva ponecháme nesmazané (tj. smažeme jen  $k - 1$  nebo  $k - 2$  mostů), nedostaneme žádnou izolovanou hvězdu. Tudíž lze po libovolném Jupiterově tahu stále smazat alespoň  $k - 2$  mostů.

Pokud tedy Jupiter sníží svým tahem  $k$  o jedna, Mars smaže (například) z  $M_1$  libovolné tři mosty, pokud Jupiter sníží  $k$  o dva, Mars smaže z  $M_1$  libovolné dva mosty. V obou případech se po těchto dvou tazích celkem sníží  $k$  o čtyři. Jelikož na začátku je  $k$  dělitelné čtyřmi, bude Mars touto strategií dělitelnost  $k$  čtyřmi udržovat. Na konci hry tedy zbyde na Jupitera nula odebratelných mostů, a tudíž hru vyhraje Mars.

POZNÁMKY:

Byť osmička nepatřila v tomto ročníku k nejtěžším, správná řešení se sešla jen tři. Většina nesprávných řešení mylně předpokládala, že na konci hry musí vždy zůstat právě tisíc mostů, neboli se jich musí odebrat právě 1998000, což by znamenalo, že by Mars mohl mazat vždy právě dva mosty a vyhrál by.

<sup>7</sup>Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství nezávisle na tazích protihráče.

Došlá správná řešení byla založena na trochu jiné myšlence než řešení vzorové, a to na rozdělení hvězd do čtyř skupin po pěti stech a následně rozdělení mostů do skupinek podle toho, jaké typy hvězd spojují. Tyto skupinky vždy obsahovaly čtyři nebo šest mostů. V případě, že Jupiter odebral most z nějaké skupinky čtyř mostů, tak z ní Mars odebral další tři. Když Jupiter poprvé odebral most ze skupinky šesti mostů, smazal Mars dva, takže v ní zbyly tři; když z ní Jupiter odebral most podruhé, smazal Mars zbývající dva. Bohužel toto řešení vyžadovalo rozebrat poměrně velké množství případů, nicméně kroky vedoucí k jeho nalezení byly přímější než v řešení autorském. (Tomáš Novotný)

# Letem grafovým světem

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

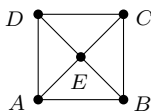
(20; 17; 4,00; 5,0)

Nalezněte souvislý permutační graf, jenž není intervalový ani bipartitní.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

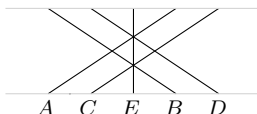
ŘEŠENÍ:

Ukažme, že zadání vyhovuje například graf na následujícím obrázku:



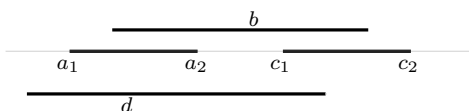
Graf  $G$

Ihned vidíme, že je souvislý, a snadno si též rozmyslíme, že je permutační. „Permutační“ reprezentace grafu  $G$  může vypadat takto:



Dále si všimneme, že graf  $G$  obsahuje kružnici na lichém počtu vrcholů – konkrétně  $CED$  – tedy podle věty 38 z prvního dílu seriálu není bipartitní. Stačí tak ukázat, že není ani intervalový. To dokážeme sporem.

Pro spor předpokládejme, že má intervalovou reprezentaci. Odebráním intervalu odpovídajícího vrcholu  $E$  bychom dostali intervalovou reprezentaci indukovaného podgrafu  $ABCD$ , takže i tento podgraf by byl intervalový. Ukážeme ale, že to není možné: Nechť úsečky  $a = (a_1, a_2)$  a  $c = (c_1, c_2)$  reprezentují po řadě vrcholy  $A$  a  $C$ . Protože mezi těmito vrcholy nevede hrana, jsou úsečky  $a$  a  $c$  disjunktní. BÚNO můžeme předpokládat, že  $a$  leží „nalevo“ od  $c$ . Pak ale úsečka  $b$  reprezentující vrchol  $B$  musí obsahovat nějaký bod  $z$  a i  $c$  (protože vrchol  $B$  je spojen hranou jak s vrcholem  $A$ , tak s vrcholem  $C$ ), tedy musí speciálně obsahovat bod  $a_2$ . Tentýž bod ale musí z obdobných důvodů obsahovat i úsečka  $d$  reprezentující vrchol  $D$ . Tím pádem ale úsečky  $b$  a  $d$  nejsou disjunktní. To je ve sporu s tím, že mezi vrcholy  $B$  a  $D$  nevede hrana.



Ilustrační obrázek

Tím jsme dokázali, že graf  $G$  není intervalový, a tedy vyhovuje zadání.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů si s úlohou poradila bez větších problémů, všechna řešení byla víceméně shodná se vzorovým a lišila se nanejvýš použitím jiného (ale podobného) grafu nebo nepatrně stručnější argumentací. Za to jsem samozřejmě body nestrhával, stejně tak jako za jistou drobnou chybu, které se dopustilo několik řešitelů. Ti tvrdili, že jejich graf má za podgraf  $C_4$ , a proto není intervalový. Problém je v tom, že těmto řešitelům vypadlo slovo „indukovaný“ – například graf  $K_4$  zjevně intervalový je, a přesto má  $C_4$  za (neindukovaný) podgraf.

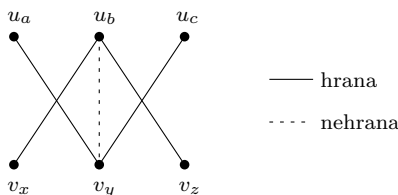
(Martin „E.T.“ Sýkora)

**Úloha 2.**

(5; 5; 4,60; 5,0)

Mějme bipartitní graf  $G$  s partitami  $U$  a  $V$ . Ukažte, že  $G$  umíme reprezentovat jako průnikový graf úseček pouze dvou různých směrů právě tehdy, když vrcholy lze očíslovat  $U = \{u_1, \dots, u_k\}$  a  $V = \{v_1, \dots, v_l\}$  tak, aby pro žádnou volbu  $1 \leq a < b < c \leq k$ ,  $1 \leq x < y < z \leq l$  nenastala situace na obrázku (zbylé dvojice mohou být propojeny libovolně). Jinými slovy, za předpokladu splnění uvedených nerovností platí implikace

$$\{u_a, v_y\}, \{u_c, v_y\}, \{u_b, v_x\}, \{u_b, v_z\} \in E \Rightarrow \{u_b, v_y\} \in E.$$



(Peter „π tr“ Korcsok)

ŘEŠENÍ:

Nejprve dokážeme, že graf se správným očíslováním vrcholů lze reprezentovat jako průnikový úseček dvou různých směrů. Uvažme jedno konkrétní očíslování vrcholů  $u_1, u_2, \dots, u_k$  a  $v_1, v_2, \dots, v_l$ . Vrchol  $u_i$  bude reprezentován vodorovnou úsečkou se souřadnicí  $y = i$ . Krajní body této úsečky budou odpovídat nejmenšímu, resp. největšímu indexu souseda vrcholu  $u_i$  vzhledem k očíslování vrcholů  $V$ . Například je-li vrchol  $u_4$  spojen s vrcholy  $v_2, v_7, v_9$ , bude reprezentován úsečkou s krajními body  $(2, 4)$  a  $(9, 4)$ . Analogicky budou vrcholy partity  $V$  reprezentovány svislými úsečkami. Vrcholy stupně maximálně jedna ale musíme vyřešit zvlášť: izolované vrcholy můžeme reprezentovat úsečkami nalevo od všech ostatních úseček, případně nad nimi; listy (vrcholy stupně jedna) jako krátké úsečky (například délky 0,5) kolem bodu, kterým mají procházet.

Zbývá ukázat, že popsaný průnikový graf obsahuje právě požadované hrany. Byla-li v  $G$  hrana  $\{u_i, v_j\}$ , určitě úsečka odpovídající  $u_i$  prochází souřadnicí  $x = j$  a podobně úsečka odpovídající  $v_j$  prochází souřadnicí  $y = i$ . Zmíněné úsečky se protínají v bodě  $(j, i)$  a v uvedeném průnikovém grafu mezi nimi bude hrana. Dále uvažujme, že mezi vrcholy  $u_i$  a  $v_j$  nebyla v  $G$  hrana. Pro spor předpokládejme, že v průnikovém grafu mezi nimi hrana je. Tato hrana musí odpovídat průsečíku příslušných úseček v bodě  $(j, i)$ . To znamená, že existují  $a, c, x, z$  takové, že

$$1 \leq a < i < c \leq k, \quad 1 \leq x < j < z \leq l$$

( $a, c, x, z$  mohou odpovídat krajním bodům úseček představujících vrcholy  $v_j, u_i$ ) a nastává zakázaná situace ze zadání (při  $b = i, y = j$ ). To je ve sporu s předpokladem a důkaz této části je hotov.

V druhé části důkazu ukážeme, jak očíslovat vrcholy grafu reprezentovaného jako průnikový graf úseček dvou různých směrů. Předpokládejme jednodušší situaci, kde všechny vrcholy odpovídající úsečkám v jednom směru musejí být z téže party<sup>8</sup>. Jednotlivé rovnoběžné úsečky očíslovujeme postupně ve směru jejich společné kolmice. Mějme nyní libovolné  $1 \leq a < b < c \leq k, 1 \leq x < y < z \leq l$  a necht' úsečka  $b$  se protíná s  $x$  a se  $z$  a zároveň  $y$  se protíná s  $a$  a s  $c$ . Potom se již nutně musí v našem uspořádání protínat také  $b$  s  $y$ .

Pro pořádek bychom měli ještě dokázat, že pokud má bipartitní graf reprezentaci pomocí úseček dvou směrů, pak má i takovou, kde navíc žádné dvě úsečky neleží na jedné přímce. Tuto část jsme ale nezamýšleli jako součást zadání a našli jsme pro ni jen poměrně dlouhý a ne moc hezký důkaz, proto ho tady neuvedeme. Za chybu se omlouváme. Ale máme pro Tebe nabídku: Můžeš toto tvrzení pojmout jako dobrovolné cvičení. Pokud autory seriálu přesvědčíš o tom, žeš ho vyřešil, a navíc budeš první, můžeš se těšit na čokoládu.

POZNÁMKY:

Úlohu odeslalo velice málo lidí, nejspíše kvůli děsivé znějícímu zadání. Na druhou stranu v podstatě všechna řešení byla správná, samotná úloha tedy tak náročná nebyla.

(Filip Hlásek)

### Úloha 3.

(6; 5; 4,17; 5,0)

Necht'  $G$  je doplněk intervalového grafu. Určete jeho barevnost, pokud víte, že velikost jeho největšího úplného podgrafu je  $n$ .<sup>9</sup>

(Peter „πtr“ Korcsok)

ŘEŠENÍ:

Zo zadania vieme, že graf  $G$  obsahuje úplný podgraf veľkosti  $n$  – automaticky teda potrebujeme aspoň  $n$  farieb. Ukážeme, že nám tento počet stačí.

Pretože  $G$  je doplnok intervalového grafu, môžeme si vrcholy predstavovať ako intervaly určitej priamky, pričom rovnakú farbu môžu dostať iba tie, ktoré majú neprázdny prienik. Bude sa nám hodiť označiť jeden „koniec“ tejto priamky ako ľavý a ten druhý ako pravý – potom budeme tvrdiť, že interval  $\langle a, b \rangle$  je „ostro vľavo“ od intervalu  $\langle c, d \rangle$ , pokiaľ platí  $b < c$ .

Vytvoríme množinu  $M_1$ , kam dáme všetky vrcholy, ktoré nemajú žiaden iný interval ostro vľavo. Každá dvojica z týchto intervalov sa musí nutne pretínať, teda ich môžeme všetky nafarbiť farbou 1 a ďalej ich už uvažovať nemusíme. Tento krok teraz budeme opakovať: ako množinu  $M_2$  označíme opäť všetky vrcholy, ktoré nemajú (v grafe  $G \setminus M_1$ ) žiaden interval ostro vľavo. Znovu platí, že sa každá dvojica intervalov v  $M_2$  musí pretínať, preto im môžeme dať farbu 2. Takto pokračujeme až do momentu, keď budú všetky vrcholy nafarbené. Dostaneme tak množiny  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Že ich je aspoň  $n$ , už vieme, ale prečo ich nebude viac?

Na to si stačí uvedomiť, že pre každý interval  $I$  z  $M_i$  existuje nejaký interval  $I'$  v  $M_{i-1}$ , ktorý je od neho ostro vľavo – inak by sme pri vytváraní množiny  $M_{i-1}$  zaradili aj interval  $I$ . Ak by sme teda potrebovali viac ako  $n$  množín, vieme postupne nájsť  $n+1$  navzájom disjunktných intervalov, čo je ale spor s veľkosťou najväčšieho úplného podgrafu.

<sup>8</sup>Bohužel nám ze zadání vypadl předpoklad, že žádné dvě úsečky neleží v jedné přímce. Naštěstí s tím ale všichni řešitelé počítali.

<sup>9</sup>Úplný podgraf je podgraf izomorfní úplnému grafu; graf může obsahovat více úplných podgrafů stejné velikosti.

## POZNÁMKY:

Väčšina z došlých riešení postupovala podobne, ako v našom riešení. *Jakub Löwit* sa ale rozhodol využiť znalosti z celého seriálu a existenciu ofarbenia s  $n$  farbami dokazoval pomocou Hallovej vety. Toto riešenie tiež funguje, ale je výrazne komplikovanejšie a dlhšie na napísanie.

(*Peter „π tr“ Korcsok*)

# Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

(40; 28; 2,38; 2,0)

(a) Anička obarvila každý z bodů roviny červeně, zeleně nebo modře, přičemž každou barvu použila alespoň jednou. Dokažte, že v této rovině existuje pravouhlý trojúhelník s různobarevnými vrcholy. (David Hruška)

(b) Bára obarvila každý bod ležící na obvodu rovnostranného trojúhelníka jednou ze dvou barev. Dokažte, že mezi nimi jsou tři stejně barevné vrcholy pravouhlého trojúhelníka. (Honza Krejčí)

ŘEŠENÍ:

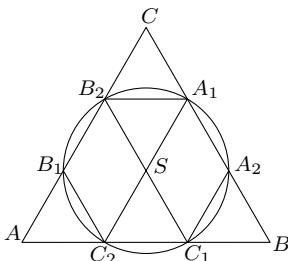
(a) Řešme tuto úlohu sporem a předpokládejme, že existuje takové obarvení roviny, že v něm nenajdeme trojbarevný pravouhlý trojúhelník.

Uvažme tři různobarevné body, které tvoří trojúhelník. Takovou trojici umíme najít vždy. Kdybychom našli pouze trojici různobarevných bodů na přímce, pak mimo přímku vybereme bod a ten se zbylými dvěma jinak obarvenými body tvoří pravouhlý trojúhelník.

V tomto trojúhelníku zakreslíme všechny výšky. Vzhledem k tomu, že v rovině dle předpokladu neexistuje trojbarevný pravouhlý trojúhelník, musí mít pata výšky stejnou barvu jako vrchol, ze kterého je vedena. Potom ovšem na žádné výšce již nemůže ležet bod jiné barvy, protože jinak by tento bod, pata výšky a jeden z krajních bodů strany, na kterou je výška kolmá, tvořily trojbarevný pravouhlý trojúhelník. Nicméně všechny výšky se protínají v jednom bodě, a ten má být tedy obarven třemi různými barvami najednou, což je spor.

(b) Na stranách trojúhelníka označíme body, které se nacházejí třetinu délky od vrcholu a sestrojíme z nich pravidelný šestiúhelník (jako na obrázku). Pro spor předpokládejme, že existuje obarvení, ve kterém nevznikne jednobarevný pravouhlý trojúhelník.

Nyní pokud by protilehlé vrcholy (říkáme jim  $P$  a  $Q$ ) šestiúhelníku byly obarveny stejnou barvou, pak všechny čtyři jeho zbývající vrcholy musejí být obarveny druhou barvou, protože leží na Thaletově kružnici nad úsečkou  $PQ$ . Nicméně libovolně 3 body z těchto čtyř tvoří pravouhlý trojúhelník. Proto pro každou dvojici protilehlých vrcholů šestiúhelníku platí, že každý z nich je obarven jinou barvou.



Šestiúhelník můžeme (až na symetrii) obarvit pouze dvěma způsoby: buď vybarvíme tři po sobě jdoucí vrcholy stejnou barvou, nebo je barvíme napřeskáčku (jeden vrchol jednou barvou, jeho sousedy druhou barvou). Není těžké si rozmyslet, že v obou případech najdeme stranu trojúhelníku, na které leží dva různobarevné body šestiúhelníku.

Zaměříme se na tyto různobarevné body na straně trojúhelníka. Bez újmy na obecnosti nechť to jsou body  $C_1$  a  $C_2$ . Úsečky  $C_1A_1$  a  $C_2B_2$  jsou kolmé na  $AB$  a navíc krajní body každé úsečky jsou obarvené stejně. Je to důsledek toho, že protilehlé body šestiúhelníku mají různou barvu. Nakonec vezmeme bod  $A$ , ten tvoří jednobarevný pravoúhlý trojúhelník s body  $C_1A_1$  nebo  $C_2B_2$ .

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správně. V některých případech se vyskytly nepřesnosti, například v části (a) několik řešitelů bez zdůvodnění předpokládalo, že vždy najde trojbarevný trojúhelník – tento fakt si zaslouží zdůvodnit. Docela závažnou chybou v (b) byly konstrukce, které se opíraly o to, že když si na jedné straně trojúhelníku zvolím interval a poté vedu kolmice krajními body tohoto intervalu, tak mi na straně nebo stranách vytnou interval „dvojnásobné délky“. Tedy když začnu s jednobarevným intervalem, pak ve „vytnutém“ intervalu nemůžu mít žádný bod první barvy. Poté iterací dojde ke sporu. Základní problém tohoto postupu je v tom, že se mi docela snadno může stát, že žádný jednobarevný interval nenajdu a potom řešení nefunguje.

(Honza Krejčí)

## Úloha 2.

(33; 29; 2,52; 2,0)

(a) Kružnice  $k$ ,  $l$  a  $m$  mají po dvou vnější dotyk, přičemž  $k$  a  $l$  se dotýkají v bodě  $Q$ . Přímky procházející bodem  $Q$  a zbylými dvěma body dotyku protínají kružnici  $m$  podruhé v bodech  $X$  a  $Y$ . Ukažte, že  $XY$  je její průměr.

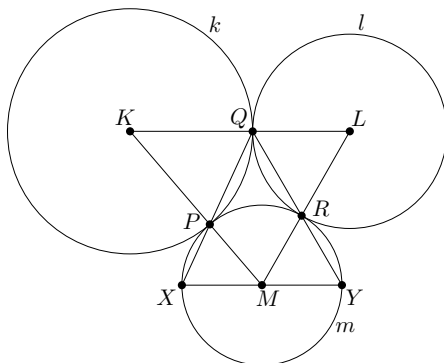
(Martina Vaváčková)

(b) Je dána kružnice  $k$  nad průměrem  $AB$  a body  $C$ ,  $D$  ležící na stejném oblouku  $AB$ . Průsečík tečen ke  $k$  v bodech  $C$  a  $D$  označme  $E$ , průsečík přímek  $AC$  a  $BD$  označme  $F$  a konečně nechť  $G$  značí průsečík přímek  $EF$  a  $AB$ . Dokažte, že body  $E$ ,  $C$ ,  $G$ ,  $D$  leží na jedné kružnici.

(Honza Krejčí)

ŘEŠENÍ:

(a) Označme  $K$ ,  $L$ , resp.  $M$  středy kružnic  $k$ ,  $l$ , resp.  $m$ . Dále nechť  $P$  a  $R$  jsou postupně body dotyku kružnic  $m$  a  $k$ , resp.  $m$  a  $l$ . Bod dotyku dvou kružnic je zároveň jejich střed stejnolehlosti se záporným koeficientem, tudíž bod  $P$  je střed stejnolehlosti, ve které se kružnice  $k$  zobrazí na kružnici  $m$ , tedy bod  $K$  na bod  $M$  a bod  $Q$  na bod  $X$ . Díky tomu platí  $KQ \parallel MX$ . Analogicky  $LQ \parallel MY$ , ale bod  $Q$  leží na přímce  $KL$ , a proto  $MX \parallel MY$ , navíc  $M$  leží na přímce  $XY$ , z čehož plyne, že  $XY$  je průměr.



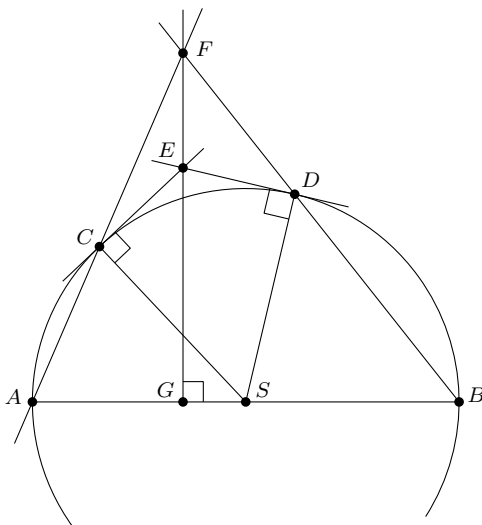


(a) PODLE TOMÁŠE KONEČNÉHO – VYUŽÍVAJÍCÍ KRUHOVOU INVERZI:

Uvažujme kruhovou inverzi se středem v bodě  $Q$  a takovým poloměrem, aby se zachovala kružnice  $m$ . Chceme totiž, aby řídicí kružnice byla kolmá na  $m$ . Rozmyslete si, že toho lze vždy dosáhnout. Obraz kružnice  $k$  je přímka dotýkající se kružnice  $m$ , přičemž jejich bod dotyku je obraz bodu  $P$ , tudíž se jedná o bod  $X$ . Analogicky se kružnice  $l$  zobrazí na přímku dotýkající se kružnice  $m$  v bodě  $Y$ . Kružnice  $k$  a  $l$  se dotýkají v  $Q$ , a proto jejich obrazy budou rovnoběžné přímky, z čehož plyne, že  $XY$  je průměr kružnice  $m$ .

(b) Nejprve vyšetříme případ, kdy  $A, C, D, B$  leží na kružnici v tomto pořadí, pak bod  $F$  bude ležet vně kružnice. Dále střed úsečky  $AB$  označme  $S$  a necht'  $|\sphericalangle BAF| = \alpha$ ,  $|\sphericalangle ABF| = \beta$ .

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle DAB| = \alpha - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 90^\circ.$$



Díky úsekovému úhlu u vrcholu  $C$  dostaneme

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle CAD| = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Totéž platí pro  $|\sphericalangle EDC|$ , tudíž

$$|\sphericalangle CED| = 360^\circ - 2(\alpha + \beta),$$

což je dvojnásobek  $|\sphericalangle CDF| = 180^\circ - \alpha - \beta$ , a proto uděláme-li kružnici se středem  $E$  a poloměrem  $EC$ , pak na téhle kružnici také leží bod  $D$ , protože dvě tečny z jednoho bodu mají stejnou délku, a také bod  $F$ . Trojúhelník  $CEF$  je tedy rovnoramenný se základnou  $CF$ .

$$|\sphericalangle CEF| = 2 \cdot |\sphericalangle CDF| = 2 \cdot (180^\circ - |\sphericalangle CDB|) = 2 \cdot |\sphericalangle CAB| = 2\alpha,$$

$$|\sphericalangle CFE| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle CEF|) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Bod  $G$  je tedy pata kolmice z  $E$  na  $AB$ . Poloměr kružnice je kolmý na tečnu v bodě dotyku, a proto všechny tři body  $G, C, D$  leží na Thaletově kružnici nad průměrem  $ES$ , z čehož plyne, že  $GCED$  je tětíivový čtyřúhelník.

Pokud pořadí bodů na kružnici je  $A, D, C, B$ , pak definujeme  $F' = AD \cap BC$ . Bod  $F$  je nyní orthocentrum trojúhelníka  $ABF'$ , kterým musí procházet i  $F'E$ , neboť jsme výše ukázali, že  $F'E$  je kolmá na  $AB$ . Bod  $G$  je tedy pořád pata kolmice z  $E$  na  $AB$ .

POZNÁMKY:

Drtivá většina řešitelů se vypořádala s částí (a) bez problému. V části (b) přišlo bohužel jen několik řešení. Klíčem bylo zjistit, že  $G$  je projekce bodu  $E$  na  $AB$ , což navádí k přikreslení středu průměru  $AB$ , poté stačí se orientovat v tětíkových čtyřúhelnících a chytře úhlit. V geometrických úlohách, kde se vyskytují průsečíky protějších stran nebo úhlopříček tětíkového čtyřúhelníka, se též dají uplatnit poláry a póly. Dá se dokázat, že všechny body  $E, F, F'$  leží na poláře průsečíku přímk  $AB$  a  $CD$ , která je kolmá na průměr  $AB$ .

(Anh Dung „Tonda“ Le)

**Úloha 3.**

(29; 21; 2,21; 2,0)

(a) Tonda dostal od Štěpána k narozeninám kartičky se všemi přirozenými čísly od 11111 do 99999. Sedl si ke stolu a nějak za sebe všechna čísla uspořádal, čímž mu vzniklo dlouhatánské číslo dělitelné číslem 11111. „To je ale náhoda!“ řekl si Tonda, ale Štěpán mu sebevědomě oponoval: „Žádná náhoda, to by se stalo při libovolném uspořádání kartiček.“ Dokažte, že měl Štěpán pravdu.

(Štěpán Šimsa)

(b) Tonda si pro každé  $n \in \{1, \dots, 2015\}$  označil  $p_n$  nejmenšího prvočíselného dělitele čísla  $n^8 + 1$  a chtěl spočítat jejich součet  $p_1 + p_2 + \dots + p_{2015}$ . Štěpán prohlásil, že s tím mu nepomůže, ale jako informatik dokáže určit poslední cifru tohoto součtu v šestnáctkové soustavě. Najděte ji dřív, než to Štěpán naprogramuje.

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

(a) Nejprve si všimneme, že

$$10^5 = 100000 = 11111 \cdot 9 + 1 \equiv 1 \pmod{11111},$$

umocněním této kongruence na libovolné přirozené číslo  $k$  dostaneme i  $10^{5k} \equiv 1 \pmod{11111}$ . Pokud za sebe v nějakém pořadí poskládáme čísla na kartičkách, dostaneme číslo  $n$ , které jde zapsat jako

$$n = a_0 + 10^5 a_1 + 10^{10} a_2 + \dots + 10^{5 \cdot 88888} \cdot a_{88888} \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{88888} \pmod{11111},$$

kde  $a_i$  jsou čísla na kartičkách. Z kongruence výše vidíme, že číslo  $n$  je dělitelné 11111 právě tehdy, když je součet čísel na všech kartičkách dělitelný 11111. Tonda však už jednou číslo dělitelné 11111 dostal, takže součet čísel na všech kartičkách opravdu 11111 dělitelný je, z čehož plyne, že ať za sebe kartičky poskládáme libovolně, bude vzniklé dlouhé číslo také vždycky dělitelné 11111.

(b) Zajímá nás zbytek součtu  $p_1 + \dots + p_{2015}$  po dělení 16. Pro lichá  $n$  je zřejmě  $p_n = 2$ , lichých čísel od 1 do 2015 je 1008, takže součet přes lichá  $n$  vyjde 2016, což je číslo dělitelné 16. Výsledek bude tedy kongruentní součtu  $p_n$  přes sudá  $n$ . Pro sudá  $n$  je  $p_n > 2$ , a tak ze zadání

$$n^8 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p_n}.$$

Umocněním této kongruence na druhou získáme

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{p_n}.$$

Z toho plyne, že řád<sup>10</sup> čísla  $n$  modulo  $p_n$  je 16 pro všechna sudá  $n$ . Protože  $p_n$  dělí  $n^8 + 1$  a  $p_n$  je prvočíslo, jsou čísla  $p_n$  a  $n$  nesoudělná a z Malé Fermatovy věty

$$n^{p_n-1} \equiv 1 \pmod{p_n}.$$

<sup>10</sup> Řád čísla  $n$  modulo  $p$  je nejmenší přirozené  $r$ , pro které  $n^r \equiv 1 \pmod{p}$ .

Kongruence  $n^k \equiv 1 \pmod{p_n}$  nastane právě tehdy, když řád čísla  $n$  modulo  $p_n$  dělí číslo  $k$ , v našem případě tak  $16 \mid p_n - 1$ , čili  $p_n \equiv 1 \pmod{16}$ . Protože sudých čísel od 1 do 2015 je 1007, dostáváme

$$p_1 + \dots + p_{2015} \equiv 1007 \equiv 15 \pmod{16}$$

a poslední cifra tohoto součtu v šestnáctkové soustavě je  $F$ .

POZNÁMKY:

S částí (a) si většina řešitelů poradila bez problémů. Bod jsem strhával těm, kteří pořádně (nebo vůbec) nezdůvodnili, že stačí ukázat dělitelnost součtu čísel na všech kartičkách číslem 11111. Naprostá většina řešitelů na konci řešení tento součet počítala, místo aby si ulehčila práci a prohlásila, že jeho dělitelnost číslem 11111 plyne ze zadání.

Za řešení části (b) si ti, kteří postupovali podle vzorového řešení, vybojovali imaginární bod – konkrétně jde o *Rada Švarce*, *Jana Jurku* a *Ondřeje Bínovského*. Zbylí řešitelé většinou sporem dokázali, že  $p_n$  musí být tvaru  $16k + 1$ , a jejich řešení byla mnohem delší. Většina špatných řešení tvrdila, že čísla tvaru  $n^8 + 1$  budou pro sudá  $n$  vždy prvočísla. To vůbec není pravda, zkuste si rozložit na součin číslo  $8^8 + 1$ .

Jestliže Ti něco ze vzorového řešení části (b) není jasné – například pokud jsi nikdy neslyšel, co je to řád prvku modulo nějaké číslo, nebo neznáš ono zmíněné známé tvrzení, doporučuji Ti podívat se do loňského seriálu o teorii čísel<sup>11</sup>. Tam určitě najdeš odpovědi na své otázky.

(Martin Čech)

## Úloha 4.

(39; 25; 2,00; 2,0)

(a) Reálné číslo  $x$  splňuje rovnost  $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ . Spočítejte hodnotu  $\sin 2x$ .

(David Hruška)

(b) Ukažte, že

$$\frac{2 \sin 2^\circ + 4 \sin 4^\circ + \dots + 180 \sin 180^\circ}{90} = \cotg 1^\circ.$$

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

(a) Zadanou rovnost upravíme pomocí platného vztahu  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  do tvaru

$$(\sin^2 x)(\sin x - 1) = (\cos^2 x)(1 - \cos x).$$

Levá strana je nekladná, pravá nezáporná, obě musí být tedy rovny nule. Vzhledem k tomu, že pro žádné  $x$  neplatí  $\sin x = \cos x = 1$ , je alespoň jedno z čísel  $\sin x$ ,  $\cos x$  nulové, a tedy  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$ .

(b) Pomocí identity  $\sin x = \sin(180^\circ - x)$  upravíme levou stranu posčítáním členů tvaru  $k \sin(k^\circ)$  a  $(180 - k) \sin(180^\circ - k^\circ)$ :

$$\frac{180 \sin 2^\circ + 180 \sin 4^\circ + \dots + 180 \sin(88^\circ) + 90 \sin 90^\circ}{90}.$$

Dále trikově rozšíříme:

$$\frac{2 \sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2 \sin 4^\circ \sin 1^\circ + \dots + 2 \sin(88^\circ \sin 1^\circ) + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

<sup>11</sup> [mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf](http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf)

a použijeme identitu  $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ , kterou snadno obdržíme ze součtového vzorce pro kosinus:

$$\frac{\cos(2^\circ - 1^\circ) - \cos(2^\circ + 1^\circ) + \cos(4^\circ - 1^\circ) + \dots - \cos(88^\circ + 1^\circ) + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ},$$

kde se skoro všechny členy odečtou a zbyde

$$\frac{\cos 1^\circ - \cos 89^\circ + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ - \sin 1^\circ + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \cotg 1^\circ,$$

což jsme měli dokázat.

POZNÁMKY:

Část (a) mnoho lidí „řešilo obrázkem“, tedy z grafu funkce  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$  vyčetli, že na intervalu  $[0, 2\pi)$  jsou jedinými řešeními rovnice  $f(x) = 1$  čísla  $0$  a  $\pi/2$ , pro která tvrzení úlohy platí. Takový postup ovšem není plnohodnotným řešením, protože graf jsme schopni pouze přibližně načrtnout a nemůže tedy sloužit jako podklad korektního důkazu. Dalo by se namítat, že moderní matematický software často umí řešit i složité rovnice přesně (tedy ne jen přibližně numericky), ale naše úlohy nejsou myšleny jako zábava pro počítače :-). Je samozřejmě v pořádku pomocí softwaru získat o úloze přehled, ověřit si nějakou domněnku. Potom je ale třeba vše pořádně dokázat. V těchto případech jsem s přihlédnutím k jednoduchosti úlohy a malému bodovému rozpětí uděloval nula bodů. S částí (b) nebyly velké problémy, kromě vzorového se vyskytla ještě řešení, která součet vyjádřila jako reálnou část částečného součtu geometrické posloupnosti komplexních jedniček  $e^{i \frac{2\pi}{90}}$ . (David Hruška)

### Úloha 5.

(30; 16; 1,63; 2,0)

(a) *Kolem kulatého stolu bylo před raubem přichystáno dvacet židlí. Papalášů však dorazilo více, než se čekalo, takže pak na každé židli seděli dva, a navíc byli každý z jiné politické strany. Situace byla prohlášena za neúnosnou a každou židli musel jeden člověk opustit. Mohli to vždy provést tak, aby pak dva spolustraníci nikdy neseděli na sousedních židličkách?* (David Hruška)

(b) *V PraSestánu mají poslanci dvou politických stran zajímavý způsob hlasování: ve sněmovně stojí řada  $n$  židlí a na ně si střídavě sedají poslanci těchto stran, ovšem tak, že nikdy nesmějí sedět dva poslanci stejné strany vedle sebe (aby si místo práce nepovídali). Pokud již některá ze stran nemůže usadit žádného svého poslance, prohrává tak toto hlasování. V závislosti na  $n$  určete, která ze stran (při optimálním postupu) hlasování vyhraje.* (Filip Hlásek)

ŘEŠENÍ:

(a) Rozebereme dva možné případy:

(i) Na židličkách se nacházejí zástupci alespoň tří stran. Potom tedy existuje taková dvojice sousedních židlí, že na nich sedí papaláši z alespoň tří různých stran. Označme si tyto židle čísla 20 a 1 (po směru hodinových ručiček). Posadme na židli 1 člena té politické strany, která není zastoupena na židli 20. Následně postupně usazujeme papaláše na židle po směru hodinových ručiček tak, aby platila zadaná podmínka (což vždy lze, neboť předchozí židli máme zakázanou pouze jednu politickou stranu, ale na aktuální židli si lze vybírat ze dvou). Takto postupně rozesadíme papaláše na všechny židle, musíme ovšem zkontrolovat, zda na židličkách 20 a 1 nesedí zástupci stejných stran. To se ale stát nemůže, neboť jsme na začátku vybrali na židli 1 člena té strany, která na židli 20 vůbec není zastoupena.

(ii) Pokud se na židličkách nacházejí papaláši pouze ze dvou stran, musejí být obě strany nutně zastoupeny na každé židli. V tom případě nám ovšem stačí posadit zástupce jedné strany na sudé a zástupce druhé strany na liché židle.

(b) Označme si začínající stranu jako  $A$  a druhou stranu jako  $B$ . Nejprve vyřešíme speciální případy:

Pokud  $n = 0$ , nemá  $A$  koho posadit, tudíž vyhraje  $B$ . Jestliže  $n = 1$ , pak naopak zjevně vyhraje  $A$ .

Pro zbylá  $n$  ukážeme, že vyhraje strana  $B$ . Nazvěme prvního usazeného politika ze strany  $A$  premiérem. Dále řekněme, že židle je  $k$ -důležitá, pokud je mezi ní a premiérem  $k - 1$  dalších židlí. Strana  $B$  tedy nejprve usadí svého poslance na jednu z krajních židlí, což vždy může, neboť  $A$  obsadila nejvýše jednu z nich. Poté bude strana  $B$  odpovídat na tahy strany  $A$  následovně:

Pokud strana  $A$  usadila politika na  $k$ -důležitou židli, pak strana  $B$  usadí svého člena na sousední  $(k - 1)$ -důležitou židli. Tento tah vždy může provést, neboť pokud by (pro spor) nemohla, tak by se na sousední  $(k - 1)$ - či  $(k - 2)$ -důležitě židli již musela nacházet strana  $B$  (strana  $A$  na  $(k - 1)$ -důležitě židli být nemůže, neboť by nemohla hrát na židli  $k$ -důležitou). Jelikož ale vždy, když sedí poslanec strany  $B$  na  $l$ -důležitě židli, sedí na sousední  $(l + 1)$ -důležitě židli poslanec strany  $A$ , případně tato židle neexistuje (byla-li to krajní), tak nový poslanec strany  $A$  se může posadit až na  $l + 3$ -důležitou židli. Tudíž na sousedních  $(l + 1)$ - a  $(l + 2)$ -důležitých židlích strana  $B$  poslance nemá, což je spor.

Po libovolném tahu strany  $A$  tedy dokáže strana  $B$  usadit svého poslance, má tudíž neprohrávající strategii. Ovšem jelikož je počet židlí konečný, musí po určité době hlasování vyhrát.

POZNÁMKY:

Obě úlohy byly docela pracné na důkladné promyšlení všech případů. I když se část (a) dala řešit více způsoby, většina správných řešení postupovala podobně jako ve vzoráku. V části (b) se ale bohužel sešla pouze dvě správná řešení. Ostatní řešitelé vyřešili pouze případ sudého  $n$ , kde stačilo hrát symetricky, zatímco pro lichá  $n$  jejich řešení nefungovalo. Těmto řešením jsem tedy za část (b) uděloval jen jeden bod. (Tomáš Novotný)

## Úloha 6.

(30; 26; 2,70; 2,0)

(a) Víme, že polynom  $x^2 - (a + b + c)x + (ab + bc + ca)$  nemá reálný kořen. Dokažte, že čísla  $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou všechna nenulová a mají stejné znaménko. (Kuba Krásenský)

(b) Polynom  $x^3 + ax^2 + bx + c$  má tři reálné kořeny a platí  $a + b + c \in (-2, 0)$ . Dokažte, že pak některý z kořenů leží v intervalu  $(0, 2)$ . (David Hruška)

ŘEŠENÍ:

(a) Pretože polynom nemá reálný kořen, jeho diskriminant je záporný:

$$(a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) < 0.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc &< 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc &< 4bc, \\ (b + c - a)^2 &< 4bc. \end{aligned}$$

Levá strana je zřejmě nezáporná, takže na to, aby platila nerovnost, musia mať  $b$  a  $c$  rovnaké znamienka (špeciálne musia byť nenulové). Analogicky sa dopracujeme k nerovnosti

$$(b + a - c)^2 < 4ab$$

a dostávame, že  $a$  a  $b$  sú nenulové a majú rovnaké znamienka. A teda všetky tri  $a, b, c$  majú rovnaké znamienka.

(b) Označme kořeny našeho polynómu  $r_1, r_2, r_3$ . Potom

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Dosadíme do polynómu jednotku a máme  $1 + a + b + c = (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3)$ . Vieme, že  $a + b + c \in (-2, 0)$ , a teda

$$1 + a + b + c = (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Pre spor predpokladajme, že žiaden z kořenův neleží v  $\langle 0, 2 \rangle$ . Potom žiaden z činiteľov z poslednej rovnosti neleží v  $\langle -1, 1 \rangle$ . Súčin troch čísel, ktoré sú v absolútnej hodnote väčšie ako jeden, je tiež v absolútnej hodnote väčší ako jeden, a teda dostávame spor s

$$(1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Preto aspoň jeden kořen leží v  $\langle 0, 2 \rangle$ .

POZNÁMKY:

Takmer každý z vás využil nerovnosť plynúcu zo zápornosti diskriminantu. S touto nerovnosťou ste sa už popasovali rôzne. Väčšina čiastočne upravila ľavú stranu na štvorec a potom rozoberala možnosti znamienok. Druhú časť úlohy odovzdalo omnoho menej ľudí, no skoro všetci ju mali správne. (Marta Kossaczka)

### Úloha 7.

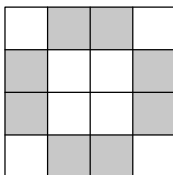
(24; 16; 1,83; 2,0)

(a) Jupiter a Zeus si spolu mēri sily. Jupiter pripraví šestnāct hvēzd uspořádaných do čtvercové mřížky  $4 \times 4$ , přičemž některé z hvēzd jsou rozsvícené a některé ne. Zeus pak může zvolit libovolný řádek, sloupec nebo diagonālu (celkem existuje čtrnāct diagonāl, jejich délka se pohybuje od jedné do čtyř) a změnit stav všech příslušných hvēzd (zhasnuté rozsvítí a naopak). To může opakovat libovolně dlouho. Zeus by chtěl, aby nakonec všechny hvēzdy svítily. Jaké počáteční stavy může Jupiter zvolit, aby Diovi tuto radost nedopřál? (Kuba Krásenský)

(b) Zeus si hraje se svým modelem vesmíru. Jedná se o rovinu s dírami v mřížových bodech<sup>12</sup>, do kterých se dají umísťovat hvēzdy. Sotva na ni umístil dvě hvēzdy, došlo mu, že je chtěl umístit naopak. Je mu ale trapné hvēzdy sundat, a tak může vždy jen jednu z hvēzd otočit kolem druhé tak, aby opět zapadla do nějakého mřížového bodu. Může takto Zeus hvēzdy prohodit v konečném počtu tahů? (Štěpán Šimsa)

ŘEŠENÍ:

(a) Políčka, která sousedí hranou s právě třemi dalšími políčky (tedy ta vybarvená na následujícím obrázku) nazveme *zajímavá*.



Každá řádka i každý sloupec obsahuje právě dvě zajímavé hvēzdy, úhlopříčka vždy dvě nebo žádnou. Pokud Zeus přepne řádek (či sloupec nebo úhlopříčku) se dvěma zajímavými hvēzdami, mohou nastat tři možnosti:

- (i) Jedna přepínaná zajímavá hvēzda svítla a druhá ne, počet svítících zajímavých hvēzd se tedy nezmění.

<sup>12</sup>Mřížovými body myslíme ty body roviny, které mají celočíselné souřadnice.

- (ii) Obě přepínané zajímavé hvězdy svítily, pak počet svítících zajímavých hvězd klesne o dvě.
- (iii) Ani jedna z přepínaných zajímavých hvězd nesvítla. V tom případě se počet svítících zajímavých hvězd zvýší o dvě.

Parita počtu svítících zajímavých hvězd se tak nemění, a pokud bude na začátku svítit lichý počet zajímavých hvězd, nemůže Zeus zařídit, aby na konci svítilo všech osm zajímavých hvězd.

Na druhou stranu, pokud svítí na začátku sudý počet zajímavých hvězd, může Zeus rozsvítit všechny hvězdy podle následujícího obrázku.

13	7	8	14
6	1	2	9
5	4	3	10
12	?	11	15

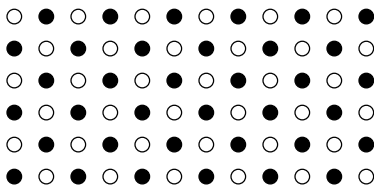
Projde postupně políčka od toho s číslem 1 do toho s číslem 15, a když narazí na políčko, na němž hvězda nesvítí, přepne úhlopříčku podle vyznačeného směru. Tím nikdy nezmění stav hvězdy s nižším číslem, než je číslo aktuálního tahu, a proto po provedení postupu budou svítit všechny hvězdy s čísly 1 až 15. Protože se parita počtu svítících zajímavých hvězd nemění, bude stále svítit sudý počet zajímavých hvězd. Bude tedy svítit i hvězda s otazníkem a tím všechny hvězdy.

**(b) PODLE RADA ŠVARCE:**

Řekneme, že mřížový bod je *lichý*, resp. *sudý*, pokud je lichý, resp. sudý součet jeho souřadnic. Prvně ukážeme, že se nemění parita mřížových bodů jednotlivých hvězd. Mějme hvězdy na souřadnicích  $[a, b], [x, y]$ , a první z nich otočme na souřadnice  $[c, d]$ . Protože vzdálenost první hvězdy od druhé má být stále stejná a dále platí  $k^2 \equiv k \pmod{2}$ , můžeme psát

$$\begin{aligned} (a-x)^2 + (b-y)^2 &= (c-x)^2 + (d-y)^2, \\ (a-x) + (b-y) &\equiv (c-x) + (d-y) \pmod{2}, \\ a + b &\equiv c + d \pmod{2}. \end{aligned}$$

Nyní pro spor předpokládejme dvě hvězdy, které je možné prohodit, s nejmenší možnou vzájemnou vzdáleností (nejmenší možnou vzdálenost můžeme zvolit, protože druhá mocnina vzdálenosti je přirozené číslo). Pokud by jedna hvězda byla v sudém mřížovém bodě a druhá v lichém, zjevně je není možné prohodit. Nechť tedy jsou obě hvězdy v mřížových bodech se stejnou paritou (bez újmy na obecnosti sudých). Pak se při prohazování tyto hvězdy pohybují celou dobu po sudých mřížových bodech.



Všimneme si, že sudé mřížové body také tvoří mřížku – jen  $\sqrt{2}$ -krát větší a otočenou o  $45^\circ$ . Pokud si tedy celý obrázek  $\sqrt{2}$ -krát zmenšíme a otočíme o  $45^\circ$ , dostaneme opět prohození dvou hvězd po mřížových bodech, což je spor s minimalitou vzdálenosti.

## POZNÁMKY:

Snad termín krátce po soustředění, snad géniové zodia káli, snad osmapadesátá vyšší inteligence se spikli proti nebohé úloze. Ačkoli ani jedna z částí (a), (b) nebyla příliš obtížná, valná část řešitelů poslala jen jednu z nich a zcela správné řešení části (b) dorazilo jen jedno od *Kuby Löwita*. Ve vzorovém řešení zmíněný *Rado Švarc* si elegancí svého postupu vysloužil imaginární bod, ale vzhledem k tomu, že si neuvědomil, že sudé body jsou „našíkmo“, neušel bodové ztrátě.

Vzhledem k tomu, že zadání nebylo zcela exaktní v tom, co se po řešitelích chce, rozhodl jsem se v části (a) být benevolentní a uděloval plné dva body už za nalezení jedné konfigurace, kterou Zeus nerozsvítí (pokud tam byl i argument, proč ji nerozsvítí). I část (b) někteří vyřešili jen pro speciální případ, kdy jsou hvězdy vedle sebe – to jsem hodnotil jedním bodem ze tří za klíčovou myšlenku s šachovnicovým obarvením. (Mirek Olšák)





## 2. jarní série – Polynomy

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

1.–2.	Radovan	Švarc	4	G ČTřebová	--- 5 5 5 5 5	25 + <i>i</i>	<b>25,00</b>
1.–2.	Pavel	Turek	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	<b>25,00</b>
3.	Filip	Bialas	2	GOpatoVPH	3 -- 5 5 5 5 -	23 + <i>i</i>	<b>23,79</b>
4.	Petr	Gebauer	1	G Mělník	3 3 2 5 5 5 --	21	<b>23,42</b>
5.	Danil	Koževnikov	1	GKepleraPH	3 3 3 5 5 3 --	19	<b>22,43</b>
6.	Victoria María	Nájares Romero	1	GZborovPH	3 3 3 5 5 0 --	19	<b>22,34</b>
7.	Jakub	Löwit	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 5 5 0	23	<b>22,17</b>
8.	Marie	Dohnalová	2	GNadKavaPH	3 2 3 5 - 5 --	18	<b>20,84</b>
9.	Lenka	Kopfová	0	CZŠSL HnM	3 3 3 5 - - - -	14	<b>20,44</b>
10.	Daniel	Magula	1	PiarGNitra	3 3 3 5 - - - -	14	<b>19,28</b>
11.	Jiří	Vala	1	G Mikulov	3 3 3 5 0 - - -	14 - <i>i</i>	<b>19,08</b>
12.	Marian	Poljak	3	GJŠkodyPŘ	3 2 3 5 - 5 --	18	<b>19,05</b>
13.	Lucien	Šíma	3	PORG PH	3 2 3 4 5 2 --	17	<b>19,00</b>
14.	Jan	Soukup	4	G Klatovy	3 3 - 5 4 5 5 -	22 + <i>i</i>	<b>18,69</b>
15.	Vojtěch	Lanz	1	GZborovPH	3 2 3 5 0 1 --	14	<b>18,36</b>
16.	Jan	Jurka	4	GMlerchaBO	3 3 3 5 -- 5 -	19	<b>17,20</b>
17.	Tomáš	Konečný	2	GJirsikaČB	3 3 3 5 - - - -	14	<b>16,91</b>
18.–19.	Jan	Gocnik	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 - - - -	14	<b>16,36</b>
18.–19.	Adéla	Kostelecká	3	GLesníZlín	3 3 3 5 - - - -	14	<b>16,36</b>
20.	Daniel	Pišťák	3	GZborovPH	3 3 3 4 5 - - -	18	<b>15,65</b>
21.–22.	Zuzana	Johanovská	3	GOpatoVPH	3 0 - 4 5 1 0 -	13	<b>15,43</b>
21.–22.	Daniel	Kopf	3	SlezkéG OP	3 3 3 4 - - - -	13	<b>15,43</b>
23.–24.	Tomáš	Domes	2	MendelG OP	3 3 2 1 2 - - -	11	<b>15,05</b>
23.–24.	Veronika	Hladíková	2	GMikul23PL	3 0 3 5 - 0 --	11	<b>15,05</b>
25.	Hedvika	Ranošová	1	GBudějovPH	3 3 - 3 - - - -	9	<b>14,11</b>
26.	Jan	Škvára	4	GJŠkodyPŘ	3 1 3 5 1 - - -	13	<b>13,00</b>
27.	Anh	Le Hoang	3	GJarošeBO	3 3 - 5 0 - 0 -	11	<b>12,67</b>
28.	Petr	Jakubčík	1	PORG PH	3 1 3 - - - - -	7	<b>11,57</b>
29.	Dominik	Krasula	2	G Krnov	3 3 3 - 0 1 --	10	<b>11,51</b>
30.–32.	Nodari	Gogatishvili	1	GZborovPH	3 2 1 - 0 - - -	6	<b>11,38</b>
30.–32.	Ondřej	Knopp	1	G Třeboň	3 0 2 1 - - - -	6	<b>11,38</b>
30.–32.	Jakub	Tětek	1	CírkgPlzeň	3 - 3 - - - - -	6	<b>11,38</b>
33.–34.	Aleš	Krčil	2	G Humpolec	3 0 3 1 0 - - -	7	<b>10,72</b>
33.–34.	Michal	Převrátíl	2	G Klatovy	3 1 3 - - - - -	7	<b>10,72</b>
35.	Martin	Števko	0	GAlejKošic	3 1 - 0 - - - -	4	<b>10,11</b>
36.–37.	Ondřej	Svoboda	2	GJarošeBO	3 - 3 - - - - -	6	<b>9,48</b>
36.–37.	Michal	Töpfer	2	GJPekařeMB	3 1 1 1 0 - - -	6	<b>9,48</b>
38.	Martin	Vrabec	4	GMRŠKošice	3 3 3 - - - - -	9	<b>9,00</b>
39.	Lukáš	Kubacki	2	GNadKavaPH	3 - 3 - - - - -	6	<b>8,93</b>

40.–41.	Denisa	Chytilová	1	GJŠkodyPŘ	3 – 1 – – – – –	4	<b>8,48</b>
40.–41.	Filip	Matějka	1	GZborovPH	2 2 – – – – –	4	<b>8,48</b>
42.–43.	Matěj	Hasala	0	ZŠ Teplice	– 3 – – – – –	3	<b>8,34</b>
42.–43.	Adam	Mendl	0	GCoubTábor	– 3 0 – – – – –	3	<b>8,34</b>
44.	Jakub	Marták	3	G GolNitra	2 1 2 1 – – 0 –	6	<b>7,46</b>
45.	Kamila	Kyzlíková	1	GZborovPH	3 – – 0 0 – 0 –	3	<b>6,79</b>
46.	Marek	Malý	2	G Neratov	3 1 – – – – –	4	<b>6,76</b>
47.	Vít	Kalisz	3	FSG Pirna	2 – 3 0 – – – –	5	<b>6,42</b>
48.	Zuzana	Svobodová	3	G FrýdlNOs	3 1 3 – – – – –	7	<b>6,26</b>
49.	Jakub	Ševčík	3	GKukučPopr	3 – – 1 – – – –	4	<b>5,46</b>
50.–51.	Eva	Klimentová	2	GJarošeBO	3 – – – – –	3	<b>5,27</b>
50.–51.	Ivana	Krumlová	2	GJarošeBO	3 – – – – –	3	<b>5,27</b>
52.	Stano	Šípka	3	GKukučPopr	3 1 – – – – –	4 – i	<b>5,19</b>
53.	Viktor	Szabo	1	GJHroncaBA	2 – – – – 0 – –	2	<b>4,89</b>
54.	Jan	Šorm	3	GJarošeBO	3 0 3 – – – – –	6	<b>4,86</b>
55.	Kateřina	Nová	2	G Vimperk	3 0 – – – – –	3	<b>4,81</b>
56.–58.	Jan	Dittrich	3	GJarošeBO	3 – – – – –	3	<b>4,23</b>
56.–58.	Pál	Somogyi	3	GIM Šamorín	3 – – – – –	3	<b>4,23</b>
56.–58.	Karel	Vlachovský	3	MasG Plzeň	3 0 – – – – –	3	<b>4,23</b>
59.	Jaromír	Mielec	2	GVolgogrOS	3 – – – – –	3	<b>3,47</b>
60.	Jozef	Burkuš	2	G Rožňava	1 – – – – –	1	<b>1,91</b>
61.–63.	Eliška	Cejnarová	1	G Jaroměř	– 0 – – – – 0 –	0	<b>0,00</b>
61.–63.	Lukáš	Pavela	0	LSG Letohrad	– 0 – – – – –	0	<b>0,00</b>
61.–63.	Tomáš	Troján	0	GNerudCheb	0 0 0 0 0 0 0 0	0	<b>0,00</b>

### 3. jarní série – Hvězdy a souhvězdí

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

1.–2.	Jakub	Löwit	3	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 5 5	25	<b>25,00</b>
1.–2.	Pavel	Turek	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5	25	<b>25,00</b>
3.	Danil	Koževnikov	1	GKepleraPH	3 3 3 5 5 – 5 –	21	<b>23,42</b>
4.	Filip	Bialas	2	GOpátovPH	3 3 3 5 – – 5 –	19	<b>20,57</b>
5.	Marie	Dohnalová	2	GNadKavaPH	3 3 3 5 – 3 – –	17	<b>20,12</b>
6.	Kamila	Kyzlíková	1	GZborovPH	3 3 3 5 – 0 – –	14	<b>19,28</b>
7.	Victoria María	Nájares Romero	1	GZborovPH	3 3 3 4 – – – 1	14	<b>19,12</b>
8.	Martin	Števko	0	GAlejKošic	1 3 3 5 – – – –	12	<b>19,02</b>
9.	Tomáš	Konečný	2	GJirsikaČB	1 3 3 5 – 3 – –	15	<b>17,79</b>
10.	Pavel	Hudec	1	GJarkovPH	3 0 3 5 0 – 1 –	12	<b>17,70</b>
11.	Jan	Jurka	4	GMLerchaBO	3 3 3 5 – 5 – –	19	<b>17,20</b>
12.	Richard	Hladík	2	GaOA MarLáz	2 3 3 5 – – – –	13	<b>16,90</b>
13.	Radovan	Švarc	4	G ČTřebová	1 – – 5 – 5 5 5	21	<b>16,52</b>
14.	Daniel	Kopf	3	SlezkéG OP	3 3 3 5 – – – –	14	<b>16,36</b>
15.–17.	Tomáš	Domes	2	MendelG OP	3 3 3 2 – 1 – 0	12	<b>16,00</b>
15.–17.	Veronika	Hladíková	2	GMikul23PL	2 3 3 4 – – – –	12	<b>16,00</b>
15.–17.	Jan	Škvára	4	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 – 1 – 2	16	<b>16,00</b>
18.	Vojtěch	Lanz	1	GZborovPH	3 0 3 4 0 1 0 0	11	<b>15,74</b>
19.	Zuzana	Trégllová	2	G Žatec	1 3 3 4 – 1 – –	12	<b>15,50</b>
20.	Kateřina	Nová	2	G Vimperk	1 3 3 5 – 0 – –	12	<b>15,37</b>
21.–23.	Adéla	Kostelecká	3	GLesníZlín	1 3 3 5 – – – –	12	<b>14,47</b>
21.–23.	Jana	Řežábková	3	PORG PH	1 3 3 5 – – – 0	12	<b>14,47</b>
21.–23.	Lucien	Šíma	3	PORG PH	1 3 3 5 – – – –	12	<b>14,47</b>
24.	Marian	Poljak	3	GJŠkodyPŘ	2 3 3 5 – – – –	13	<b>14,35</b>
25.	Radek	Olšák	0	GMensaPH	1 3 3 – – – – –	7	<b>13,98</b>
26.	Petr	Gebauer	1	G Mělník	1 – – 5 2 – – –	8	<b>13,81</b>
27.	Zuzana	Johanovská	3	GOpátovPH	3 0 3 5 0 – 0 –	11	<b>13,47</b>
28.	Sára	Elichová	0	GKepleraPH	3 3 – – – – – –	6	<b>13,03</b>
29.	Vít	Kalisz	3	FSG Pirna	3 3 3 2 0 0 0 0	11	<b>13,01</b>
30.–31.	Aleš	Krčil	2	G Humpolec	3 3 1 2 – 0 – –	9	<b>13,00</b>
30.–31.	Marek	Malý	2	G Neratov	3 3 3 – 0 – – –	9	<b>13,00</b>
32.	Jaroslav	Paidar	1	SPŠMasarLI	1 3 3 – – 0 – –	7	<b>12,64</b>
33.	Jan	Šorm	3	GJarošeBO	3 3 3 5 – – – –	14	<b>12,34</b>
34.–35.	Lucie	Hronová	2	GJarošeBO	1 3 3 1 – – – –	8	<b>11,89</b>
34.–35.	Michal	Töpfer	2	GJPekařeMB	1 3 2 2 – 0 – –	8	<b>11,89</b>
36.	Hedvika	Ranošová	1	GBudějovPH	1 3 – 3 – – – –	7	<b>11,84</b>
37.–40.	Vladimír	Lukačko	1	GVarŽilina	3 3 – – – – – –	6	<b>11,38</b>
37.–40.	Daniel	Magula	1	PiarGNitra	3 3 – – – 0 – 0	6	<b>11,38</b>
37.–40.	Alžběta	Neubauerová	1	GNadKavaPH	3 3 – – – – – –	6	<b>11,38</b>

<b>37.–40.</b>	<i>Marián</i>	<i>Okál</i>	1	SŠNvh	3 3	-----	6	<b>11,38</b>
<b>41.</b>	<i>Daniel</i>	<i>Pišťák</i>	3	GZborovPH	3 3 2 5	-----	13	<b>10,34</b>
<b>42.</b>	<i>Adam</i>	<i>Doubrava</i>	0	GMasarykKM	1 3	-----	4	<b>10,11</b>
<b>43.–44.</b>	<i>Eliška</i>	<i>Cejnarová</i>	1	G Jaroměř	1 3 1 0	----	0 5	<b>10,00</b>
<b>43.–44.</b>	<i>Samuel</i>	<i>Karaba</i>	1	SŠNvh	1 3 1	-----	0 5	<b>10,00</b>
<b>45.</b>	<i>Ondřej</i>	<i>Svoboda</i>	2	GJarošeBO	3 - 3	-----	6	<b>9,48</b>
<b>46.</b>	<i>Dominik</i>	<i>Krasula</i>	2	G Krnov	3 3 2	-- 0 --	8	<b>9,40</b>
<b>47.–49.</b>	<i>Filip</i>	<i>Chudoba</i>	1	PORG PH	1 3	-----	4	<b>8,48</b>
<b>47.–49.</b>	<i>Denisa</i>	<i>Chytilová</i>	1	GJŠkodyPŘ	1 3	-----	4	<b>8,48</b>
<b>47.–49.</b>	<i>Jiří</i>	<i>Vala</i>	1	G Mikulov	1 0 3 0	- 0 --	4	<b>8,48</b>
<b>50.</b>	<i>Adam</i>	<i>Mendl</i>	0	GCoubTábor	1 - 2	-----	0 3	<b>8,34</b>
<b>51.</b>	<i>Jan</i>	<i>Dittrich</i>	3	GJarošeBO	3 3 0	-----	6	<b>8,00</b>
<b>52.</b>	<i>Jakub</i>	<i>Marták</i>	3	G GolNitra	1 3 1 1	- 0 0 0	6	<b>7,46</b>
<b>53.</b>	<i>Jozef</i>	<i>Burkuš</i>	2	G Rožňava	1 3	--- 0 - 0	4	<b>6,76</b>
<b>54.–55.</b>	<i>Barbora</i>	<i>Sedláková</i>	4	GKonštanPV	1 3 1 1	-----	6	<b>6,00</b>
<b>54.–55.</b>	<i>Alena</i>	<i>Zahradníčková</i>	4	GKřenováBO	3 3	-----	6	<b>6,00</b>
<b>56.</b>	<i>Markéta</i>	<i>Calábková</i>	4	GJŠkodyPŘ	3 - 3	--- 2 -	8	<b>5,70</b>
<b>57.</b>	<i>Stano</i>	<i>Šípka</i>	3	GKukučPopr	3 0 1	-----	4	<b>5,53</b>
<b>58.</b>	<i>Petr</i>	<i>Gintar</i>	3	MendelG OP	3 1	-----	4	<b>5,51</b>
<b>59.</b>	<i>Anh</i>	<i>Le Hoang</i>	3	GJarošeBO	1 3 0 0	-----	4	<b>4,99</b>
<b>60.</b>	<i>Jakub</i>	<i>Ševčík</i>	3	GKukučPopr	3 0	-----	3	<b>4,17</b>
<b>61.</b>	<i>František</i>	<i>Couf</i>	2	GZborovPH	-----	4 -	4	<b>3,76</b>
<b>62.</b>	<i>Matej</i>	<i>Hockicko</i>	1	SSOŠTA PP	1	-----	1	<b>2,67</b>
<b>63.</b>	<i>Petr</i>	<i>Jakubčík</i>	1	PORG PH	1 0	-----	1	<b>2,21</b>
<b>64.</b>	<i>Jaromír</i>	<i>Mielec</i>	2	GVolgogrOS	1	-----	1	<b>1,17</b>
<b>65.–66.</b>	<i>David</i>	<i>Pokorný</i>	3	G Bučovice	0 0 0	-----	0	<b>0,00</b>
<b>65.–66.</b>	<i>Václav</i>	<i>Steinhauser</i>	1	ZŠVranéNV1	0 0 0	-----	0	<b>0,00</b>

### 3. seriálová série – Letem grafovým světem 3

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

1.–4.	Filip	Bialas	2	GOPatovPH	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–4.	Jakub	Löwit	3	GČeskoliPH	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–4.	Radovan	Švarc	4	G ČTřebová	5 5 5	15	<b>15,00</b>
1.–4.	Pavel	Turek	2	GTomkovaOL	5 5 5	15	<b>15,00</b>
5.	Danil	Koževnikov	1	GKepleraPH	5 – 4	9	<b>12,00</b>
6.	Petr	Gebauer	1	G Mělník	5 3 –	8	<b>11,27</b>
7.	Victoria María	Nájares Romero	1	GZborovPH	5 – 1	6	<b>9,42</b>
8.	Daniel	Magula	1	PiarGNitra	5 – –	5	<b>8,51</b>
9.	Michal	Töpfer	2	GJPekařeMB	5 – –	5	<b>7,36</b>
10.	Tomáš	Konečný	2	GJirsíkaČB	5 – –	5	<b>6,76</b>
11.	Zuzana	Johanovská	3	GOPatovPH	5 – –	5	<b>6,40</b>
12.	Tomáš	Domes	2	MendelG OP	4 – –	4	<b>6,19</b>
13.	Dominik	Krasula	2	G Krnov	5 – –	5	<b>5,85</b>
14.	Jan	Škvára	4	GJŠkodyPŘ	5 – –	5	<b>5,00</b>
15.–16.	Marie	Dohnalová	2	GNadKavaPH	3 – –	3	<b>4,90</b>
15.–16.	Marek	Malý	2	G Neratov	3 – –	3	<b>4,90</b>
17.	Jan	Šorm	3	GJarošeBO	5 – –	5	<b>4,15</b>
18.–20.	Vít	Kalisz	3	FSG Pirna	0 – –	0	<b>0,00</b>
18.–20.	Aleš	Krčil	2	G Humpolec	0 – –	0	<b>0,00</b>
18.–20.	Vojtěch	Lanz	1	GZborovPH	0 – –	0	<b>0,00</b>

# Výsledková listina jarní části semináře

1.	<i>Pavel</i>	<i>Turek</i>	2	GTomkovaOL	25 25 25 34 15 15	<b>139,16</b>	512
2.	<i>Radovan</i>	<i>Švarc</i>	4	G ČTřebová	25 25 17 31 15 15	<b>127,62</b>	1067
3.	<i>Danil</i>	<i>Koževnikov</i>	1	GKepleraPH	23 22 23 30 13 12	<b>124,45</b>	124
4.	<i>Jakub</i>	<i>Löwit</i>	3	GČeskoliPH	18 22 25 29 9 15	<b>118,89</b>	554
5.	<i>Victoria María</i>	<i>Nájares Romero</i>	1	GZborovPH	18 22 19 26 10 9	<b>104,85</b>	125
6.	<i>Filip</i>	<i>Bialas</i>	2	GOpatoPH	24 24 21 - 15 15	<b>97,96</b>	337
7.	<i>Jan</i>	<i>Jurka</i>	4	GMLerchaBO	17 17 17 25 9 -	<b>85,20</b>	282
8.	<i>Lucien</i>	<i>Šíma</i>	3	PORG PH	21 19 14 24 6 -	<b>84,68</b>	85
9.	<i>Petr</i>	<i>Gebauer</i>	1	G Mělník	13 23 14 14 9 11	<b>83,65</b>	84
10.	<i>Marie</i>	<i>Dohnalová</i>	2	GNadKavaPH	19 21 20 17 - 5	<b>81,18</b>	81
11.	<i>Marian</i>	<i>Poljak</i>	3	GJŠkodyPŘ	19 19 14 26 - -	<b>78,03</b>	201
12.	<i>Tomáš</i>	<i>Domes</i>	2	MendelG OP	19 15 16 13 8 6	<b>77,80</b>	78
13.	<i>Jan</i>	<i>Škvára</i>	4	GJŠkodyPŘ	20 13 16 21 1 5	<b>76,00</b>	76
14.	<i>Zuzana</i>	<i>Johanovská</i>	3	GOpatoPH	13 15 13 16 7 6	<b>72,62</b>	73
15.	<i>Jiří</i>	<i>Vala</i>	1	G Mikulov	21 19 8 21 3 -	<b>72,00</b>	72
16.	<i>Veronika</i>	<i>Hladíková</i>	2	GMikul23PL	21 15 16 15 3 -	<b>70,61</b>	71
17.	<i>Tomáš</i>	<i>Konečný</i>	2	GJirsikaČB	7 17 18 17 - 7	<b>65,98</b>	209
18.	<i>Daniel</i>	<i>Magula</i>	1	PiarGNitra	15 19 11 9 3 9	<b>65,72</b>	66
19.	<i>Aleš</i>	<i>Krčil</i>	2	G Humpolec	14 11 13 19 9 0	<b>65,56</b>	66
20.	<i>Pavel</i>	<i>Hudec</i>	1	GJarkovPH	20 - 18 18 9 -	<b>64,15</b>	64
21.	<i>Adéla</i>	<i>Kostelecká</i>	3	GLesníZlín	20 16 14 13 - -	<b>63,73</b>	64
22.	<i>Vojtěch</i>	<i>Lanz</i>	1	GZborovPH	18 18 16 9 - 0	<b>61,04</b>	189
23.	<i>Hedvika</i>	<i>Ranošová</i>	1	GBudějovPH	19 14 12 13 - -	<b>57,52</b>	139
24.	<i>Lenka</i>	<i>Kopfová</i>	0	CZŠSL HnM	15 20 - 20 - -	<b>56,04</b>	56
25.	<i>Daniel</i>	<i>Kopf</i>	3	SlezkéG OP	10 15 16 12 1 -	<b>55,45</b>	55
26.	<i>Jan</i>	<i>Soukup</i>	4	G Klatovy	20 19 - - 15 -	<b>53,80</b>	765
27.	<i>Dominik</i>	<i>Krasula</i>	2	G Krnov	14 12 9 6 4 6	<b>51,65</b>	383
28.	<i>Michal</i>	<i>Töpfer</i>	2	GJPekařeMB	15 9 12 4 3 7	<b>50,99</b>	51
29.	<i>Jan</i>	<i>Šorm</i>	3	GJarošeBO	17 5 12 10 2 4	<b>50,62</b>	408
30.	<i>Vít</i>	<i>Kalisz</i>	3	FSG Pirna	15 6 13 15 1 0	<b>50,42</b>	106
31.	<i>Kamila</i>	<i>Kyzlíková</i>	1	GZborovPH	15 7 19 7 - -	<b>48,48</b>	48
32.	<i>Daniel</i>	<i>Pišťák</i>	3	GZborovPH	11 16 10 9 1 -	<b>46,85</b>	522
33.	<i>Martin</i>	<i>Števko</i>	0	GAlejKošic	16 10 19 0 - -	<b>45,55</b>	46
34.	<i>Kateřina</i>	<i>Nová</i>	2	G Vimperk	12 5 15 11 2 -	<b>44,78</b>	141
35.	<i>Jakub</i>	<i>Tětek</i>	1	CírkGPLzeň	19 11 - - 14 -	<b>44,43</b>	44
36.	<i>Marek</i>	<i>Malý</i>	2	G Neratov	11 7 13 7 2 5	<b>44,29</b>	44
37.	<i>Denisa</i>	<i>Chytilová</i>	1	GJŠkodyPŘ	19 8 8 3 - -	<b>38,23</b>	38
38.	<i>Adam</i>	<i>Mendl</i>	0	GCoubTábor	13 8 8 7 - -	<b>36,50</b>	37
39.	<i>Jaroslav</i>	<i>Paidar</i>	1	SPŠMasarLI	14 - 13 9 - -	<b>35,60</b>	36
40.	<i>Ondřej</i>	<i>Knopp</i>	1	G Třeboň	18 11 - - 6 -	<b>35,08</b>	35

41.	Ondřej	Svoboda	2	GJarošeBO	15	9	9	-	-	-	<b>34,01</b>	34
42.	Jan	Dittrich	3	GJarošeBO	11	4	8	6	1	-	<b>30,73</b>	31
43.	Václav	Steinhauser	1	ZŠVranéNVl	16	-	0	15	-	-	<b>30,70</b>	290
44.	Jakub	Marták	3	G GolNitra	10	7	7	5	-	-	<b>29,81</b>	103
45.	Petr	Jakubčík	1	PORG PH	16	12	2	-	-	-	<b>29,64</b>	142
46.	Anh	Le Hoang	3	GJarošeBO	4	13	5	7	-	-	<b>28,91</b>	121
47.	Samuel	Karaba	1	SŠNvh	16	-	10	-	-	-	<b>25,89</b>	26
48.	Zuzana	Trégllová	2	G Žatec	10	-	16	-	-	-	<b>25,69</b>	103
49.	Nodari	Gogatishvili	1	GZborovPH	14	11	-	-	-	-	<b>25,19</b>	25
50.	Lucie	Hronová	2	GJarošeBO	9	-	12	4	-	-	<b>25,11</b>	25
51.	Zuzana	Svobodová	3	G FrýdlNos	5	6	-	12	1	-	<b>24,26</b>	315
52.	Radek	Olšák	0	GMensaPH	10	-	14	-	-	-	<b>23,79</b>	40
53.	Michal	Převrátíl	2	G Klatovy	13	11	-	-	-	-	<b>23,72</b>	24
54.	Adam	Doubrava	0	GMasarykKM	13	-	10	-	-	-	<b>23,14</b>	23
55.	Alžběta	Neubauerová	1	GNadKavaPH	11	-	11	-	-	-	<b>22,76</b>	23
56.	Jana	Řežábková	3	PORG PH	-	-	14	8	-	-	<b>22,73</b>	23
57.	František	Couf	2	GZborovPH	5	-	4	-	14	-	<b>22,65</b>	503
58.	Jakub	Ševčík	3	GKukučPopr	11	5	4	-	-	-	<b>20,91</b>	35
59.	Lukáš	Kubacki	2	GNadKavaPH	11	9	-	-	-	-	<b>20,24</b>	104
60.	Filip	Chudoba	1	PORG PH	11	-	8	-	-	-	<b>19,86</b>	20
61.	Eliška	Cejnarová	1	G Jaroměř	8	0	10	-	-	-	<b>18,48</b>	18
62.	Vladimír	Lukačko	1	GVarŽilina	7	-	11	-	-	-	<b>18,17</b>	18
63.-64.	Nina	Hronkovičová	4	G Partizan	17	-	-	-	-	-	<b>17,00</b>	17
63.-64.	Martin	Vrabec	4	GMRŠKošice	8	9	-	-	-	-	<b>17,00</b>	17
65.	Richard	Hladík	2	GaOA MarLáz	-	-	17	-	-	-	<b>16,90</b>	17
66.	Matěj	Hasala	0	ZŠ Teplice	8	8	-	-	-	-	<b>16,68</b>	17
67.	Jan	Gocník	3	GJŠkodyPŘ	-	16	-	-	-	-	<b>16,36</b>	16
68.	Stano	Šípka	3	GKukučPopr	6	5	6	-	-	-	<b>16,25</b>	16
69.	Barbora	Sedláková	4	GKonštanPV	9	-	6	-	-	-	<b>15,00</b>	15
70.	Jaromír	Mielec	2	GVolgogrOS	10	3	1	-	-	-	<b>14,62</b>	391
71.	Daniel	Bárta	0	GChodoviPH	14	-	-	-	-	-	<b>14,27</b>	14
72.	Jozef	Burkuš	2	G Rožnava	5	2	7	-	-	-	<b>13,94</b>	14
73.	David	Pokorný	3	G Bučovice	10	-	0	3	-	-	<b>13,21</b>	13
74.	Sára	Elichová	0	GKepleraPH	-	-	13	-	-	-	<b>13,03</b>	13
75.-77.	Štefan	Hollán	1	G Bytča	11	-	-	0	-	-	<b>11,38</b>	11
75.-77.	Marián	Okál	1	SŠNvh	-	-	11	-	-	-	<b>11,38</b>	11
75.-77.	Kristína	Szabová	1	GVarŽilina	11	-	-	-	-	-	<b>11,38</b>	11
78.	Alena	Zahradníčková	4	GKřenováBO	5	-	6	-	-	-	<b>11,00</b>	11
79.	Matej	Hockicko	1	SSOŠTA PP	7	-	3	-	-	-	<b>9,46</b>	9
80.	Tereza	Kislingerová	2	G Klatovy	9	-	-	-	-	-	<b>8,80</b>	113
81.	Filip	Matějka	1	GZborovPH	-	8	-	-	-	-	<b>8,48</b>	8
82.-83.	Pál	Somogyi	3	GIM Šamorín	4	4	-	-	-	-	<b>8,46</b>	8
82.-83.	Karel	Vlachovský	3	MasG Plzeň	4	4	-	-	-	-	<b>8,46</b>	8
84.-85.	Matej	Choma	3	G Gröss BA	8	-	-	-	-	-	<b>8,00</b>	8
84.-85.	Marek	Jaroš	3	GJM Gal	8	-	-	-	-	-	<b>8,00</b>	8
86.	Markéta	Čalábková	4	GJŠkodyPŘ	2	-	6	-	-	-	<b>7,66</b>	287
87.	Petr	Gintar	3	MendelG OP	-	-	6	1	-	-	<b>6,98</b>	11
88.	Vojtěch	Lukeš	3	G LPika PL	7	-	-	-	-	-	<b>6,88</b>	149
89.	Filip	Čermák	1	MendelG OP	7	-	-	-	-	-	<b>6,79</b>	7
90.	Lucie	Janštová	2	SlovanG OL	7	-	-	-	-	-	<b>6,76</b>	7
91.	Ondrej	Bínovský	4	GAnMeTr	-	-	-	6	-	-	<b>5,94</b>	32



<b>92.–93.</b> Eva	Klimentová	2	GJarošeBO	–	5	–	–	–	–	<b>5,27</b>	5
<b>92.–93.</b> Ivana	Krumlová	2	GJarošeBO	–	5	–	–	–	–	<b>5,27</b>	5
<b>94.</b> Viktor	Szabo	1	GJHroncaBA	–	5	–	–	–	–	<b>4,89</b>	5
<b>95.</b> Tomáš	Troján	0	GNerudCheb	4	0	–	–	–	–	<b>3,66</b>	4
<b>96.</b> Timotej	Šujan	3	GJarošeBO	3	–	–	–	–	–	<b>2,84</b>	13
<b>97.–100.</b> Barbora	Mouleová	1	G Plasy	0	–	–	–	–	–	<b>0,00</b>	0
<b>97.–100.</b> Lukáš	Pavela	0	LSG Letohrad	–	0	–	–	–	–	<b>0,00</b>	0
<b>97.–100.</b> Anežka	Soukupová	1	SPŠchemBrno	0	–	–	–	–	–	<b>0,00</b>	0
<b>97.–100.</b> Emese	Szabó	4	GZKMJ Gal	0	–	–	–	–	–	<b>0,00</b>	0

# Výsledková listina seriálu

1.–3.	Filip	Bialas	2	GOpatoVPH	15 15 15	<b>45,00</b>	284
1.–3.	Radovan	Švarc	4	G ČTřebová	15 15 15	<b>45,00</b>	984
1.–3.	Pavel	Turek	2	GTomkovaOL	15 15 15	<b>45,00</b>	418
4.	Danil	Koževnikov	1	GKepleraPH	14 13 12	<b>39,01</b>	39
5.	Jakub	Löwit	3	GČeskoliPH	11 9 15	<b>34,95</b>	470
6.	Petr	Gebauer	1	G Mělník	11 9 11	<b>31,25</b>	31
7.	Victoria María	Nájares Romero	1	GZborovPH	10 10 9	<b>29,86</b>	50
8.	František	Couf	2	GZborovPH	15 14 –	<b>28,93</b>	509
9.	Zuzana	Johanovská	3	GOpatoVPH	14 7 6	<b>27,67</b>	28
10.	Tomáš	Domes	2	MendelG OP	12 8 6	<b>26,55</b>	27
11.	Jan	Soukup	4	G Klatovy	9 15 –	<b>24,00</b>	735
12.	Jan	Jurka	4	GMLerchaBO	13 9 –	<b>22,07</b>	219
13.	Michal	Töpfer	2	GJPekařeMB	8 3 7	<b>19,26</b>	19
14.	Pavel	Hudec	1	GJarkovPH	10 9 –	<b>18,05</b>	18
15.	Marie	Dohnalová	2	GNadKavaPH	12 – 5	<b>17,22</b>	17
16.	Lucien	Šíma	3	PORG PH	10 6 –	<b>16,76</b>	17
17.	Dominik	Krasula	2	G Krnov	5 4 6	<b>15,08</b>	346
18.–19.	Eduard	Batmendijn	4	CGStLubovňa	15 – –	<b>15,00</b>	203
18.–19.	Matěj	Konečný	4	G Jírov ČB	15 – –	<b>15,00</b>	388
20.	Jan	Šmola	3	GJarošeBO	8 2 4	<b>14,58</b>	372
21.	Viktor	Němeček	4	GJMasar JI	15 – –	<b>14,54</b>	353
22.	Jan	Škvára	4	GJŠkodyPŘ	8 1 5	<b>14,00</b>	14
23.	Jakub	Tětek	1	CírkGPlzeň	– 14 –	<b>13,77</b>	14
24.	Tomáš	Konečný	2	GJirsíkaČB	7 – 7	<b>13,52</b>	157
25.	Václav	Rozhoň	4	GJirsíkaČB	13 – –	<b>12,59</b>	224
26.	Daniel	Magula	1	PiarGNitra	0 3 9	<b>11,02</b>	11
27.	Ondřej	Knopp	1	G Třeboně	4 6 –	<b>10,43</b>	10
28.	Karolína	Kuchyňová	4	GMLerchaBO	10 – –	<b>10,39</b>	382
29.	Radek	Olšák	0	GMensaPH	10 – –	<b>10,26</b>	26
30.	Anna	Gajdová	4	G ValMez	10 – –	<b>10,00</b>	10
31.	Lenka	Kopfová	0	CZŠSL HnM	9 – –	<b>9,45</b>	9
32.	Aleš	Krčil	2	G Humpolec	0 9 0	<b>9,16</b>	9
33.	Kateřina	Nová	2	G Vimperk	7 2 –	<b>8,93</b>	105
34.	Vojtěch	Lukeš	3	G LPika PL	9 – –	<b>8,68</b>	151
35.	Marek	Murin	3	GJHroncaBA	8 – –	<b>8,48</b>	8
36.	Veronika	Hladíková	2	GMikul23PL	5 3 –	<b>8,37</b>	8
37.	Daniel	Kopf	3	SlezkéG OP	6 1 –	<b>7,85</b>	8
38.	Vít	Kalisz	3	FSG Pirna	6 1 0	<b>7,48</b>	63
39.	Anh Mính	Tran	3	GJarošeBO	7 – –	<b>7,47</b>	7
40.	Richard	Hladík	2	GaOA MarLáz	7 – –	<b>7,36</b>	7

41.	Marek	Malý	2	G Neratov	0	2	5	<b>6,75</b>	7
42.	Jakub	Hledík	4	GSŘMRSkuteč	7	-	-	<b>6,62</b>	211
43.-44.	Jana	Řežábková	3	PORG PH	6	-	-	<b>6,40</b>	6
43.-44.	Tomáš	Terem	3	GTajBanBys	6	-	-	<b>6,40</b>	6
45.	Zuzana	Svobodová	3	G FrýdlNOs	5	1	-	<b>6,33</b>	297
46.	Marian	Poljak	3	GJŠkodyPŘ	6	-	-	<b>6,03</b>	129
47.	Nina	Hronkovičová	4	G Partizan	6	-	-	<b>6,00</b>	6
48.	Markéta	Calábková	4	GJŠkodyPŘ	5	-	-	<b>5,33</b>	284
49.	Martin	Vrabec	4	GMRŠKošice	5	-	-	<b>5,27</b>	5
50.	Jiří	Vala	1	G Mikulov	3	3	-	<b>5,02</b>	5
51.	Ondřej	Zeman	4	G Lovosice	5	-	-	<b>4,81</b>	28
52.	Daniel	Pišťák	3	GZborovPH	4	1	-	<b>4,57</b>	480
53.	Jan	Dittrich	3	GJarošeBO	3	1	-	<b>4,25</b>	4
54.	Adéla	Kostelecká	3	GLesníZlín	4	-	-	<b>4,07</b>	4
55.	Pavel	Mysička	4	G Čáslav	4	-	-	<b>4,00</b>	4
56.	Vojtěch	Suchánek	4	GJarošeBO	4	-	-	<b>3,94</b>	185
57.	Vojtěch	Lanz	1	GZborovPH	4	-	0	<b>3,81</b>	132
58.	Jaroslav	Paidar	1	SPŠMasarLI	3	-	-	<b>2,51</b>	3
59.-62.	Dominika	Levická	4	GMRŠKošice	0	-	-	<b>0,00</b>	0
59.-62.	Hedvika	Ranošová	1	GBudějovPH	0	-	-	<b>0,00</b>	81
59.-62.	Václav	Steinhauser	1	ZŠVranéNV1	0	-	-	<b>0,00</b>	259
59.-62.	Emese	Szabó	4	GZK MJ Gal	0	-	-	<b>0,00</b>	0

# Výsledková listina 34. ročníku

1. Pavel	Turek	2	GTomkovaOL	25	25	25	25	25	25	25	25	34	15	15	15	<b>254,16</b>	627
2. Radovan	Švarc	4	G ČTřebová	25	25	25	25	25	25	17	31	15	15	15		<b>242,62</b>	1182
3. Danil	Koževnikov	1	GKepleraPH	23	24	24	24	23	22	23	30	14	13	12		<b>233,35</b>	233
4. Filip	Bialas	2	GOpátovPH	25	24	25	24	24	24	21	-	15	15	15		<b>211,06</b>	450
5. Victoria Maria	Nájares Romero	1	GZborovPH	21	23	23	21	18	22	19	26	10	10	9		<b>203,91</b>	224
6. Jakub	Löwit	3	GČeskoliPH	21	21	23	-	18	22	25	29	11	9	15		<b>194,73</b>	630
7. Jan	Jurka	4	GMLerchaBO	17	20	22	21	17	17	17	25	13	9	-		<b>178,13</b>	375
8. Lucien	Šima	3	PORG PH	19	21	22	21	21	19	14	24	10	6	-		<b>177,47</b>	177
9. Marie	Dohnalová	2	GNadKavaPH	18	22	19	22	19	21	20	17	12	-	5		<b>173,68</b>	174
10. Petr	Gebauer	1	G Mělník	19	19	11	22	13	23	14	14	11	9	11		<b>167,49</b>	167
11. Tomáš	Domes	2	MendelG OP	19	21	19	17	19	15	16	13	12	8	6		<b>165,43</b>	165
12. Zuzana	Johanovská	3	GOpátovPH	19	22	19	17	13	15	13	16	14	7	6		<b>163,86</b>	164
13. Marian	Poljak	3	GJŠkodyPŘ	19	19	22	20	19	14	26	6	-	-			<b>163,78</b>	287
14. Jan	Škvára	4	GJŠkodyPŘ	19	21	21	18	20	13	16	21	8	1	5		<b>163,46</b>	163
15. Jiří	Vala	1	G Mikulov	21	22	22	21	21	19	8	21	3	3			<b>160,71</b>	161
16. Veronika	Hladíková	2	GMikul23PL	19	19	23	23	21	15	16	15	5	3	-		<b>159,05</b>	159
17. Lenka	Kopfová	0	CZSSL HnM	23	23	24	23	15	20	-	20	9	-	-		<b>158,81</b>	159
18. Pavel	Hudec	1	GJarkovPH	22	19	19	20	20	-	18	18	10	9	-		<b>154,13</b>	154
19. Tomáš	Konečný	2	GJirsíkaČB	22	21	19	17	7	17	18	17	7	-	7		<b>152,49</b>	295
20. Vojtěch	Lanz	1	GZborovPH	21	21	23	22	18	16	9	4	-	0			<b>150,93</b>	279
21. Adéla	Kostecká	3	GLesníZlín	19	21	21	21	20	16	14	13	4	-	-		<b>149,47</b>	149
22. Jan	Soukup	4	G Klatovy	18	25	17	21	20	19	-	-	9	15	-		<b>143,20</b>	854
23. Aleš	Krčil	2	G Humpolec	18	16	22	20	14	11	13	19	0	9	0		<b>140,97</b>	141
24. Michal	Töpfer	2	GJPekařeMB	22	22	16	22	15	9	12	4	8	3	7		<b>139,98</b>	140
25. Daniel	Kopf	3	SlezkéG OP	18	18	21	20	10	15	16	12	6	1	-		<b>138,61</b>	139
26. Vít	Kalisz	3	FSG Pirna	20	16	19	20	15	6	13	15	6	1	0		<b>130,38</b>	186
27. Daniel	Magula	1	PiarGNitra	17	8	21	16	15	19	11	9	0	3	9		<b>127,59</b>	128
28. Jan	Šorm	3	GJarošeBO	15	18	18	18	17	5	12	10	8	2	4		<b>127,52</b>	485
29. Hedvika	Ranošová	1	GBudějovPH	19	19	11	19	19	14	12	13	0	-	-		<b>125,08</b>	206
30. Dominik	Krasula	2	G Krnov	18	15	18	16	14	12	9	6	5	4	6		<b>123,93</b>	455
31. Martin	Števko	0	GAlejKošic	21	22	23	10	16	10	19	0	-	-	-		<b>122,01</b>	122
32. Ondřej	Knopp	1	G Třeboň	21	22	19	18	18	11	-	-	4	6	-		<b>118,51</b>	119
33. Kamila	Kyzlíková	1	GZborovPH	19	18	17	17	15	7	19	7	-	-	-		<b>118,36</b>	118
34. Kateřina	Nová	2	G Vimperk	17	18	20	9	12	5	15	11	7	2	-		<b>116,81</b>	213
35. Jaroslav	Paidar	1	SPŠMasarLI	20	19	19	14	14	-	13	9	3	-	-		<b>110,48</b>	110
36. Václav	Steinhauser	1	ZŠVranéNVI	15	21	23	20	16	-	0	15	0	-	-		<b>109,79</b>	369
37. Daniel	Pišťák	3	GZborovPH	11	19	10	17	11	16	10	9	4	1	-		<b>108,59</b>	584
38. Jana	Řezábková	3	PORG PH	19	20	20	21	-	-	14	8	6	-	-		<b>108,42</b>	108
39. Denisa	Chytilová	1	GJŠkodyPŘ	17	22	16	15	19	8	8	3	-	-	-		<b>108,27</b>	108
40. Adam	Mendl	0	GCoubTábor	16	24	14	17	13	8	8	7	-	-	-		<b>108,06</b>	108
41. Eduard	Batmendijn	4	CGStLubovňa	25	25	25	13	-	-	-	-	15	-	-		<b>102,58</b>	291
42. Marek	Malý	2	G Neratov	16	12	17	13	11	7	13	7	0	2	5		<b>102,08</b>	102
43. Nina	Hronkovičová	4	G Partizan	19	23	19	16	17	-	-	-	6	-	-		<b>100,00</b>	100
44. Zuzana	Svobodová	3	G FrýdlNOs	20	20	13	14	5	6	-	12	5	1	-		<b>97,78</b>	389
45. Anh	Le Hoang	3	GJarošeBO	14	20	22	13	4	13	5	7	-	-	-		<b>97,50</b>	190

46. Petr	Jakubčík	1	PORG PH	18	10	17	21	16	12	2	-	-	-	-	-	-	-	<b>96,03</b>	208
47. Radek	Olšák	0	GMensaPH	22	21	17	-	10	-	14	-	10	-	-	-	-	-	<b>94,66</b>	111
48. Viktor	Němeček	4	GJMasar JI	25	19	19	16	-	-	-	-	15	-	-	-	-	-	<b>93,51</b>	432
49. Jan	Gocník	3	GJŠkodyPŘ	15	20	20	21	-	16	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>92,29</b>	92
50. Vojtěch	Lukáš	3	G LPika PL	19	21	15	20	7	-	-	-	9	-	-	-	-	-	<b>90,72</b>	233
51. Matěj	Konečný	4	G Jírov ČB	19	19	22	16	-	-	-	-	15	-	-	-	-	-	<b>90,37</b>	463
52. Karolína	Kuchyňová	4	GMLerchaBO	20	20	18	19	-	-	-	-	10	-	-	-	-	-	<b>87,58</b>	460
53. Vojtěch	Suchánek	4	GJarošeBO	20	19	22	21	-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	<b>86,64</b>	268
54. Václav	Rozhoň	4	GJirsíkaČB	22	17	17	17	-	-	-	-	13	-	-	-	-	-	<b>86,06</b>	297
55. Anna	Gajdová	4	G ValMez	18	21	16	19	-	-	-	-	10	-	-	-	-	-	<b>84,00</b>	84
56. Lucie	Hronová	2	GJarošeBO	13	22	9	15	9	-	12	4	-	-	-	-	-	-	<b>83,90</b>	84
57. Samuel	Karaba	1	SŠNvh	21	18	17	3	16	-	10	-	-	-	-	-	-	-	<b>83,76</b>	84
58. Ondřej	Svoboda	2	GJarošeBO	18	15	13	-	15	9	9	-	-	-	-	-	-	-	<b>79,83</b>	80
59. Martin	Vrabec	4	GMRŠKošice	-	21	15	21	8	9	-	-	5	-	-	-	-	-	<b>79,54</b>	80
60. Jan	Dittrich	3	GJarošeBO	17	10	12	4	11	4	8	6	3	1	-	-	-	-	<b>77,78</b>	78
61. Filip	Chudoba	1	PORG PH	16	13	16	10	11	-	8	-	-	-	-	-	-	-	<b>74,28</b>	74
62. Zuzana	Tréglová	2	G Žatec	21	12	6	8	10	-	16	-	-	-	-	-	-	-	<b>73,41</b>	150
63. Jozef	Burkuš	2	G Rožňava	18	15	17	9	5	2	7	-	-	-	-	-	-	-	<b>73,14</b>	73
64. Richard	Hladík	2	GaOA MarLáz	18	9	19	-	-	17	-	7	-	-	-	-	-	-	<b>70,88</b>	71
65. Nodari	Gogatishvili	1	GZborovPH	11	14	17	3	14	11	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>69,88</b>	70
66. Markéta	Horová	3	GMikul23PL	15	20	15	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>69,54</b>	220
67. Jaromír	Mielec	2	GVolgogrOS	18	20	7	9	10	3	1	-	-	-	-	-	-	-	<b>67,97</b>	444
68. Jakub	Marták	3	G GolNitra	13	7	11	6	10	7	7	5	-	-	-	-	-	-	<b>67,20</b>	140
69. Jakub	Ševčík	3	GKukučPopr	15	9	16	5	11	5	4	-	-	-	-	-	-	-	<b>67,01</b>	81
70. Markéta	Calábková	4	GJŠkodyPŘ	12	12	17	11	2	-	6	-	5	-	-	-	-	-	<b>65,03</b>	344
71. Daniel	Bárta	0	GChodoviPH	20	16	13	-	14	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>64,16</b>	64
72. Anh Minh	Tran	3	GJarošeBO	14	16	13	12	-	-	-	-	7	-	-	-	-	-	<b>63,45</b>	63
73. Stano	Šípka	3	GKukučPopr	12	12	13	8	6	5	6	-	-	-	-	-	-	-	<b>62,62</b>	63
74. Eliška	Cejnarová	1	G Jaroměř	16	13	15	-	8	0	10	-	-	-	-	-	-	-	<b>61,90</b>	62
75. Vladimír	Lukačko	1	GVarŽilina	15	17	11	-	7	-	11	-	-	-	-	-	-	-	<b>61,27</b>	61
76. Viktor	Szabo	1	GJHroncaBA	17	17	15	7	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>60,23</b>	60
77. Martin	Surma	4	GJWolkraPV	22	19	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>57,52</b>	352
78. Matej	Hockicko	1	SSOŠTA PP	15	14	19	-	7	-	3	-	-	-	-	-	-	-	<b>57,44</b>	57
79. František	Couf	2	GZborovPH	-	10	-	10	5	-	4	-	15	14	-	-	-	-	<b>57,03</b>	537
80. Barbora	Sedláková	4	GKonštanPV	8	11	9	14	9	-	6	-	-	-	-	-	-	-	<b>57,00</b>	57
81. Adam	Doubrava	0	GMasarykKM	13	0	20	-	13	-	10	-	-	-	-	-	-	-	<b>56,61</b>	57
82. Pavel	Mysička	4	G Čáslav	14	16	11	11	-	-	-	-	4	-	-	-	-	-	<b>56,00</b>	56
83. Ondřej	Darmovzal	4	GJarošeBO	15	18	20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>53,83</b>	121
84. Ondřej	Lomický	2	G Plasy	16	21	17	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>53,74</b>	54
85. Matěj	Hasala	0	ZŠ Teplice	14	-	20	-	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>51,39</b>	51
86. Lukáš	Kubacki	2	GNadKavaPH	14	9	8	-	11	9	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>51,30</b>	135
87. Štefan	Hollán	1	G Bytča	17	16	7	-	11	-	0	-	-	-	-	-	-	-	<b>50,89</b>	51
88. Sára	Elichová	0	GKepleraPH	15	13	8	-	-	-	13	-	-	-	-	-	-	-	<b>49,79</b>	50
89. Peter	Macko	0	ŠpMNDaG BA	22	14	13	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>49,47</b>	49
90. Jakub	Hledík	4	GSRMRŠkuteč	12	14	10	7	-	-	-	-	7	-	-	-	-	-	<b>48,81</b>	253
91. Štěpán	Procházka	4	GSRandyJN	16	16	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>48,32</b>	89
92. Alžběta	Neubauerová	1	GNadKavaPH	10	7	8	-	11	-	11	-	-	-	-	-	-	-	<b>48,03</b>	48
93. Lucia	Klasová	1	G Gröss BA	19	11	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>46,55</b>	47
94. Kristína	Szabová	1	GVarŽilina	17	14	3	-	11	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>44,69</b>	45
95. Jiří	Nábělek	1	G Bílovec	18	17	10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>44,53</b>	45
96. Jakub	Tětek	1	CirkGPLzeň	-	-	-	-	19	11	-	-	-	-	-	-	-	-	<b>44,43</b>	44

97. Alena	Zahradníčková	4 GKřenováBO	15 14 4 - 5 - 6 - - - -	<b>44,00</b>	44
98. Tomáš	Terem	3 GTajBanBys	11 15 8 - - - - - 6 - -	<b>41,22</b>	41
99. Barbora	Mouleová	1 G Plasy	13 14 14 0 0 - - - -	<b>40,26</b>	40
100. Marek	Murin	3 GJHroncaBA	18 - 13 - - - - - 8 - -	<b>40,10</b>	40
101. Pál	Somogyi	3 GIM Šamorín	9 4 11 6 4 4 - - - -	<b>38,78</b>	39
102. Šimon	Karch	1 G KomHavř	19 19 - - - - - - - -	<b>38,36</b>	38
103. Soňa	Burešová	1 GHeyrovPH	21 17 - - - - - - - -	<b>38,13</b>	38
104. Radek	Zikmund	4 G HavlBrod	17 21 - - - - - - - -	<b>38,00</b>	38
105. Martin	Strnad	1 G Dobříš	15 22 - - - - - - - -	<b>37,32</b>	37
106. Zuzana	Frankovská	3 GJHroncaBA	20 10 7 - - - - - - - -	<b>36,92</b>	37
107. Leoš	Smetana	2 G Jaroměř	13 14 9 - - - - - - - -	<b>36,53</b>	37
108. Marek	Černý	4 G Chrudim	17 19 - - - - - - - -	<b>35,71</b>	47
109. Jan	Pekař	1 GJPekařeMB	17 19 - - - - - - - -	<b>35,35</b>	35
110. Stepan	Yakimov	4	- - 21 13 - - - - - - - -	<b>34,27</b>	34
111. Marián	Poppr	4 GJNerudyPH	18 16 - - - - - - - -	<b>33,92</b>	471
112. Tomáš	Kuzma	3 GJHroncaBA	18 15 - - - - - - - -	<b>33,46</b>	156
113. Katarína	Krajčiová	4 GAlejKošic	18 15 - - - - - - - -	<b>33,06</b>	536
114. Zuzana	Urbanová	2 GUBalvanJN	17 16 - - - - - - - -	<b>32,90</b>	33
115. Ondřej	Zeman	4 G Lovosice	- 11 17 - - - - - 5 - -	<b>32,88</b>	56
116. Timotej	Šujan	3 GJarošeBO	15 10 4 - 3 - - - - - - - -	<b>32,60</b>	43
117. Jakub	Matěna	3 GČeskoliPH	21 11 - - - - - - - -	<b>32,55</b>	54
118. Přemysl	Šťastný	2 G Žamberk	17 5 - 9 - - - - - - - -	<b>31,70</b>	79
119. David	Pokorný	3 G Bučovice	10 8 - - 10 - 0 3 - - - -	<b>31,51</b>	32
120. Václav	Málek	3 G Chotěboř	17 13 - - - - - - - -	<b>30,74</b>	31
121. Jan	Knížek	4 G Strakon	19 - 12 - - - - - - - -	<b>30,18</b>	60
122. Anežka	Soukupová	1 SPŠchemBrno	15 7 8 - 0 - - - - - - - -	<b>30,16</b>	30
123. Lukáš	Fruněk	2 GLesníZlín	17 12 - - - - - - - -	<b>28,79</b>	29
124. Michal	Bubeník	2 BiskG Brno	13 15 - - - - - - - -	<b>28,05</b>	28
125. Pavla	Nováková	3 GJarošeBO	13 14 - - - - - - - -	<b>27,94</b>	28
126. Zdeněk	Lukeš	3 GNeumannŽR	13 13 - - - - - - - -	<b>26,94</b>	27
127. Iva	Švecová	1 GJMasar JI	20 7 - - - - - - - -	<b>26,79</b>	27
128. Marián	Okál	1 SŠNvh	15 - - - - - 11 - - - -	<b>26,27</b>	26
129. Michaela	Jakešová	3 GJarošeBO	9 11 6 - - - - - - - -	<b>26,09</b>	26
130. Tereza	Kislingerová	2 G Klatovy	17 - - - 9 - - - - - - - -	<b>25,95</b>	130
131. Petr	Gintar	3 MendelG OP	6 4 9 - - - - - 6 1 - - - -	<b>25,84</b>	30
132. Lukáš	Zib	3 GPisnickPH	15 10 - - - - - - - -	<b>25,73</b>	26
133. Martin	Scheubrein	3 G MasNámTR	13 8 4 - - - - - - - -	<b>25,70</b>	26
134. Ondrej	Bínovský	4 GAnMeTr	10 - 10 - - - - - 6 - - - -	<b>25,16</b>	51
135. Filip	Oplť	2 GBudějovPH	19 5 - - - - - - - -	<b>24,64</b>	25
136. Šárka	Vavrecková	2 GBezručeFM	15 9 - - - - - - - -	<b>24,53</b>	25
137. Martin	Zahradníček	4 GŠlapanice	16 8 - - - - - - - -	<b>24,27</b>	24
138. Dominika	Levická	4 GMRŠKošice	- 16 8 - - - - - 0 - - - -	<b>24,00</b>	24
139. Michal	Převrátíl	2 G Klatovy	- - - - 13 11 - - - - - - - -	<b>23,72</b>	24
140. Matúš	Varhaník	1 G Bytča	11 11 - - - - - - - -	<b>22,76</b>	23
141. Borek	Požár	1 G Rakovník	16 7 - - - - - - - -	<b>22,68</b>	23
142. Noemk	Kuželová	3 GBalbínaHK	9 13 - - - - - - - -	<b>22,64</b>	23
143. Soňa	Lisníková	2 GBezručeFM	13 9 - - - - - - - -	<b>22,48</b>	22
144. David	Kozina	1 SPŠEIT BO	22 - - - - - - - -	<b>22,43</b>	22
145. Veronika	Venclová	1 G Chrudim	14 8 - - - - - - - -	<b>22,29</b>	22
146. Lucie	Janštová	2 SlovanG OL	13 - 2 - 7 - - - - - - - -	<b>21,67</b>	22
147. Martin	Hubata	0 GMikul23PL	- 13 8 - - - - - - - -	<b>21,37</b>	21

148.	Michaela	Brabcová	3 G Jírov ČB	- 16 5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>20,85</b>	98
149.	Michal	Porubsky	3 GCyMeNitra	11 9	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>20,56</b>	21
150.	Tomáš	Macek	2 G Náchod	20	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>20,12</b>	20
151.	Minh Thao	Nguyen	3 GEBenešKL	19	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>19,00</b>	19
152.	Petr	Ježek	1 GBNěmcovHK	19	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>18,52</b>	19
153.	Marek	Jaroš	3 GJM Gal	- 10	- - - 8	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>18,30</b>	18
154.	Lukáš	Pavela	0 LSG Letohrad	18	- - - - 0	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>18,23</b>	18
155.-158.	Martin	Barnovský	2 GStLubovňa	18	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>17,77</b>	18
155.-158.	Petr	Chmel	2 G Kralupy	18	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>17,77</b>	18
155.-158.	Jan	Dopita	2 GBudějovPH	18	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>17,77</b>	18
155.-158.	Adrián	Mokrý	2 GNVPlániPH	18	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>17,77</b>	18
159.	Jakub	Gregora	1 GLanškroun	18	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>17,70</b>	18
160.	Andrej	Čermák	1 GJF Šaľa	13	- 5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>17,53</b>	18
161.	Jan	Václavek	3 G Ústí n O	17	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>17,24</b>	137
162.	František	Zajíc	2 G Nymburk	17	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>16,90</b>	17
163.-164.	Jakub	Ditrich	1 GÚstavníPH	17	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>16,83</b>	17
163.-164.	Roman	Walica	1 G Třinec	17	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>16,83</b>	17
165.	Adéla	Jalovcová	2 GNerudCheb	16	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>16,00</b>	16
166.	Matěj	Kletečka	1 G HavlBrod	16	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>15,89</b>	16
167.	Kristýna	Šudomová	3 GValašKlob	12	- 4	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>15,70</b>	156
168.-169.	Filip	Keller	0 G Milevsko	15	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>15,39</b>	15
168.-169.	Jaroslava	Šamanová	0 G Tišnov	15	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>15,39</b>	15
170.	Tomáš	Troján	0 GNerudCheb	12	- - - - 4 0	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>15,32</b>	15
171.-173.	Ronald	Luc	2 GJarošeBO	15	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>15,00</b>	22
171.-173.	Martin	Repčík	4 GTomkovaOL	9 6	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>15,00</b>	15
171.-173.	Emese	Szabó	4 GZKMJ Gal	4 3 8	- 0	- - - - -	- 0	- - - - -	- - - - -	<b>15,00</b>	15
174.-176.	Jan	Došek	1 G Brandýs	15	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,89</b>	15
174.-176.	Vladislav	Najvárek	1 GBezručFM	15	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,89</b>	15
174.-176.	Adéla	Zvěřinová	1 GJiříPoděb	10	- 5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,89</b>	15
177.	Pavel	Šklíba	2 GDašickáPA	- 15	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,79</b>	15
178.	Eva	Klimentová	2 GJarošeBO	- - -	9 - 5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,75</b>	15
179.	Anežka	Michálková	3 GaSOŠ Telč	4 8	- 3	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,62</b>	47
180.	Martin	Kutiš	3 G Humpolec	14	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,47</b>	14
181.	Jan	Šuta	2 GJŠkodyPŘ	14	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>14,05</b>	14
182.	Zuzana	Klimsová	1 GJMasar JI	14	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>13,81</b>	14
183.	Marie	Vonzino	2 GTomkovaOL	14	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>13,69</b>	67
184.	Adéla	Šedová	3 GJungmanLT	13	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>13,38</b>	25
185.	Ekaterina	Pichugina	0 GJarkovPH	13	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>13,03</b>	13
186.	Martina	Petráková	2 GOA Pelh	13	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>13,00</b>	13
187.-190.	Martin	Beran	1 SPŠLegioJI	13	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,64</b>	13
187.-190.	Matyáš	Kalous	1 GDomazlice	13	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,64</b>	13
187.-190.	Vladimír	Kistan	1 G Rýmařov	13	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,64</b>	13
187.-190.	Matěj	Konvalinka	1 GOA Sedlča	13	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,64</b>	13
191.	Miroslav	Mareš	4 GBudějovPH	6 6	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,27</b>	12
192.	Jakub	Kvasil	2 GMozartovaPA	7	- 5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,03</b>	12
193.-194.	Karel	Jilek	4 GKepleraPH	- -	7 5	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,00</b>	57
193.-194.	Pavel	Mikuš	4 G Mělník	12	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>12,00</b>	12
195.	Marie	Freibergová	2 G Děčín	12	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>11,89</b>	12
196.	Martin	Kopřiva	3 GMikul23PL	12	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>11,78</b>	184
197.	Markéta	Doležalová	3 GTNovákBO	11	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>11,39</b>	11
198.	Daniela	Hrbáčová	1 WichtG OS	11 0	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	- - - - -	<b>11,38</b>	11

