# Polynomy

2. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. BŘEZNA 2015

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Najděte polynom nabývající celočíselných hodnot ve všech celých číslech, který nemá všechny koeficienty celočíselné.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Pro které trojice reálných čísel $a, b, c$, kde $a \neq c$, mají polynomy

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1,$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

dva různé společné reálné kořeny?

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Najděte všechny reálné polynomy $P(x)$, které pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňují

$$x \cdot P(x-1) = (x+1) \cdot P(x).$$

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen?
Poznámka: Jak se můžeme dočíst v úvodním textu, za koeficienty polynomu $x^2$ považujeme čísla 1, 0, 0.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Nenulový polynom s celočíselnými koeficienty má alespoň dva různé kladné reálné kořeny, přičemž jeden z nich je roven 2015. Dokažte, že nějaký jeho koeficient je menší nebo rovný $-2015$.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Trojice kladných reálných čísel $a$, $b$, $c$ a $x$, $y$, $z$ mají stejný součin a stejný součet a navíc platí $\max(a, b, c) \geq \max(x, y, z)$. Dokažte, že $\min(a, b, c) \geq \min(x, y, z)$.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Najděte všechny polynomy, jejichž koeficienty jsou pouze 1 nebo $-1$, takové, že je lze rozložit na součin lineárních polynomů s reálnými koeficienty.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Je dána funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taková, že pro libovolná různá celá $k$, $l$ platí $k - l \mid f(k) - f(l)$. Navíc existuje polynom $P(x)$ takový, že $|f(k)| < P(k)$ pro každé celé $k$. Dokažte, že existuje polynom $Q(x)$ takový, že $Q(k) = f(k)$ pro všechna celá $k$.

# Polynomy

2. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1. (58; 56; 2,84; 3,0)

*Najděte polynom nabývající celočíselných hodnot ve všech celých číslech, který nemá všechny koeficienty celočíselné.* *(Kuba Krásenský)*

ŘEŠENÍ:

Takovým polynomem je například

$$\frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}.$$

Vidíme, že jeho koeficienty celočíselné nejsou. Proč nabývá ve všech bodech celočíselné hodnoty? Když za $x$ dosadíme libovolné celé číslo, jsou $x$ a $x+1$ po sobě jdoucí celá čísla, takže jedno z nich je určitě sudé. Proto je sudý i jejich součin. A když sudé číslo vydělíme dvěma, dostaneme vždy celé číslo.

POZNÁMKY:

Naprostá většina došlých řešení byla správná. Nejčastěji se vyskytoval polynom uvedený ve vzorovém řešení a jeho varianty posunuté o absolutní člen. Zdůvodnění, proč jsou všechny jeho hodnoty celočíselné, provedlo mnoho řešitelů méně elegantním, ale rovněž plně korektním způsobem: prohlásili, že $x^2$ a $x$ jsou čísla se stejnou paritou, takže $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ je součet buď dvou celých čísel, nebo dvou čísel s desetinnou částí rovnou 0,5.

Překvapilo mě, že jediný *Danil Koževnikov* zmínil přirozený způsob, jak k polynomu $\frac{1}{2}x(x+1)$ dojít – je to totiž součet prvních $x$ přirozených čísel. Kromě toho od něj pochází i nejoriginálnější z řešení, která jsem opravoval: navrhl polynom $\frac{1}{n}(x^{\varphi(n)+1} - x)$. Ten sice nefunguje, protože v Eulerově větě je mezi předpoklady i nesoudělnost $x$ a $n$, ale je pravdou, že pro každé prvočíslo $p$ bude zadání splňovat polynom $\frac{1}{p}(x^p - x)$. Danilovi v originalitě konkuroval asi jen *Marian Poljak*, který prosazoval polynom $\frac{1}{42}x(x+1)\cdots(x+41)$. *(Kuba Krásenský)*

## Úloha 2. (47; 28; 1,85; 2,0)

*Pro které trojice reálných čísel $a, b, c$, kde $a \neq c$, mají polynomy*

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1,$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

*dva různé společné reálné kořeny?* *(Kuba Krásenský)*

Řešení:
Uvažme polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jako v zadání. Pokud tyto dva polynomy mají společné kořeny $y$, potom pro ně platí $P(y) = Q(y) = 0$. Tedy $P(y) - Q(y) = 0$, z čehož dosazením a úpravou dostaneme $(a - c) \cdot y(y - 1)(y + 1) = 0$. Výrazem $a - c$ můžeme v rovnici vydělit (protože ze zadání platí $a \neq c$), a z toho plyne, že společnými kořeny zadaných polynomů mohou být pouze čísla $-1$, 0, 1. Nulu vyřadíme, protože není kořenem polynomu $P(x)$ ani $Q(x)$. Našli jsme jediné dva možné společné kořeny $-1$ a 1.

Dosazením do zadaných polynomů dostaneme soustavu rovnic pro neznámé $a$, $b$, $c$:

$$a + b + c = -2$$
$$-c + b - a = -2$$

Sečtením obou rovnic, respektive odečtením první rovnice od druhé dostaneme podmínky $b = -2$ a $a = -c$. Rovněž musí platit podmínka ze zadání, tudíž $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zadání odpovídají všechny trojice čísel $(a, b, c) = (x, -2, -x), x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Poznámky:
V této úloze lze řešitele rozdělit do dvou skupin – ty, kteří mají řešení podobné autorskému, a ty, kteří se rozhodli vytasit na tuto úlohu Viètovy vztahy. V obou skupinách se vyskytlo až znepokojivě hodně lidí, kteří udělali tutéž chybu – v rovnici dělili výrazem s proměnnou a neověřili, že nedělí nulou (a v tomto případě skutečně nulou vydělili a vyšel jim poté nesmysl). Základní problém při dělení výrazem s proměnnou (třeba $x^2 - 1$) je, že nevíme, jaké nabývá hodnoty. Tedy se nám může stát, že rovnici vydělíme nulou a tím ji naprosto zlikvidujeme. Proto se častěji používá převedení na jednu stranu a vytýkání, případně je třeba zvlášť rozebrat, kdy to, čím dělíme, je nula a ukázat, že to naše řešení neovlivní. *(Honza Krejčí)*

## Úloha 3.

(39; 34; 2,59; 3,0)

*Najděte všechny reálné polynomy $P(x)$, které pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňují*

$$x \cdot P(x - 1) = (x + 1) \cdot P(x).$$

*(David Hruška)*

Řešení:
Pomocí matematické indukce ukážeme, že polynom $P(x)$ musí mít kořen v každém bodě $x \in \mathbb{N}_0$. Pokud dosadíme $x = 0$, pak dostaneme

$$0 \cdot P(0 - 1) = (0 + 1) \cdot P(0),$$

neboli $P(0) = 0$. Předpokládejme tedy, že $x \in \mathbb{N}_0$ je kořenem polynomu $P(x)$. Ukážeme, že pak musí být kořenem i $x + 1$:

$$(x + 1) \cdot P(x + 1 - 1) = (x + 1 + 1) \cdot P(x + 1)$$
$$(x + 1) \cdot P(x) = (x + 2) \cdot P(x + 1)$$

Dle indukčního předpokladu je $P(x) = 0$, tudíž levá strana rovnice je nulová. Dostáváme tedy

$$0 = (x + 2) \cdot P(x + 1).$$

Jelikož $x + 2 > 0$, musí být $P(x + 1) = 0$, neboli $x + 1$ je také kořen polynomu $P(x)$, což jsme potřebovali dokázat.

Polynom stupně $n \in \mathbb{N}_0$ má nejvýše $n$ reálných kořenů, zatímco $P(x)$ nabývá nulové hodnoty v nekonečně mnoha bodech. Polynom řešící úlohu tudíž nemůže být nenulový. Naopak polynom $P(x) = 0$ zadání splňuje, je tedy jediným řešením zadané úlohy.

Poznámky:
Jelikož tato úloha byla poměrně přímočará, všechna správná řešení byla podobná vzorovému, někteří místo dosazení $x = 0$ dosadili $x = -1$ a poté indukci prováděli v záporných číslech. U několika řešitelů jsem se setkal s tvrzením, že $P(x) = 0$ není polynom, tudíž úloha nemá řešení, ovšem v úvodním textu bylo pouze napsáno, že u nulového polynomu nedefinujeme jeho stupeň. Nicméně pokud byl celý postup až na závěr správný, bod jsem nakonec nestrhával.

*(Tomáš Novotný)*

## Úloha 4. (36; 26; 3,61; 5,0)

*Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen?*

*(Anh Dung „Tonda" Le)*

Řešení:
Ne, žádný takový polynom neexistuje. Postupujme sporem. Mějme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

kde $n$ je nějaké sudé přirozené číslo nebo nula a $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou lichá celá čísla. Dále předpokládejme, že existují dvě nesoudělná celá čísla $p, q$, kde $q \neq 0$, taková, že $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, tedy že polynom $P$ má racionální kořen.

Předpoklad na existenci racionálního kořenu rozepišme pomocí předpisu polynomu, čímž získáme rovnost, kterou ekvivalentně upravíme vynásobením obou stran číslem $q^n$. Získáme

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$
$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n = 0.$$

Všechny členy na levé straně, až na ten poslední, jsou dělitelné $p$. Pravá strana je rovna nule, takže je také dělitelná $p$. Z toho plyne, že $p$ dělí $a_0 q^n$, ale z nesoudělnosti $p$ a $q$ už nutně $p$ dělí $a_0$. Analogicky zjistíme, že $q$ dělí $a_n$. Protože ale $a_0$ i $a_n$ jsou lichá, musí být lichá i $p$ a $q$. Tím pádem máme na levé straně součet $n + 1$ členů, z nichž každý je součinem několika lichých čísel. Levá strana je tedy rovna nějakému lichému číslu a tak získáváme kýžený spor s rovností nule, která je sudá. Tím je důkaz hotov.

Poznámky:
Větší část důkazu se vlastně zabývá důkazem matematické věty, kterou známe pod názvem *Rational root theorem.* Ta říká, že při zavedení stejného značení jako v úloze $p$ dělí $a_0$ a $q$ dělí $a_n$, a to i v případě, že $n$ je sudé a koeficienty libovolné celočíselné. Důkaz tohoto tvrzení v plné obecnosti vypadá stejně jako ten, který jsme předvedli v řešení. Kdo větu znal a vzpomněl si na ni, mohl ušetřit značné množství práce.

Co se došlých řešení týče, skutečným překvapením, které jsem zažil snad poprvé, pro mě byl fakt, že všichni řešitelé, kteří se dostali k nějakému řešení, se shodli na tom, že daný polynom neexistuje. Většina řešitelů navíc měla i správné zdůvodnění – buď to vzorové, nebo (častěji) podobné řešení, v němž se v upravené rovnosti rozebírají možnosti parit $p$ a $q$ a opět se dojte ke sporu se sudostí nuly.

Další řešení využívala Viètových vztahů nebo diskriminantu. Pro kvadratické polynomy tyto způsoby možná fungují, ale pro vyšší řády jsou Viètovy vztahy prakticky nepoužitelné a diskriminant naprosto nepoužitelný, protože podobný vzorec pro rovnosti stupňů vyšších než čtyři neexistuje. Těmto řešením jsem tedy zpravidla neuděloval více než jeden bod.

*(Martin „E.T." Sýkora)*

## Úloha 5.

(22; 11; 2,36; 1,5)

*Nenulový polynom s celočíselnými koeficienty má alespoň dva různé kladné reálné kořeny, přičemž jeden z nich je roven 2015. Dokažte, že nějaký jeho koeficient je menší nebo rovný −2015.*

*(David Hruška)*

Řešení:

Označme hledaný polynom

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou celá čísla a navíc $a_n \neq 0$. Podle zadání víme, že 2015 je kořen, a proto $P(x) = (x - 2015) \cdot Q(x)$, kde

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Matematickou indukcí od $n-1$ dolů dokážeme, že $Q(x)$ má celočíselné koeficienty. Porovnáním koeficientů ve vztahu $P(x) = (x - 2015) \cdot Q(x)$ dostaneme $a_n = b_{n-1}$, $a_0 = -2015b_0$ a $a_k = b_{k-1} - 2015b_k$ pro $k$ od 1 do $n-2$, tudíž snadno získáme základní krok, že $b_{n-1}$ je celočíselné. Předpokládejme, že $b_k$ je celočíselné, pak z $a_k = b_{k-1} - 2015b_k$ plyne celočíselnost $b_{k-1}$ a důkaz je hotov.

Úlohu dokončíme sporem. Předpokládejme, že každý koeficient polynomu $P(x)$ je větší než $-2015$. V tomto případě ukážeme, že každý koeficient $b_i$ je nekladný. Důkaz matematickou indukcí začneme u $a_0$. Víme totiž, že $-2015b_0 = a_0 > -2015$, a proto $b_0 < 1$, neboli $b_0 \leq 0$, neboť $b_0$ je celé číslo. Dále předpokládejme, že $b_k$ je nekladný, pak platí

$$-2015b_{k+1} = a_{k+1} - b_k > -2015,$$

a proto $b_{k+1} < 1$, neboli $b_{k+1} \leq 0$ a důkaz je hotov.

Protože $Q(x)$ má jen nekladné koeficienty a je nenulový, dostaneme po dosazení kladného reálného čísla záporný výsledek. To je ale spor s podmínkou ze zadání, podle které by měl mít $Q(x)$ ještě nějaký kladný kořen.

Poznámky:

Přítomnost dvou kořenů původního polynomu zavádí k tomu, abychom ho rozložili na součin kvadratického polynomu a zbytku, což nám dává složitější algebraické vztahy, se kterými se hůře manipuluje. Někteří řešitelé prohlásili, že polynom $Q(x)$ je celočíselný, což vůbec není zřejmé a je potřeba dokázat. Dokonce platí i obecnější tvrzení, že rozložíme-li monický celočíselný polynom na dva monické polynomy, pak tyto činitele musí být také celočíselné.

*(Anh Dung „Tonda“ Le)*

## Úloha 6.

(17; 10; 2,82; 3,0)

*Trojice kladných reálných čísel $a$, $b$, $c$ a $x$, $y$, $z$ mají stejný součin a stejný součet a navíc platí $\max(a, b, c) \geq \max(x, y, z)$. Dokažte, že $\min(a, b, c) \geq \min(x, y, z)$.* *(David Hruška)*

Řešení:

BÚNO predpokladajme $a \geq b \geq c > 0$, $x \geq y \geq z > 0$. Máme teda

$$\max(a, b, c) = a, \quad \max(x, y, z) = x, \quad \min(a, b, c) = c, \quad \min(x, y, z) = z.$$

Uvažujme polynómy

$$p(t) = (t - a)(t - b)(t - c) = t^3 - (a + b + c)t^2 + (ab + bc + ca)t - abc,$$
$$q(t) = (t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz.$$

Odčítaním a využitím rovností spomínaných v zadaní dostávame

$$p(t) - q(t) = (ab + bc + ca - xy - yz - zx)t.$$

Označme $k = (ab + bc + ca - xy - yz - zx)$. Pretože $a$ je kladné a najväčšie z našej šestice čísel a zároveň koreň polynómu $p$, tak po dosadení do polynómov máme $q(a) \geq 0$ a $p(a) = 0$. Potom

$$ka = p(a) - q(a) \leq 0,$$

z čoho dostávame $k \leq 0$.

Ďalej pre spor predpokladajme $c < z$. Potom je $c$ najmenšie z našej šestice čísel. Vieme, že je kladné a je koreňom polynómu $p$. Dosadíme do polynómov a máme $q(c) < 0$ a $p(c) = 0$. Z toho dostávame

$$kc = p(c) - q(c) > 0,$$

a teda $k > 0$, čo je spor. Platí preto $c \geq z$, čiže $\min(a, b, c) = c \geq \min(x, y, z) = z$.

Poznámky:

Väčšina správnych riešení sa inšpirovala názvom série a zostrojila si vyššie spomínané polynómy. Ďalej sa už postupy líšili, niektoré boli elegantné, iné viac krkolomné, ale nakoniec prišli do cieľa. Tí, ktorí polynómy nenašli, sa snažili z podmienok o súčte a súčine vyjadriť niektoré premenné, ale len málokedy sa im úlohu podarilo vyriešiť. *(Marta Kossaczká)*

## Úloha 7.

(12; 6; 2,50; 2,5)

*Najděte všechny polynomy, jejichž koeficienty jsou pouze* 1 *nebo* $-1$, *takové, že je lze rozložit na součin lineárních polynomů s reálnými koeficienty.* *(Kuba Krásenský)*

Řešení:

Nechť polynom má stupeň $n$ s reálnými kořeny $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zavedeme následující značení:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad B = \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} x_i x_j \qquad C = \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Podle zadání a Viètových vztahů víme, že $A, B, C$ se rovnají 1 nebo $-1$. Navíc platí

$$1 = A^2 = D + 2B,$$

což znamená, že $B$ je záporný, protože $D$, součet čtverců, nabývá pouze nezáporných hodnot, tudíž $B = -1$ a $D = 3$. Nyní použijeme AG nerovnost:

$$3 = D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n \sqrt[n]{\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = n \sqrt[n]{C^2} = n$$

Stačí se tedy zaměřit na polynomy stupně nejvýše 3. Pro $n = 1, 2$ snadno vyzkoušíme všechny možnosti. Můžeme si pomoci předpokladem, že vedoucí koeficient je 1, protože jinak se dá polynom vynásobit $-1$.

V případě $n = 3$ si všimneme, že musí nastat v AG nerovnosti rovnost, tedy $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2$. Součin těchto tří kořenů je $\pm 1$, a proto každý z nich je 1 nebo $-1$. Navíc platí, že $B = -1$, a proto všechny nemůžou mít stejné znaménko. Nakonec nám zůstanou kandidáti $(x - 1)(x + 1)(x + 1)$ a $(x - 1)(x - 1)(x + 1)$, které ověříme roznásobováním.

Hledané polynomy jsou tedy

$$\begin{array}{rrr} x + 1, & x^2 + x - 1, & x^3 + x^2 - x - 1, \\ x - 1, & -x^2 - x + 1, & -x^3 - x^2 + x + 1, \\ -x + 1, & x^2 - x - 1, & x^3 - x^2 - x + 1, \\ -x - 1, & -x^2 + x + 1, & -x^3 + x^2 + x - 1. \end{array}$$

Poznámky:
Kombinace Viètových vztahů a AG nerovnosti byla dosti triková, a proto přišlo pouze málo správných řešení. Někteří se snažili dokázat, že kořeny hledaných polynomů musí být 1 nebo $-1$, což nemusí platit: uvažme například $x^2+x-1$. Nesmíme také zapomenout, že nalezením horní meze pro stupeň polynomu úloha ještě nekončí, protože přímočaré ověření, které kubické polynomy vyhovují, je velice pracné a zdlouhavé. Řešitelům, kteří si všimli rovnosti v AG odhadu, jsem udělil imaginární bod. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

## Úloha 8.

(4; 2; 2,50; 2,5)

*Je dána funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taková, že pro libovolná různá celá $k$, $l$ platí $k-l \mid f(k)-f(l)$. Navíc existuje polynom $P(x)$ takový, že $|f(k)| < P(k)$ pro každé celé $k$. Dokažte, že existuje polynom $Q(x)$ takový, že $Q(k) = f(k)$ pro všechna celá $k$.* *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:
Ukážeme, že pro funkci $g(n) = f(n) - f(0)$ existuje polynom $Q$, který je jí roven. Poté bude existovat také pro funkci $f$, neboť ta je pouze posunutá o konstantu. Dle zadání $n-0 \mid f(n)-f(0)$, z čehož plyne, že $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, navíc pro každá dvě různá celá čísla $k$, $l$ platí

$$k-l \mid f(k)-f(l) = (f(k)-f(0)) - (f(l)-f(0)) = g(k)-g(l).$$

Označme $d$ stupeň polynomu $P$. Existuje právě jeden[1] polynom $Q$ stupně nejvýše $d$ takový, že $g(n) = Q(n)$ pro $n = 1, 2, \ldots, d+1$. Dále ukážeme, že $g(z) = Q(z)$ pro všechna celá čísla $z$. Mějme libovolné $n \geq 2(d+1)$. Koeficienty polynomu $Q$ jsou vždy racionální čísla (protože funkce $g$ nabývá pouze celočíselných hodnot) a můžeme najít nejmenší společný násobek jejich jmenovatelů $M$. Označme polynom $R(x) = M \cdot Q(x)$, což je jistě polynom s celočíselnými koeficienty. Pro každé $k = 1, 2, \ldots, d+1$ je

$$M \cdot (g(n) - Q(n)) = M \cdot (g(n) - g(k)) - (R(n) - R(k))$$

dělitelné[2] $n-k$. Z toho plyne

$$M \cdot (g(n) - Q(n)) \equiv 0 \pmod{\operatorname{nsn}(n-1, n-2, \ldots, n-d-1)}.$$

Dále ukážeme, že to pro dostatečně velké $n$ už musí nastat rovnost $g(n) = Q(n)$. Obě funkce $g(n)$ a $Q(n)$ jsou omezeny polynomem stupně $d$, a proto $M \cdot (g(n) - Q(n))$ je také shora omezeno nějakým polynomem stupně $d$. Dokážeme, že nejmenší spolenčný násobek uvedených čísel je zdola omezen polynomem stupně $d+1$. Všimněme si, že nsn jakýchkoliv čísel je alespoň jejich součin dělený největším společným dělitelem každé dvojice. Protože největší společný dělitel čísel $n$ a $k$ může být nejvýše roven jejich rozdílu, dostáváme následující odhad

$$\begin{aligned}\operatorname{nsn}(n-1, n-2, \ldots, n-d-1) &\geq \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-d-1)}{d^{\binom{d+1}{2}}} \geq \\ &\geq \frac{\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdots \frac{n}{2}}{d^{\binom{d+1}{2}}} \geq n^{d+1} \cdot \frac{1}{2^{d+1} \cdot d^{\binom{d+1}{2}}} = Cn^{d+1},\end{aligned}$$

kde $C$ je nějaká kladná konstanta nezávislá na $n$.

[1] Pokud o tom slyšíš poprvé, zkus si vyhledat heslo Lagrangeova interpolace.

[2] Využíváme toho, že pro polynom s celočíselnými koeficienty $R$ platí $n-k \mid R(n)-R(k)$ (viz úvodní text k této sérii).

Pro dostatečně velké $n$ již nutně

$$|M \cdot (g(n) - Q(n))| < \mathrm{nsn}(n-1, \ldots, n-d-1),$$

a proto $g(n) = Q(n)$. Tvrzení zbývá ukázat pro ostatní celá čísla. Mějme libovoné celé číslo $z$. Pro nekonečně mnoho dostatečně velkých $n$ platí, že

$$M \cdot (g(z) - Q(z)) = M \cdot (g(z) - g(n)) - (R(z) - R(n))$$

je dělitelné $z - n$, z čehož již nutně plyne rovnost $g(z) = Q(z)$ pro všechna celá čísla $z$.

Poznámky:

Přišla pouze čtyři řešení a polovina z nich byla správná. Jejich hlavní myšlenka byla stejná jako v uvedeném řešení. *(Filip Hlásek)*