Hvězdy a souhvězdí

3. jarní série — Termín odeslání: 13. dubna 2015

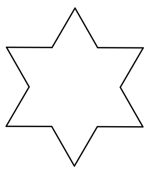
Není-li řečeno jinak, představujeme si hvězdy (a planety) jako body a všechna jejich uskupení chápeme jako rovinné útvary.

Úloha 1. (3 body)

Na hvězdné obloze existují tři souhvězdí, z nichž každé je tvořeno trojicí hvězd (každá hvězda patří pouze do jednoho souhvězdí). Víme, že uvnitř každého ze tří trojúhelníků (souhvězdí) najdeme z libovolného jiného souhvězdí právě jednu hvězdu. Nakreslete nějaké možné rozmístění těchto devíti hvězd na obloze.

Úloha 2. (3 body)

David se rozhodl vydláždit celou rovinu pomocí Davidových hvězd (viz obrázek).



Brzy ale zjistil, že se mu nedaří klást je vedle sebe tak, aby nevznikaly mezery. Proto některé z dosud nepoložených dlaždiček rozlámal, každou na dvanáct stejných rovnostranných trojúhelníků. Těmi chtěl své dláždění doplnit tak, aby byla pokrytá celá rovina, aby se žádné dlaždice nepřekrývaly a zároveň aby spolu žádné dva trojúhelníky nesousedily hranou. Mohlo se mu to podařit?

Úloha 3. (3 body)

Honza měl na své hvězdné mapě sto hvězd a změřil vzdálenost mezi každými dvěma z nich. Pak se rozhodl, že dá Tomášovi hádanku, a prozradil mu všechny vzdálenosti, které změřil, až na jednu. Prozradil mu i to, ke které dvojici hvězd patří která vzdálenost. Tomášovým úkolem bylo uhodnout zbývající vzdálenost. Po dlouhém uvažování Tomáš zjistil, že hledanou vzdálenost není schopen určit jednoznačně. Jak se to mohlo stát?

Úloha 4. (5 bodů)

V Mléčné dráze se nachází konečný počet hvězd. Dokažte, že umíme najít šest takových, že když uvažujeme šestici kružnic procházejících Zemí se středy v příslušných hvězdách, bude každá hvězda Mléčné dráhy ležet uvnitř některé kružnice.

Úloha 5. (5 bodů)

Astronomové chtějí vybrat skupinu hvězd, které pojmenují po slavných matematicích. Každý astronom hlasuje pro deset hvězd a bude spokojen, když alespoň jedna z jeho navrhovaných bude zvolena. Je známo, že pro každou šestici astronomů existuje dvojice hvězd, při jejímž zvolení bude všech šest astronomů spokojeno. Dokažte, že lze zvolit skupinu o deseti hvězdách tak, aby byli spokojení všichni astronomové.

Úloha 6. (5 bodů)

Galaxii s konečným počtem hvězd nazveme *pravidelnou*, pokud pro každé tři její hvězdy existuje hvězda, která spolu s nimi tvoří nedegenerovaný rovnoběžník[1]. Najděte všechny možné počty hvězd pravidelné galaxie.

Úloha 7. (5 bodů)

Každá hvězda má nějakou svítivost. Rovinné souhvězdí se nazývá *ostré*, pokud žádné jeho tři hvězdy neleží v přímce a žádné jeho tři jeho hvězdy se stejnými ani s po dvou různými hodnotami svítivosti netvoří tupoúhlý trojúhelník. Kolik nejvíce hvězd může ostré souhvězdí mít?

Úloha 8. (5 bodů)

Jupiter a Mars tráví nedělní odpoledne hraním her. Jupiter připraví 2000 hvězd a mezi každými dvěma most. Jupiter začíná a oba se střídají v tazích. Ve svém tahu Jupiter smaže jeden most, kdežto Mars dva nebo tři. Prohraje ten, který po svém tahu nějakou hvězdu izoluje (nevychází z ní žádný most). Který z nich má vyhrávající strategii[2]?

---

[1] Tím myslíme rovnoběžník s nenulovým obsahem.

[2] Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství nezávisle na tazích protihráče.

Hvězdy a souhvězdí

3. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

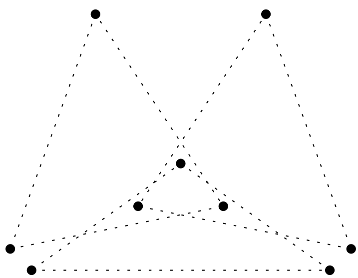
Úloha 1.

(65; 35; 2,00; 2,0)

Na hvězdné obloze existují tři souhvězdí, z nichž každé je tvořeno trojicí hvězd (každá hvězda patří pouze do jednoho souhvězdí). Víme, že uvnitř každého ze tří trojúhelníků (souhvězdí) najdeme z libovolného jiného souhvězdí právě jednu hvězdu. Nakreslete nějaké možné rozmístění těchto devíti hvězd na obloze.

(Filip Hlásek)

ŘEŠENÍ:
Tato úloha byla typu „nalezni obrázek“, jedním ze správných řešení je toto:

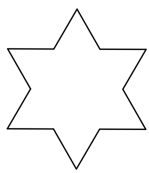


POZNÁMKY:
Úloha byla velmi jednoduchá, ale našla se velká spousta lidí, kteří si špatně vyložili frázi „z libovolného souhvězdí“. Tato fráze neznamená, že stačí vybrat jedno souhvězdí. Znamená, že ať už si vybereme jakékoliv, tak vlastnost platí. Lze si to představit tak, že se soupeřem hrajeme hru a souhvězdí nám vybírá on (a to tak, aby to pro nás bylo co nejtěžší). *(Honza Krejčí)*

Úloha 2.

(58; 48; 2,50; 3,0)

David se rozhodl vydláždit celou rovinu pomocí Davidových hvězd (viz obrázek).



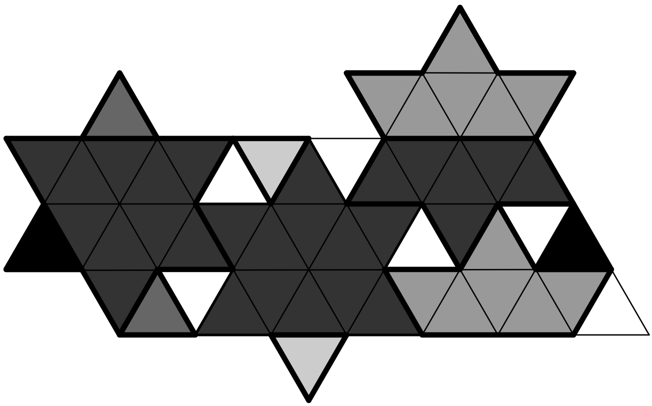
Brzy ale zjistil, že se mu nedaří klást je vedle sebe tak, aby nevznikaly mezery. Proto některé z dosud nepoložených dlaždiček rozlámal, každou na dvanáct stejných rovnostranných trojúhelníků. Těmi chtěl své dláždění doplnit tak, aby byla pokrytá celá rovina, aby se žádné dlaždice nepřekrývaly a zároveň aby spolu žádné dva trojúhelníky nesousedily hranou. Mohlo se mu to podařit?

(Kuba Krásenský)

Řešení (podle Luciena Šímy):

Umístíme vedle sebe podle zadání čtyři Davidovy hvězdy (na obrázku je jedna useklá v polovině, dalším třem z rovnoběžníku přesahuje cíp). Pak si všimneme, že pokud ohraničíme rovnoběžník o stranách délky sedm a tři trojúhelníčky, mohou na sebe tyto čtyřúhelníky snadno navazovat. Z obrázku je vidět, že při umisťování dalšího rovnoběžníku se překryjí části označené stejnou barvou. Proto bude umístění hvězd a trojúhelníků stále vyhovovat podmínkám.

Rovnoběžníky pak už jasně vydláždí celou rovinu.



Poznámky:

Úloha byla snadná na dokázání obrázkem, s čímž se většinou řešitelé spokojili. Vzhledem k bodovému ohodnocení úlohy mi dostatečně názorný obrázek stačil. Slovní vysvětlení ale nikdy neuškodí, proto bych chtěla pochválit ty, kteří si dali tu práci a popsali své úvahy. Špatných řešení bylo málo a všechny z jediného důvodu, a to vynechání informace ze zadání. Jestliže se dva trojúhelníky nemají dotýkat hranou, tak opravdu nelze uznat řešení, jehož postup je na dvou takových trojúhelnících přímo založen. Čtěte zadání pořádně!

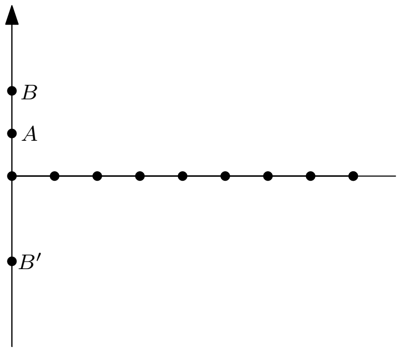
(Bára Kociánová)

Úloha 3.

(47; 37; 2,40; 3,0)

Honza měl na své hvězdné mapě sto hvězd a změřil vzdálenost mezi každými dvěma z nich. Pak se rozhodl, že dá Tomášovi hádanku, a prozradil mu všechny vzdálenosti, které změřil, až na jednu. Prozradil mu i to, ke které dvojici hvězd patří která vzdálenost. Tomášovým úkolem bylo uhodnout zbývající vzdálenost. Po dlouhém uvažování Tomáš zjistil, že hledanou vzdálenost není schopen určit jednoznačně. Jak se to mohlo stát? *(Mirek Olšák)*

Řešení:
Stačí najít dvě rozmístění hvězd, která mají stejné všechny vzdálenosti kromě jedné. Uvažme tedy následující rozmístění v rovině: 98 hvězd bude v bodech $[i, 0]$, kde $0 \leq i \leq 97$, hvězda A bude v bodě $[0, 1]$ a hvězda B bude v bodě $[0, 2]$. Ve druhém rozmístění pouze změníme polohu hvězdy B, a to tak, že ji dáme do bodu $[0, -2]$. Její vzdálenost od žádné z 98 hvězd na přímce se nezměnila a stejně tak se nezměnily vzdálenosti ostatních hvězd, které jsme nechali na místě. Rozdíl je tedy pouze ve vzdálenosti $|AB|$, což jsme chtěli.



Poznámky:
V zadání nebylo uvedeno, že hvězdy musejí být různé, takže došlo několik řešení, kde bylo 98 hvězd v jednom bodě. Někteří řešitelé se pokusili úlohu zjednodušit tím, že uvažovali pouze čtyři hvězdy a ukázali, že při postupném kreslení jim na konci zbydou dva různé body pro umístění poslední hvězdy. To se však při větším počtu hvězd obecně nestane, protože jde o průsečík více než dvou kružnic. Naprostá většina ostatních řešení byla správně. *(Martin Čech)*

Úloha 4.

(38; 32; 3,82; 5,0)

V Mléčné dráze se nachází konečný počet hvězd. Dokažte, že umíme najít šest takových, že když uvažujeme šestici kružnic procházejících Zemí se středy v příslušných hvězdách, bude každá hvězda Mléčné dráhy ležet uvnitř některé kružnice.

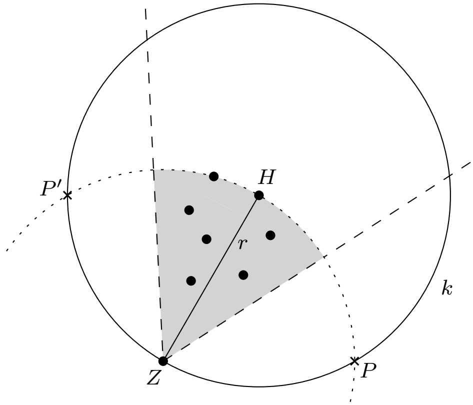
(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

Zvolme tři přímky procházející Zemí tak, aby svíraly po dvou úhel 60° a navíc žádná z nich neprocházela hvězdou (což lze, neboť hvězd je konečně mnoho). Tím se Mléčná dráha rozdělí na šest shodných úhlů s vrcholem v Zemi. V každém z úhlů obsahujícím aspoň jednu hvězdu vybereme nějakou hvězdu mající maximální vzdálenost od Země. Dokážeme, že takto vybrané hvězdy splňují podmínku ze zadání.

Vezměme si jeden z úhlů U a uvažujme nyní pouze hvězdy ležící v něm. Označme H vybranou hvězdu, Z Zemi a r vzdálenost H od Z, dále k kružnici se středem H procházející bodem Z. Chceme ukázat, že všechny hvězdy z U leží uvnitř k. Zkontruujeme ještě kružnici se středem Z procházející H a její průsečíky s k nazveme P, P'. Platí, že $|\sphericalangle HZP| = |\sphericalangle HZP'| = 60°$, neboť obě kružnice mají stejný poloměr. Úsečka ZH svírá s rameny U úhel ostře menší než 60°, takže P a P' leží vně U. Vidíme tedy, že celá kruhová výseč[1] se středem Z a poloměrem r určená úhlem U leží uvnitř k. Ale v této výseči leží všechny hvězdy (neboť leží v úhlu U a zároveň mají od Země vzdálenost maximálně r), a tedy všechny leží i uvnitř k.

[1] Přesněji celá výseč kromě bodu Z.



Kružnice kolem vybrané hvězdy

Vzali jsme libovolný z úhlů a ukázali, že všechny v něm ležící hvězdy leží uvnitř některé ze zkonstruovaných kružnic. Jelikož těchto šest úhlů dává dohromady celou rovinu, tak všechny hvězdy leží uvnitř nějaké kružnice.

Poznámky:

Převážná část správných řešení používala stejnou konstrukci. Drobným úskalím často bylo neuvažování krajních případů, kdy nějaká hvězda leží na kružnici (a tedy ne uvnitř ní). Za to jsem ale body nestrhával. (Vzorové řešení se tomuto vyhnulo zvolením dělicích přímek tak, aby neprocházely hvězdami).

Pozorný čtenář si jistě všiml, že pokud byl některý úhel prázdný, vybrali jsme hvězd méně než šest. A několik pozorných řešitelů upozorňovalo na to, že pokud je hvězd v Mléčné dráze pět a méně, tak jich dokonce ani šest vybrat nelze. Což je samozřejmě pravda, v zadání úlohy měl být požadavek vybrat *maximálně* šest hvězd, nikoli právě šest. *(Tonda Češík)*

Úloha 5.

(8; 4; 2,13; 1,0)

Astronomové chtějí vybrat skupinu hvězd, které pojmenují po slavných matematicích. Každý astronom hlasuje pro deset hvězd a bude spokojen, když alespoň jedna z jeho navrhovaných bude zvolena. Je známo, že pro každou šestici astronomů existuje dvojice hvězd, při jejímž zvolení bude všech šest astronomů spokojeno. Dokažte, že lze zvolit skupinu o deseti hvězdách tak, aby byli spokojení všichni astronomové.

(Martin Töpfer)

Řešení:

Pro nejvýše 10 astronomů taková volba triviálně existuje, dále pro zamezení nejasnostem požadujme alespoň deset astronomů.

Pokud existuje nějaký astronom, který má s každým zbylým společnou preferenci, tak zvolíme právě jeho desítku a jsme hotovi.

Pokud žádný takový neexistuje, tak zvolíme náhodného astronoma A a k němu astronoma B, který s A nemá žádnou společnou preferenci. Kdyby existoval nějaký astronom C, který nemá společnou preferenci ani s A ani s B, šestice obsahující astronomy A, B, C by nešla uspokojit dvěma hvězdami. Každý další astronom má proto společnou preferenci s A nebo s B (nebo s oběma zároveň), proto zvolením všech preferencí A i B uspokojíme všechny astronomy.

Rozdělme množinu hvězd, pro které hlasoval astronom A (resp. B), na dvě disjunktní pětiprvkové množiny A_1 a A_2 (resp. B_1 a B_2). Nyní sporem ukážeme, že jedna z množin $A_1 \cup B_1$,

$A_1 \cup B_2$, $A_2 \cup B_1$ nebo $A_2 \cup B_1$ uspokojí všechny astronomy. Pro spor předpokládejme, že žádná z těchto čtyř desetiprvkových množin nevyhovuje. To znamená, že pro každou z těchto množin existuje astronom, jehož volba se ani v jedné hvězdě neshoduje s danou množinou. Označme tyto astronomy po řadě C, D, E a F. Podle zadání by šestici astronomů A, B, C, D, E a F měly uspokojit dvě hvězdy. Aby byli spokojení astronomové A a B, musí být jedna hvězda v A_1 nebo A_2 a druhá v B_1 nebo B_2. Vyzkoušením čtyř možností, v jakých množinách mohou být dané dvě hvězdy, dostaneme, že takovouto šestici astronomů nedokážeme dvěma hvězdami uspokojit. Dostáváme spor, a tedy jedna z množin $A_1 \cup B_1$, $A_1 \cup B_2$, $A_2 \cup B_1$, $A_2 \cup B_1$ uspokojí všechny astronomy.

Poznámky:
Ukázalo se, že úloha byla velmi obtížná. Sice pro její vyřešení nebylo potřeba žádných nestandardních znalostí, ale trik s rozdělením na čtyři množiny hvězd byl na pátou úlohu asi přeci jen příliš složitý. *(Martin Töpfer)*

Úloha 6.

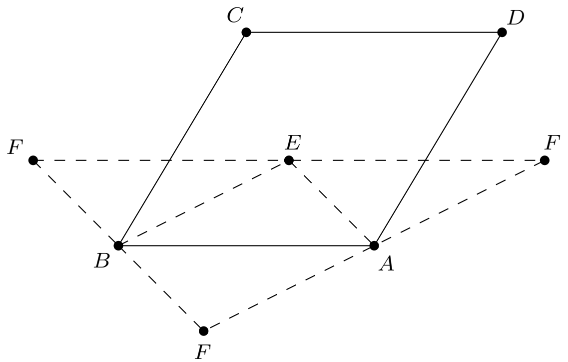
(22; 6; 1,36; 0,0)

Galaxii s konečným počtem hvězd nazveme pravidelnou, pokud pro každé tři její hvězdy existuje hvězda, která spolu s nimi tvoří nedegenerovaný rovnoběžník[2]. Najděte všechny možné počty hvězd pravidelné galaxie. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:
Žádné tři hvězdy nesmějí ležet na jedné přímce, protože by neexistovala čtvrtá hvězda, která by s nimi tvořila nedegenerovaný čtyřúhelník.

Ukážeme, že jediná možná řešení jsou 1,2 a 4. Pro každé souhvězdí s jedním nebo dvěma hvězdami podmínka platí triviálně. V souhvězdí se čtyřmi hvězdami stačí umístit hvězdy do vrcholů rovnoběžníka. Dále je zřejmé, že souhvězdí se třemi hvězdami nemůže splňovat podmínku v zadání.

Uvažujme souhvězdí s více než 4 hvězdami a vyberme tři hvězdy A, B, C takové, že trojúhelník ABC má největší obsah. K těmto třem bodům můžeme najít bod D, aby A, B, C, D tvořily rovnoběžník r, bez újmy a obecnosti leží A, B, C, D na obvodu r v tomto pořadí (jinak zpřeházíme značení bodů A, B, C). Pak každý trojúhelník s vrcholy v těchto čtyřech bodech má největší obsah. Díky předpokládané velikosti souhvězdí existuje ještě bod E. Víme, že obsahy $\triangle EAB$ a $\triangle ECD$ jsou menší než obsah trojúhelníků s vrcholy v rovnoběžníku r, a proto bod E leží mezi přímkami AB a CD. Analogicky E leží mezi přímkami AD a BC.



[2] Tím myslíme rovnoběžník s nenulovým obsahem.

K A, B, E můžeme najít bod F takový, že tyto čtyři body tvoří rovnoběžník. Pro dané body A, B, E existují tři možné polohy bodu F, přičemž všechny leží mimo rovnoběžník r, což je spor. Pravidelné souhvězdí s více než 4 hvězdami tedy neexistuje.

Poznámky:
Kromě pár řešení se stejnou myšlenkou jako ve vzorovém se drtivá většina snažila dokázat, že pokud máme víc než 4 hvězdy, pak vždy musíme přidat další hvězdy, aby podmínka o rovnoběžnících byla zachována, nebo eventuálně se objeví tři kolineární body. Bohužel se jen několika z nich podařilo mě přesvědčit, protože není vůbec jasné, proč proces přidání bodů nemůže skončit po konečně mnoha krocích. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Úloha 7.

(12; 7; 2,67; 3,0)

Každá hvězda má nějakou svítivost. Rovinné souhvězdí se nazývá ostré, pokud žádné jeho tři hvězdy neleží v přímce a žádné jeho tři jeho hvězdy se stejnými ani s po dvou různými hodnotami svítivosti netvoří tupoúhlý trojúhelník. Kolik nejvíce hvězd může ostré souhvězdí mít?

(Honza Krejčí)

Řešení:

Najprv ukážeme, že ak máme 4 hviezdy s rovnakými svietivosťami (resp. po dvoch rôznymi), tak musia tieto 4 hviezdy tvoriť obdĺžnik. Podľa zadania nemôžu žiadne tri ležať na priamke, a teda musia tvoriť nejaký štvoruholník. Ak je konvexný, tak vzhľadom na to, že súčet vnútorných uhlov je 360°, musí to byť obdĺžnik, inak jeden z vnútorných uhlov bude tupý, a teda bude existovať tupouhlý trojuholník. Ak by bol nekonvexný, tak jeden vrchol (ozn. A) je vnútri trojuholníka tvoreného zvyšnými tromi (ozn. BCD). Vieme, že:

$$360^\circ = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD + \sphericalangle DAB,$$

a teda by tam zase bol tupouhlý trojuholník.

Teraz dokážeme, že nemôže byť 5 hviezd s rovnakou alebo po dvoch rôznou svietivosťou. Pre spor predpokladajme, že máme 5 takýchto hviezd. Označme ich A, B, C, D, E. Podla predošlého pozorovania vieme, že body A, B, C, D aj A, B, C, E tvoria obdĺžnik. A teda $D = E$, čo je spor. Takže môžu byť maximálne 4 rôzne svietivosti a 4 hviezdy jednej svietivosti.

Ďalej ukážeme, že ak by boli v súhvezdí 4 rôzne svietivosti, tak toto súhvezdie môže mať maximálne 4 hviezdy. Pre spor predpokladajme, že máme 5 hviezd. Označme ich A, B, C, D, E tak, aby A, B, C, D mali rôzne svietivosti a E rovnakú ako D. Podľa prvého pozorovania vieme, že body A, B, C, D aj A, B, C, E tvoria obdĺžnik. A teda $D = E$ a máme len 4 body.

V ostrom súhvedí teda nemôže byť viac ako 12 hviezd (3 rôzne svietivosti, z každej 4 hviezdy). Dokážeme, že ostré súhvezdie s 12 hviezdami naozaj môže existovať. Zostrojíme ho. Uvažujme rovnostranný trojuholník A, B, C so stranami o dĺžke 100. Okolo každého z vrcholov umiestnime štyri hviezdy(A_1, A_2, A_3, A_4, resp. B_1, B_2, B_3, B_4, resp. ...) s rovnakou svietivosťou (odlišnou ako štvorice pri zvyšných vrcholoch) tak, aby tieto štyri tvorili štvorec s uhlopriečkou 2 a stredom v danom vrchole. Overíme, že súhvezdie tvorené hviezdami $A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4, C_1, \ldots, C_4$, je ostré. Je zrejmé, že žiadne tri hviezdy s rovnakou alebo po dvoch rôznou svietivosťou neležia na priamke. Ďalej, hviezdy s rovnakou svietivosťou tvoria iba pravouhlé trojuholníky. Ukážeme, že vzdialenosť dvoch hviezd s rôznou svietivosťou je aspoň 98 a najviac 102. BÚNO uvažujme A_1, B_1. Podľa trojuholníkových nerovností máme

$$|A_1B| \leq |A_1A| + |AB| = 101, \text{ teda}$$
$$|A_1B_1| \leq |A_1B| + |B_1B| \leq 102 \text{ a } |AB| \leq |A_1A| + |A_1B| \text{ a } |A_1B| \leq |A_1B_1| + |B_1B|,$$

teda $99 \leq |A_1B|$, a preto $98 \leq |A_1B_1|$. Takže strany trojuholníka s vrcholmi rôznej svietivosti sú všetky minimálne 98 a maximálne 102. Takýto trojuholník zrejme nemôže byť tupouhlý (podľa kosínusovej vety). Takže naše súhvezdie je naozaj ostré s 12 hviezdami.

Poznámky:
Riešení bolo pomerne málo, správnych ešte menej. Každý, kto sa k číslu 12 dopracoval, mal celý dôkaz v podstate dobre. Ostatní zadanie buď nepochopili, neuvedomili si, že trojuholníky môžu byť aj pravouhlé, alebo iba prišli k zlému menšiemu číslu. *(Marta Kossaczká)*

Úloha 8.

(15; 4; 1,20; 0,0)

Jupiter a Mars tráví nedělní odpoledne hraním her. Jupiter připraví 2000 hvězd a mezi každými dvěma most. Jupiter začíná a oba se střídají v tazích. Ve svém tahu Jupiter smaže jeden most, kdežto Mars dva nebo tři. Prohraje ten, který po svém tahu nějakou hvězdu izoluje (nevychází z ní žádný most). Který z nich má vyhrávající strategii[3]?

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:
Most nazvěme *odebratelný*, pokud po jeho odebrání nezůstane izolovaná hvězda. Označme k velikost maximální možné množiny odebratelných mostů v určité fázi hry, všechny takové množiny si označme $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Na počátku je tedy k rovno

$$\binom{2000}{2} - 1000 = 1998000,$$

neboť na konci musí zbýt minimálně 1000 mostů spojujících dvojice hvězd. O tomto k dokážeme následující tvrzení:

Tvrzení. *Smazáním kteréhokoliv odebratelného mostu mezi libovolnými hvězdami sníží Jupiter k vždy o jedna nebo o dva.*

Zjevně se smazáním libovolného odebratelného mostu k sníží alespoň o jedničku. Mohou nastat následující dvě možnosti:

(i) Když je smazaný most v nějaké maximální množině M_i odebratelných mostů, pak se k sníží právě o jedničku, neboť v M_i zůstane $k-1$ mostů.

(ii) Jinak tento most neleží v žádné takové množině. Odebráním všech mostů libovolné z těchto množin (BÚNO M_1) zůstane alespoň jedna z hvězd A nebo B, které smazaný most spojoval, izolovaná (v opačném případě bychom odebrali $k+1$ odebratelných mostů, což by byl spor s definicí k).

Jupiter sám tyto hvězdy neizoloval, tudíž mezi smazanými mosty z množiny M_1 musel být alespoň pro jednu z hvězd A, B nějaký most z ní vycházející (jehož smazáním byla příslušná hvězda izolována). Pokud tedy onen most nebo dva ponecháme nesmazané (tj. smažeme jen $k-1$ nebo $k-2$ mostů), nedostaneme žádnou izolovanou hvězdu. Tudíž lze po libovolném Jupiterově tahu stále smazat alespoň $k-2$ mostů.

Pokud tedy Jupiter sníží svým tahem k o jedna, Mars smaže (například) z M_1 libovolné tři mosty, pokud Jupiter sníží k o dva, Mars smaže z M_1 libovolné dva mosty. V obou případech se po těchto dvou tazích celkem sníží k o čtyři. Jelikož na začátku je k dělitelné čtyřmi, bude Mars touto strategií dělitelnost k čtyřmi udržovat. Na konci hry tedy zbyde na Jupitera nula odebratelných mostů, a tudíž hru vyhraje Mars.

Poznámky:
Byť osmička nepatřila v tomto ročníku k nejtěžším, správná řešení se sešla jen tři. Většina nesprávných řešení mylně předpokládala, že na konci hry musí vždy zůstat právě tisíc mostů, neboli se jich musí odebrat právě 1998000, což by znamenalo, že by Mars mohl mazat vždy právě dva mosty a vyhrál by.

[3]Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství nezávisle na tazích protihráče.

Došlá správná řešení byla založena na trochu jiné myšlence než řešení vzorové, a to na rozdělení hvězd do čtyř skupin po pěti stech a následně rozdělení mostů do skupinek podle toho, jaké typy hvězd spojují. Tyto skupinky vždy obsahovaly čtyři nebo šest mostů. V případě, že Jupiter odebral most z nějaké skupinky čtyř mostů, tak z ní Mars odebral další tři. Když Jupiter poprvé odebral most ze skupinky šesti mostů, smazal Mars dva, takže v ní zbyly tři; když z ní Jupiter odebral most podruhé, smazal Mars zbývající dva. Bohužel toto řešení vyžadovalo rozebrat poměrně velké množství případů, nicméně kroky vedoucí k jeho nalezení byly přímější než v řešení autorském. *(Tomáš Novotný)*