# Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 4. KVĚTNA 2015

*V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!*

ÚLOHA 1.

**(a)** Anička obarvila každý z bodů roviny červeně, zeleně nebo modře, přičemž každou barvu použila alespoň jednou. Dokažte, že v této rovině existuje pravoúhlý trojúhelník s různobarevnými vrcholy. (2 BODY)

**(b)** Bára obarvila každý bod ležící na obvodu rovnostranného trojúhelníka jednou ze dvou barev. Dokažte, že mezi nimi jsou tři stejně barevné vrcholy pravoúhlého trojúhelníka. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

**(a)** Kružnice $k$, $l$ a $m$ mají po dvou vnější dotyk, přičemž $k$ a $l$ se dotýkají v bodě $Q$. Přímky procházející bodem $Q$ a zbylými dvěma body dotyku protínají kružnici $m$ podruhé v bodech $X$ a $Y$. Ukažte, že $XY$ je její průměr. (2 BODY)

**(b)** Je dána kružnice $k$ nad průměrem $AB$ a body $C$, $D$ ležící na stejném oblouku $AB$. Průsečík tečen ke $k$ v bodech $C$ a $D$ označme $E$, průsečík přímek $AC$ a $BD$ označme $F$ a konečně nechť $G$ značí průsečík přímek $EF$ a $AB$. Dokažte, že body $E$, $C$, $G$, $D$ leží na jedné kružnici. (3 BODY)

ÚLOHA 3.

**(a)** Tonda dostal od Štěpána k narozeninám kartičky se všemi přirozenými čísly od 11111 do 99999. Sedl si ke stolu a nějak za sebe všechna čísla uspořádal, čímž mu vzniklo dlouhatánské číslo dělitelné číslem 11111. „To je ale náhoda!“ řekl si Tonda, ale Štěpán mu sebevědomě oponoval: „Žádná náhoda, to by se stalo při libovolném uspořádání kartiček.“ Dokažte, že měl Štěpán pravdu.

(2 BODY)

**(b)** Tonda si pro každé $n \in \{1, \ldots, 2015\}$ označil $p_n$ nejmenšího prvočíselného dělitele čísla $n^8 + 1$ a chtěl spočítat jejich součet $p_1 + p_2 + \cdots + p_{2015}$. Štěpán prohlásil, že s tím mu nepomůže, ale jako informatik dokáže určit poslední cifru tohoto součtu v šestnáctkové soustavě. Najděte ji dřív, než to Štěpán naprogramuje. (3 BODY)

ÚLOHA 4.

**(a)** Reálné číslo $x$ splňuje rovnost $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. Spočítejte hodnotu $\sin 2x$. (2 BODY)

**(b)** Ukažte, že

$$\frac{2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \cdots + 180\sin 180^\circ}{90} = \operatorname{cotg} 1^\circ.$$

(3 BODY)

Úloha 5.

**(a)** Kolem kulatého stolu bylo před rautem přichystáno dvacet židlí. Papalášů však dorazilo více, než se čekalo, takže pak na každé židli seděli dva, a navíc byli každý z jiné politické strany. Situace byla prohlášena za neúnosnou a každou židli musel jeden člověk opustit. Mohli to vždy provést tak, aby pak dva spolustraníci nikdy neseděli na sousedních židlích? (2 body)

**(b)** V PraSestánu mají poslanci dvou politických stran zajímavý způsob hlasování: ve sněmovně stojí řada $n$ židlí a na ně si střídavě sedají poslanci těchto stran, ovšem tak, že nikdy nesmějí sedět dva poslanci stejné strany vedle sebe (aby si místo práce nepovídali). Pokud již některá ze stran nemůže usadit žádného svého poslance, prohrává tak toto hlasování. V závislosti na $n$ určete, která ze stran (při optimálním postupu) hlasování vyhraje. (3 body)

Úloha 6.

**(a)** Víme, že polynom $x^2 - (a + b + c)x + (ab + bc + ca)$ nemá reálný kořen. Dokažte, že čísla $a$, $b$ a $c$ jsou všechna nenulová a mají stejné znaménko. (2 body)

**(b)** Polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ má tři reálné kořeny a platí $a + b + c \in \langle -2, 0\rangle$. Dokažte, že pak některý z kořenů leží v intervalu $\langle 0, 2\rangle$. (3 body)

Úloha 7.

**(a)** Jupiter a Zeus si spolu měří síly. Jupiter připraví šestnáct hvězd uspořádaných do čtvercové mřížky $4 \times 4$, přičemž některé z hvězd jsou rozsvícené a některé ne. Zeus pak může zvolit libovolný řádek, sloupec nebo diagonálu (celkem existuje čtrnáct diagonál, jejich délka se pohybuje od jedné do čtyř) a změnit stav všech příslušných hvězd (zhasnuté rozsvítí a naopak). To může opakovat libovolně dlouho. Zeus by chtěl, aby nakonec všechny hvězdy svítily. Jaké počáteční stavy může Jupiter zvolit, aby Diovi tuto radost nedopřál? (2 body)

**(b)** Zeus si hraje se svým modelem vesmíru. Jedná se o rovinu s dírami v mřížových bodech[1], do kterých se dají umisťovat hvězdy. Sotva na ni umístil dvě hvězdy, došlo mu, že je chtěl umístit naopak. Je mu ale trapné hvězdy sundat, a tak může vždy jen jednu z hvězd otočit kolem druhé tak, aby opět zapadla do nějakého mřížového bodu. Může takto Zeus hvězdy prohodit v konečném počtu tahů? (3 body)

[1] Mřížovými body myslíme ty body roviny, které mají celočíselné souřadnice.

# Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1. (40; 28; 2,38; 2,0)

**(a)** *Anička obarvila každý z bodů roviny červeně, zeleně nebo modře, přičemž každou barvu použila alespoň jednou. Dokažte, že v této rovině existuje pravoúhlý trojúhelník s různobarevnými vrcholy.* *(David Hruška)*

**(b)** *Bára obarvila každý bod ležící na obvodu rovnostranného trojúhelníka jednou ze dvou barev. Dokažte, že mezi nimi jsou tři stejně barevné vrcholy pravoúhlého trojúhelníka.* *(Honza Krejčí)*

ŘEŠENÍ:

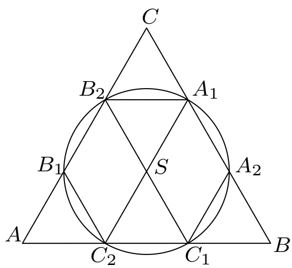
**(a)** Řešme tuto úlohu sporem a předpokládejme, že existuje takové obarvení roviny, že v něm nenajdeme trojbarevný pravoúhlý trojúhelník.

Uvažme tři různobarevné body, které tvoří trojúhelník. Takovou trojici umíme najít vždy. Kdybychom našli pouze trojici různobarevných bodů na přímce, pak mimo přímku vybereme bod a ten se zbylými dvěma jinak obarvenými body tvoří pravoúhlý trojúhelník.

V tomto trojúhelníku zakreslíme všechny výšky. Vzhledem k tomu, že v rovině dle předpokladu neexistuje trojbarevný pravoúhlý trojúhelník, musí mít pata výšky stejnou barvu jako vrchol, ze kterého je vedena. Potom ovšem na žádné výšce již nemůže ležet bod jiné barvy, protože jinak by tento bod, pata výšky a jeden z krajních bodů strany, na kterou je výška kolmá, tvořily trojbarevný pravoúhlý trojúhelník. Nicméně všechny výšky se protínají v jednom bodě, a ten má být tedy obarven třemi různými barvami najednou, což je spor.

**(b)** Na stranách trojúhelníka označíme body, které se nacházejí třetinu délky od vrcholu a sestrojíme z nich pravidelný šestiúhelník (jako na obrázku). Pro spor předpokládejme, že existuje obarvení, ve kterém nevznikne jednobarevný pravoúhlý trojúhelník.

Nyní pokud by protilehlé vrcholy (říkejme jim $P$ a $Q$) šestiúhelníku byly obarveny stejnou barvou, pak všechny čtyři jeho zbývající vrcholy musejí být obarveny druhou barvou, protože leží na Thaletově kružnici nad úsečkou $PQ$. Nicméně libovolné 3 body z těchto čtyř tvoří pravoúhlý trojúhelník. Proto pro každou dvojici protilehlých vrcholů šestiúhelníku platí, že každý z nich je obarven jinou barvou.



Šestiúhelník můžeme (až na symetrii) obarvit pouze dvěma způsoby: buď vybarvíme tři po sobě jdoucí vrcholy stejnou barvou, nebo je barvíme napřeskáčku (jeden vrchol jednou barvou, jeho sousedy druhou barvou). Není těžké si rozmyslet, že v obou případech najdeme stranu trojúhelníku, na které leží dva různobarevné body šestiúhelníku.

Zaměřme se na tyto různobarevné body na straně trojúhelníka. Bez újmy na obecnosti nechť to jsou body $C_1$ a $C_2$. Úsečky $C_1A_1$ a $C_2B_2$ jsou kolmé na $AB$ a navíc krajní body každé úsečky jsou obarvené stejně. Je to důsledek toho, že protilehlé body šestiúhelníku mají různou barvu. Nakonec vezmeme bod $A$, ten tvoří jednobarevný pravoúhlý trojúhelník s body $C_1A_1$ nebo $C_2B_2$.

Poznámky:

Většina řešení byla správně. V některých případech se vyskytly nepřesnosti, například v části **(a)** několik řešitelů bez zdůvodnění předpokládalo, že vždy najde trojbarevný trojúhelník – tento fakt si zaslouží zdůvodnit. Docela závažnou chybou v **(b)** byly konstrukce, které se opíraly o to, že když si na jedné straně trojúhelníku zvolím interval a poté vedu kolmice krajními body tohoto intervalu, tak mi na straně nebo stranách vytnou interval „dvojnásobné délky“. Tedy když začnu s jednobarevným intervalem, pak ve „vytnutém“ intervalu nemůžu mít žádný bod první barvy. Poté iterací dojdu ke sporu. Základní problém tohoto postupu je v tom, že se mi docela snadno může stát, že žádný jednobarevný interval nenajdu a potom řešení nefunguje.

*(Honza Krejčí)*

## Úloha 2.

(33; 29; 2,52; 2,0)

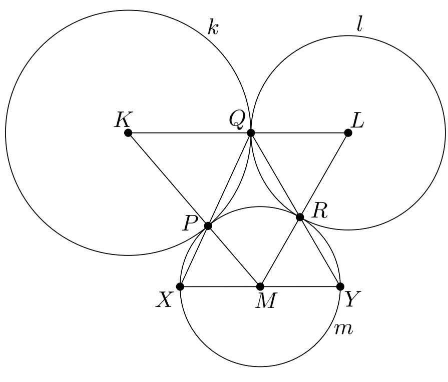
**(a)** *Kružnice $k$, $l$ a $m$ mají po dvou vnější dotyk, přičemž $k$ a $l$ se dotýkají v bodě $Q$. Přímky procházející bodem $Q$ a zbylými dvěma body dotyku protínají kružnici $m$ podruhé v bodech $X$ a $Y$. Ukažte, že $XY$ je její průměr.* (Martina Vaváčková)

**(b)** *Je dána kružnice $k$ nad průměrem $AB$ a body $C$, $D$ ležící na stejném oblouku $AB$. Průsečík tečen ke $k$ v bodech $C$ a $D$ označme $E$, průsečík přímek $AC$ a $BD$ označme $F$ a konečně nechť $G$ značí průsečík přímek $EF$ a $AB$. Dokažte, že body $E$, $C$, $G$, $D$ leží na jedné kružnici.*

*(Honza Krejčí)*

Řešení:

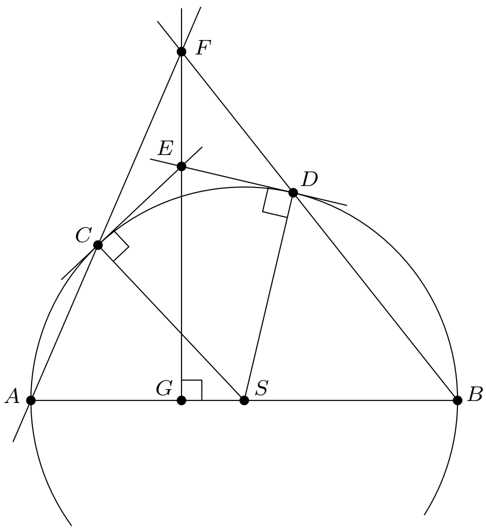
**(a)** Označme $K$, $L$, resp. $M$ středy kružnic $k$, $l$, resp. $m$. Dále nechť $P$ a $R$ jsou postupně body dotyku kružnic $m$ a $k$, resp. $m$ a $l$. Bod dotyku dvou kružnic je zároveň jejich střed stejnolehlosti se záporným koeficientem, tudíž bod $P$ je střed stejnolehlosti, ve které se kružnice $k$ zobrazí na kružnici $m$, tedy bod $K$ na bod $M$ a bod $Q$ na bod $X$. Díky tomu platí $KQ \parallel MX$. Analogicky $LQ \parallel MY$, ale bod $Q$ leží na přímce $KL$, a proto $MX \parallel MY$, navíc $M$ leží na přímce $XY$, z čehož plyne, že $XY$ je průměr.



**(a)** podle Tomáše Konečného – využívající kruhovou inverzi:
Uvažujme kruhovou inverzi se středem v bodě $Q$ a takovým poloměrem, aby se zachovala kružnice $m$. Chceme totiž, aby řídící kružnice byla kolmá na $m$. Rozmyslete si, že toho lze vždy dosáhnout. Obraz kružnice $k$ je přímka dotýkající se kružnice $m$, přičemž jejich bod dotyku je obraz bodu $P$, tudíž se jedná o bod $X$. Analogicky se kružnice $l$ zobrazí na přímku dotýkající se kružnice $m$ v bodě $Y$. Kružnice $k$ a $l$ se dotýkají v $Q$, a proto jejich obrazy budou rovnoběžné přímky, z čehož plyne, že $XY$ je průměr kružnice $m$.

**(b)** Nejprve vyšetříme případ, kdy $A$, $C$, $D$, $B$ leží na kružnici v tomto pořadí, pak bod $F$ bude ležet vně kružnice. Dále střed úsečky $AB$ označme $S$ a nechť $|\sphericalangle BAF| = \alpha$, $|\sphericalangle ABF| = \beta$.

$$|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle DAB| = \alpha - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta - 90^\circ.$$




Díky úsekovému úhlu u vrcholu $C$ dostaneme

$$|\sphericalangle ECD| = |\sphericalangle CAD| = \alpha + \beta - 90^\circ.$$

Totéž platí pro $|\sphericalangle EDC|$, tudíž

$$|\sphericalangle CED| = 360^\circ - 2(\alpha + \beta),$$

což je dvojnásobek $|\sphericalangle CFD| = 180^\circ - \alpha - \beta$, a proto uděláme-li kružnici se středem $E$ a poloměrem $EC$, pak na téhle kružnici také leží bod $D$, protože dvě tečny z jednoho bodu mají stejnou délku, a také bod $F$. Trojúhelník $CEF$ je tedy rovnoramenný se základnou $CF$.

$$|\sphericalangle CEF| = 2 \cdot |\sphericalangle CDF| = 2 \cdot (180^\circ - |\sphericalangle CDB|) = 2 \cdot |\sphericalangle CAB| = 2\alpha,$$
$$|\sphericalangle CFE| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle CEF|) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha.$$

Bod $G$ je tedy pata kolmice z $E$ na $AB$. Poloměr kružnice je kolmý na tečnu v bodě dotyku, a proto všechny tři body $G$, $C$, $D$ leží na Thaletově kružnici nad průměrem $ES$, z čehož plyne, že $GCED$ je tětivový čtyřúhelník.

Pokud pořadí bodů na kružnici je $A$, $D$, $C$, $B$, pak definujme $F' = AD \cap BC$. Bod $F$ je nyní orthocentrum trojúhelníka $ABF'$, kterým musí procházet i $F'E$, neboť jsme výše ukázali, že $F'E$ je kolmá na $AB$. Bod $G$ je tedy pořád pata kolmice z $E$ na $AB$.

Poznámky:
Drtivá většina řešitelů se vypořádala s částí (a) bez problému. V části (b) přišlo bohužel jen několik řešení. Klíčem bylo zjistit, že $G$ je projekce bodu $E$ na $AB$, což navádí k přikreslení středu průměru $AB$, poté stačí se orientovat v tětivových čtyřúhelnících a chytře úhlit. V geometrických úlohách, kde se vyskytují průsečíky protějších stran nebo úhlopříček tětivového čtyřúhelníka, se též dají uplatnit poláry a póly. Dá se dokázat, že všechny body $E$, $F$, $F'$ leží na poláře průsečíku přímek $AB$ a $CD$, která je kolmá na průměr $AB$.

*(Anh Dung „Tonda“ Le)*

## Úloha 3.

(29; 21; 2,21; 2,0)

**(a)** *Tonda dostal od Štěpána k narozeninám kartičky se všemi přirozenými čísly od* 11111 *do* 99999. *Sedl si ke stolu a nějak za sebe všechna čísla uspořádal, čímž mu vzniklo dlouhatánské číslo dělitelné číslem* 11111. *„To je ale náhoda!“ řekl si Tonda, ale Štěpán mu sebevědomě oponoval: „Žádná náhoda, to by se stalo při libovolném uspořádání kartiček.“ Dokažte, že měl Štěpán pravdu.*

*(Štěpán Šimsa)*

**(b)** *Tonda si pro každé $n \in \{1, \ldots, 2015\}$ označil $p_n$ nejmenšího prvočíselného dělitele čísla $n^8+1$ a chtěl spočítat jejich součet $p_1+p_2+\cdots+p_{2015}$. Štěpán prohlásil, že s tím mu nepomůže, ale jako informatik dokáže určit poslední cifru tohoto součtu v šestnáctkové soustavě. Najděte ji dřív, než to Štěpán naprogramuje.*

*(David Hruška)*

Řešení:
**(a)** Nejprve si všimneme, že

$$10^5 = 100000 = 11111 \cdot 9 + 1 \equiv 1 \pmod{11111},$$

umocněním této kongruence na libovolné přirozené číslo $k$ dostaneme i $10^{5k} \equiv 1 \pmod{11111}$. Pokud za sebe v nějakém pořadí poskládáme čísla na kartičkách, dostaneme číslo $n$, které jde zapsat jako

$$n = a_0 + 10^5 a_1 + 10^{10} a_2 + \cdots + 10^{5\cdot 88888} \cdot a_{88888} \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{88888} \pmod{11111},$$

kde $a_i$ jsou čísla na kartičkách. Z kongruence výše vidíme, že číslo $n$ je dělitelné 11111 právě tehdy, když je součet čísel na všech kartičkách dělitelný 11111. Tonda však už jednou číslo dělitelné 11111 dostal, takže součet čísel na všech kartičkách opravdu 11111 dělitelný je, z čehož plyne, že ať za sebe kartičky poskládáme libovolně, bude vzniklé dlouhé číslo také vždycky dělitelné 11111.

**(b)** Zajímá nás zbytek součtu $p_1 + \cdots + p_{2015}$ po dělení 16. Pro lichá $n$ je zřejmě $p_n = 2$, lichých čísel od 1 do 2015 je 1008, takže součet přes lichá $n$ vyjde 2016, což je číslo dělitelné 16. Výsledek bude tedy kongruentní součtu $p_n$ přes sudá $n$. Pro sudá $n$ je $p_n > 2$, a tak ze zadání

$$n^8 \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p_n}.$$

Umocněním této kongruence na druhou získáme

$$n^{16} \equiv 1 \pmod{p_n}.$$

Z toho plyne, že řád[1] čísla $n$ modulo $p_n$ je 16 pro všechna sudá $n$. Protože $p_n$ dělí $n^8+1$ a $p_n$ je prvočíslo, jsou čísla $p_n$ a $n$ nesoudělná a z Malé Fermatovy věty

$$n^{p_n - 1} \equiv 1 \pmod{p_n}.$$

[1] *Řád* čísla $n$ modulo $p$ je nejmenší přirozené $r$, pro které $n^r \equiv 1 \pmod{p}$.

Kongruence $n^k \equiv 1 \pmod{p_n}$ nastane právě tehdy, když řád čísla $n$ modulo $p_n$ dělí číslo $k$, v našem případě tak $16 \mid p_n - 1$, čili $p_n \equiv 1 \pmod{16}$. Protože sudých čísel od 1 do 2015 je 1007, dostáváme

$$p_1 + \cdots + p_{2015} \equiv 1007 \equiv 15 \pmod{16}$$

a poslední cifra tohoto součtu v šestnáctkové soustavě je $F$.

Poznámky:
S částí (a) si většina řešitelů poradila bez problémů. Bod jsem strhával těm, kteří pořádně (nebo vůbec) nezdůvodnili, že stačí ukázat dělitelnost součtu čísel na všech kartičkách číslem 11111. Naprostá většina řešitelů na konci řešení tento součet počítala, místo aby si ulehčila práci a prohlásila, že jeho dělitelnost číslem 11111 plyne ze zadání.

Za řešení části (b) si ti, kteří postupovali podle vzorového řešení, vybojovali imaginární bod – konkrétně jde o *Rada Švarce*, *Jana Jurku* a *Ondreje Bínovského*. Zbylí řešitelé většinou sporem dokázali, že $p_n$ musí být tvaru $16k + 1$, a jejich řešení byla mnohem delší. Většina špatných řešení tvrdila, že čísla tvaru $n^8 + 1$ budou pro sudá $n$ vždy prvočísly. To vůbec není pravda, zkuste si rozložit na součin číslo $8^8 + 1$.

Jestliže Ti něco ze vzorového řešení části (b) není jasné – například pokud jsi nikdy neslyšel, co je to řád prvku modulo nějaké číslo, nebo neznáš ono zmíněné známé tvrzení, doporučuji Ti podívat se do loňského seriálu o teorii čísel[2]. Tam určitě najdeš odpovědi na své otázky.

*(Martin Čech)*

## Úloha 4.

(39; 25; 2,00; 2,0)

**(a)** *Reálné číslo $x$ splňuje rovnost $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$. Spočítejte hodnotu $\sin 2x$.*

*(David Hruška)*

**(b)** *Ukažte, že*

$$\frac{2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + \cdots + 180\sin 180^\circ}{90} = \operatorname{cotg} 1^\circ.$$

*(David Hruška)*

Řešení:

**(a)** Zadanou rovnost upravíme pomocí platného vztahu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ do tvaru

$$(\sin^2 x)(\sin x - 1) = (\cos^2 x)(1 - \cos x).$$

Levá strana je nekladná, pravá nezáporná, obě musí být tedy rovny nule. Vzhledem k tomu, že pro žádné $x$ neplatí $\sin x = \cos x = 1$, je alespoň jedno z čísel $\sin x$, $\cos x$ nulové, a tedy $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 0$.

**(b)** Pomocí identity $\sin x = \sin(180^\circ - x)$ upravíme levou stranu posčítáním členů tvaru $k\sin(k^\circ)$ a $(180 - k)\sin(180^\circ - k^\circ)$:

$$\frac{180\sin 2^\circ + 180\sin 4^\circ + \cdots + 180\sin(88^\circ) + 90\sin 90^\circ}{90}.$$

Dále trikově rozšíříme:

$$\frac{2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2\sin 4^\circ \sin 1^\circ + \cdots + 2\sin(88^\circ \sin 1^\circ) + \sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}$$

[2] *mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf*

a použijeme identitu $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$, kterou snadno obdržíme ze součtového vzorce pro kosinus:

$$\frac{\cos(2^\circ-1^\circ)-\cos(2^\circ+1^\circ)+\cos(4^\circ-1^\circ)+\cdots-\cos(88^\circ+1^\circ)+\sin 1^\circ}{\sin 1^\circ},$$

kde se skoro všechny členy odečtou a zbyde

$$\frac{\cos 1^\circ-\cos 89^\circ+\sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}=\frac{\cos 1^\circ-\sin 1^\circ+\sin 1^\circ}{\sin 1^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}=\operatorname{cotg} 1^\circ,$$

což jsme měli dokázat.

Poznámky:
Část (a) mnoho lidí „řešilo obrázkem“, tedy z grafu funkce $f(x)=\sin^3 x+\cos^3 x$ vyčetli, že na intervalu $[0,2\pi)$ jsou jedinými řešeními rovnice $f(x)=1$ čísla 0 a $\pi/2$, pro která tvrzení úlohy platí. Takový postup ovšem není plnohodnotným řešením, protože graf jsme schopni pouze přibližně načrtnout a nemůže tedy sloužit jako podklad korektního důkazu. Dalo by se namítat, že moderní matematický software často umí řešit i složité rovnice přesně (tedy ne jen přibližně numericky), ale naše úlohy nejsou myšleny jako zábava pro počítače :-) Je samozřejmě v pořádku pomocí softwaru získat o úloze přehled, ověřit si nějakou domněnku. Potom je ale třeba vše pořádně dokázat. V těchto případech jsem s přihlédnutím k jednoduchosti úlohy a malému bodovému rozpětí uděloval nula bodů. S částí (b) nebyly velké problémy, kromě vzorového se vyskytla ještě řešení, která součet vyjádřila jako reálnou část částečného součtu geometrické posloupnosti komplexních jedniček $e^{i\frac{n\pi}{90}}$. *(David Hruška)*

## Úloha 5.

(30; 16; 1,63; 2,0)

**(a)** *Kolem kulatého stolu bylo před rautem přichystáno dvacet židlí. Papalášů však dorazilo více, než se čekalo, takže pak na každé židli seděli dva, a navíc byli každý z jiné politické strany. Situace byla prohlášena za neúnosnou a každou židli musel jeden člověk opustit. Mohli to vždy provést tak, aby pak dva spolustraníci nikdy neseděli na sousedních židlích?* *(David Hruška)*

**(b)** *V PraSestánu mají poslanci dvou politických stran zajímavý způsob hlasování: ve sněmovně stojí řada $n$ židlí a na ně si střídavě sedají poslanci těchto stran, ovšem tak, že nikdy nesmějí sedět dva poslanci stejné strany vedle sebe (aby si místo práce nepovídali). Pokud již některá ze stran nemůže usadit žádného svého poslance, prohrává tak toto hlasování. V závislosti na $n$ určete, která ze stran (při optimálním postupu) hlasování vyhraje.* *(Filip Hlásek)*

Řešení:
**(a)** Rozebereme dva možné případy:

(i) Na židlích se nacházejí zástupci alespoň tří stran. Potom tedy existuje taková dvojice sousedních židlí, že na nich sedí papaláši z alespoň tří různých stran. Označme si tyto židle čísly 20 a 1 (po směru hodinových ručiček). Posaďme na židli 1 člena té politické strany, která není zastoupena na židli 20. Následně postupně usazujme papaláše na židle po směru hodinových ručiček tak, aby platila zadaná podmínka (což vždy lze, neboť předchozí židlí máme zakázanou pouze jednu politickou stranu, ale na aktuální židli si lze vybírat ze dvou). Takto postupně rozesadíme papaláše na všechny židle, musíme ovšem zkontrolovat, zda na židlích 20 a 1 nesedí zástupci stejných stran. To se ale stát nemůže, neboť jsme na začátku vybrali na židli 1 člena té strany, která na židli 20 vůbec není zastoupena.

(ii) Pokud se na židlích nacházejí papaláši pouze ze dvou stran, musejí být obě strany nutně zastoupeny na každé židli. V tom případě nám ovšem stačí posadit zástupce jedné strany na sudé a zástupce druhé strany na liché židle.

**(b)** Označme si začínající stranu jako $A$ a druhou stranu jako $B$. Nejprve vyřešíme speciální případy:

Pokud $n = 0$, nemá $A$ koho posadit, tudíž vyhraje $B$. Jestliže $n = 1$, pak naopak zjevně vyhraje $A$.

Pro zbylá $n$ ukážeme, že vyhraje strana $B$. Nazvěme prvního usazeného politika ze strany $A$ premiérem. Dále řekněme, že židle je *$k$-důležitá*, pokud je mezi ní a premiérem $k-1$ dalších židlí. Strana $B$ tedy nejprve usadí svého poslance na jednu z krajních židlí, což vždy může, neboť $A$ obsadila nejvýše jednu z nich. Poté bude strana $B$ odpovídat na tahy strany $A$ následovně:

Pokud strana $A$ usadila politika na $k$-důležitou židli, pak strana $B$ usadí svého člena na sousední $(k-1)$-důležitou židli. Tento tah vždy může provést, neboť pokud by (pro spor) nemohla, tak by se na sousední $(k-1)$- či $(k-2)$-důležité židli již musela nacházet strana $B$ (strana $A$ na $(k-1)$-důležité židli být nemůže, neboť by nemohla hrát na židli $k$-důležitou). Jelikož ale vždy, když sedí poslanec strany $B$ na $l$-důležité židli, sedí na sousední $(l+1)$-důležité židli poslanec strany $A$, případně tato židle neexistuje (byla-li to krajní), tak nový poslanec strany $A$ se může posadit až na $l+3$-důležitou židli. Tudíž na sousedních $(l+1)$- a $(l+2)$-důležitých židlích strana $B$ poslance nemá, což je spor.

Po libovolném tahu strany $A$ tedy dokáže strana $B$ usadit svého poslance, má tudíž neprohrávající strategii. Ovšem jelikož je počet židlí konečný, musí po určité době hlasování vyhrát.

Poznámky:

Obě úlohy byly docela pracné na důkladné promyšlení všech případů. I když se část (a) dala řešit více způsoby, většina správných řešení postupovala podobně jako ve vzoráku. V části (b) se ale bohužel sešla pouze dvě správná řešení. Ostatní řešitelé vyřešili pouze případ sudého $n$, kde stačilo hrát symetricky, zatímco pro lichá $n$ jejich řešení nefungovalo. Těmto řešením jsem tedy za část (b) uděloval jen jeden bod. *(Tomáš Novotný)*

## Úloha 6.

(30; 26; 2,70; 2,0)

**(a)** *Víme, že polynom $x^2 - (a+b+c)x + (ab+bc+ca)$ nemá reálný kořen. Dokažte, že čísla $a$, $b$ a $c$ jsou všechna nenulová a mají stejné znaménko.* *(Kuba Krásenský)*

**(b)** *Polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ má tři reálné kořeny a platí $a+b+c \in \langle -2, 0\rangle$. Dokažte, že pak některý z kořenů leží v intervalu $\langle 0, 2\rangle$.* *(David Hruška)*

Řešení:

**(a)** Pretože polynóm nemá reálny koreň, jeho diskriminant je záporný:

$$(a+b+c)^2 - 4(ab+bc+ca) < 0.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc &< 0,\\ a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc &< 4bc,\\ (b+c-a)^2 &< 4bc. \end{aligned}$$

Ľavá strana je zrejme nezáporná, takže na to, aby platila nerovnosť, musia mať $b$ a $c$ rovnaké znamienka (špeciálne musia byť nenulové). Analogicky sa dopracujeme k nerovnosti

$$(b+a-c)^2 < 4ab$$

a dostávame, že $a$ a $b$ sú nenulové a majú rovnaké znamienka. A teda všetky tri $a, b, c$ majú rovnaké znamienka.

**(b)** Označme korene našeho polynómu $r_1, r_2, r_3$. Potom

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Dosadíme do polynómu jednotku a máme $1 + a + b + c = (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3)$. Vieme, že $a + b + c \in \langle -2, 0 \rangle$, a teda

$$1 + a + b + c = (1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Pre spor predpokladajme, že žiaden z koreňov neleží v $\langle 0, 2 \rangle$. Potom žiaden z činiteľov z poslednej rovnosti neleží v $\langle -1, 1 \rangle$. Súčin troch čísel, ktoré sú v absolútnej hodnote väčšie ako jeden, je tiež v absolútnej hodnote väčší ako jeden, a teda dostávame spor s

$$(1 - r_1)(1 - r_2)(1 - r_3) \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Preto aspoň jeden koreň leží v $\langle 0, 2 \rangle$.

Poznámky:
Takmer každý z vás využil nerovnosť plynúcu zo zápornosti diskriminantu. S touto nerovnosťou ste sa už popasovali rôzne. Väčšina čiastočne upravila ľavú stranu na štvorec a potom rozoberala možnosti znamienok. Druhú časť úlohy odovzdalo omnoho menej ľudí, no skoro všetci ju mali správne. *(Marta Kossaczká)*

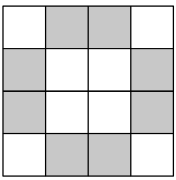
## Úloha 7.

(24; 16; 1,83; 2,0)

**(a)** *Jupiter a Zeus si spolu měří síly. Jupiter připraví šestnáct hvězd uspořádaných do čtvercové mřížky $4\times4$, přičemž některé z hvězd jsou rozsvícené a některé ne. Zeus pak může zvolit libovolný řádek, sloupec nebo diagonálu (celkem existuje čtrnáct diagonál, jejich délka se pohybuje od jedné do čtyř) a změnit stav všech příslušných hvězd (zhasnuté rozsvítí a naopak). To může opakovat libovolně dlouho. Zeus by chtěl, aby nakonec všechny hvězdy svítily. Jaké počáteční stavy může Jupiter zvolit, aby Diovi tuto radost nedopřál?* *(Kuba Krásenský)*

**(b)** *Zeus si hraje se svým modelem vesmíru. Jedná se o rovinu s dírami v mřížových bodech*[3]*, do kterých se dají umisťovat hvězdy. Sotva na ni umístil dvě hvězdy, došlo mu, že je chtěl umístit naopak. Je mu ale trapné hvězdy sundat, a tak může vždy jen jednu z hvězd otočit kolem druhé tak, aby opět zapadla do nějakého mřížového bodu. Může takto Zeus hvězdy prohodit v konečném počtu tahů?* *(Štěpán Šimsa)*

Řešení:
**(a)** Políčka, která sousedí hranou s právě třemi dalšími políčky (tedy ta vybarvená na následujícím obrázku) nazveme *zajímavá*.



Každá řádka i každý sloupec obsahuje právě dvě zajímavé hvězdy, úhlopříčka vždy dvě nebo žádnou. Pokud Zeus přepne řádek (či sloupec nebo úhlopříčku) se dvěma zajímavými hvězdami, mohou nastat tři možnosti:

(i) Jedna přepínaná zajímavá hvězda svítila a druhá ne, počet svítících zajímavých hvězd se tedy nezmění.

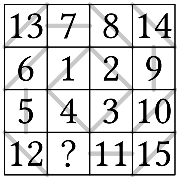
[3] Mřížovými body myslíme ty body roviny, které mají celočíselné souřadnice.

(ii) Obě přepínané zajímavé hvězdy svítily, pak počet svítících zajímavých hvězd klesne o dvě.

(iii) Ani jedna z přepínaných zajímavých hvězd nesvítila. V tom případě se počet svítících zajímavých hvězd zvýší o dvě.

Parita počtu svítících zajímavých hvězd se tak nemění, a pokud bude na začátku svítit lichý počet zajímavých hvězd, nemůže Zeus zařídit, aby na konci svítilo všech osm zajímavých hvězd.

Na druhou stranu, pokud svítí na začátku sudý počet zajímavých hvězd, může Zeus rozsvítit všechny hvězdy podle následujícího obrázku.



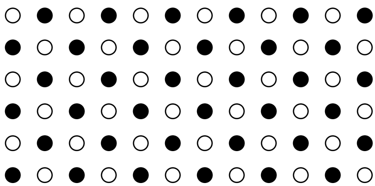

Projde postupně políčka od toho s číslem 1 do toho s číslem 15, a když narazí na políčko, na němž hvězda nesvítí, přepne úhlopříčku podle vyznačeného směru. Tím nikdy nezmění stav hvězdy s nižším číslem, než je číslo aktuálního tahu, a proto po provedení postupu budou svítit všechny hvězdy s čísly 1 až 15. Protože se parita počtu svítících zajímavých hvězd neměnila, bude stále svítit sudý počet zajímavých hvězd. Bude tedy svítit i hvězda s otazníkem a tím všechny hvězdy.

**(b)** Podle Rada Švarce:

Řekneme, že mřížový bod je *lichý*, resp. *sudý*, pokud je lichý, resp. sudý součet jeho souřadnic. Prvně ukážeme, že se nemění parita mřížových bodů jednotlivých hvězd. Mějme hvězdy na souřadnicích $[a, b], [x, y]$, a první z nich otočme na souřadnice $[c, d]$. Protože vzdálenost první hvězdy od druhé má být stále stejná a dále platí $k^2 \equiv k \pmod 2$, můžeme psát

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (c-x)^2 + (d-y)^2,$$
$$(a-x) + (b-y) \equiv (c-x) + (d-y) \pmod 2,$$
$$a + b \equiv c + d \pmod 2.$$

Nyní pro spor předpokládejme dvě hvězdy, které je možné prohodit, s nejmenší možnou vzájemnou vzdáleností (nejmenší možnou vzdálenost můžeme zvolit, protože druhá mocnina vzdálenosti je přirozené číslo). Pokud by jedna hvězda byla v sudém mřížovém bodě a druhá v lichém, zjevně je není možné prohodit. Nechť tedy jsou obě hvězdy v mřížových bodech se stejnou paritou (bez újmy na obecnosti sudých). Pak se při prohazování tyto hvězdy pohybují celou dobu po sudých mřížových bodech.



Všimneme si, že sudé mřížové body také tvoří mřížku – jen $\sqrt{2}$-krát větší a otočenou o $45°$. Pokud si tedy celý obrázek $\sqrt{2}$-krát zmenšíme a otočíme o $45°$, dostaneme opět prohození dvou hvězd po mřížových bodech, což je spor s minimalitou vzdálenosti.

Poznámky:
Snad termín krátce po soustředění, snad géniové zodia káli, snad osmapadesátá vyšší inteligence se spikli proti nebohé úloze. Ačkoli ani jedna z částí (a), (b) nebyla příliš obtížná, valná část řešitelů poslala jen jednu z nich a zcela správné řešení části (b) dorazilo jen jedno od *Kuby Löwita*. Ve vzorovém řešení zmíněný *Rado Švarc* si elegancí svého postupu vysloužil imaginární bod, ale vzhledem k tomu, že si neuvědomil, že sudé body jsou „našikmo“, neušel bodové ztrátě.

Vzhledem k tomu, že zadání nebylo zcela exaktní v tom, co se po řešitelích chce, rozhodl jsem se v části (a) být benevolentní a uděloval plné dva body už za nalezení jedné konfigurace, kterou Zeus nerozsvítí (pokud tam byl i argument, proč ji nerozsvítí). I část (b) někteří vyřešili jen pro speciální případ, kdy jsou hvězdy vedle sebe – to jsem hodnotil jedním bodem ze tří za klíčovou myšlenku s šachovnicovým obarvením. *(Mirek Olšák)*