# Trigonometric functions

$4^{\text{TH}}$ AUTUMN SERIES DATE DUE: $6^{\text{TH}}$ JANUARY 2015

*Pozor, u této série přijímáme pouze řešení napsaná anglicky!*

PROBLEM 1. (3 POINTS)
How many solutions of the equation $\sin(2014x) = 0$ are there for $x \in [0, \pi]$?

PROBLEM 2. (3 POINTS)
Show that every solution of the equation[1]

$$\tan\left(\sin^{2014} x\right) = \tan\left(\cos x^{2015}\right)$$

is also a solution of

$$\sin^{2014} x = \cos x^{2015}.$$

PROBLEM 3. (3 POINTS)
Find all solutions of $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$, where $x \in [0, 2\pi)$.

PROBLEM 4. (5 POINTS)
Is there a function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+y) + \sin x + \cos y| < 2\,?$$

PROBLEM 5. (5 POINTS)
The internal angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ of triangle $PIG$ satisfy

$$(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\beta + \sin\gamma) : (\sin\alpha + \sin\gamma) = 7 : 8 : 9.$$

Find the value of $\cos\alpha$.

PROBLEM 6. (5 POINTS)
A gadget has two buttons $S$ and $C$ and a display. At first, the display shows 1. If $S$ (or $C$) is pressed when a number $x$ is shown on the display, this number is rewritten to $\sin x$ (or $\cos x$). What is the minimum and the maximum value that can be displayed after 2015 presses? (Note that we can change the buttons during the process, so one can start with pressing $C$ three times, then press $S$ eight times and so on. Also assume that the gadget works with radians.)

PROBLEM 7. (5 POINTS)
Let $x$, $y$ and $z$ be positive real numbers such that $x + y + z = \pi/2$. Prove that

$$\cos(x-y)\cos(y-z)\cos(z-x) \geq 8\sin x \sin y \sin z.$$

[1] The notation $\sin^{2014} x$ means the same as $(\sin x)^{2014}$.

Problem 8. (5 points)

Phil constructed a black box. Given any real number $x$ as an input, this magical device was able to show $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ on its display as an output, as required by its operator.[2] Phil then started to play with his product. First he chose 0 as the input. After that, when the box showed him the output, he used this output number as the next input. Show that by cleverly choosing the functions that the black box used in each step, Phil could generate any non-negative rational number in a finite sequence of steps. Note that the black box works in radians.

[2] If the required operation could have been done with the number.

# Trigonometric functions

4TH AUTUMN SERIES VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Problem 1.

(77; 69; 2,68; 3,0)

*How many solutions of the equation* $\sin(2014x) = 0$ *are there for* $x \in [0, \pi]$? *(Míša Hubatová)*

ŘEŠENÍ:
Funkce sinus má hodnotu nula právě v celočíselných násobcích čísla $\pi$. Proto jsou řešeními rovnice $\sin(2014x) = 0$ všechna $x$ splňující $2014x = n\pi$ pro nějaké celé číslo $n$. Odtud pro $x \in \langle 0, \pi \rangle$[1] dostáváme, že všechna řešení dané rovnice jsou $x = \frac{n\pi}{2014}$, kde $n = 0, 1, \ldots, 2014$. Úloha má tedy 2015 řešení.

POZNÁMKY:
Máme-li určit počet všech řešení, nestačí nalézt 2015 čísel, která úlohu řeší. Je také potřeba vysvětlit, že neexistují žádná další řešení. *(Míša Hubatová)*

## Problem 2.

(63; 48; 2,33; 3,0)

*Show that every solution of the equation*[2]

$$\tan\bigl(\sin^{2014} x\bigr) = \tan\bigl(\cos x^{2015}\bigr)$$

*is also a solution of*

$$\sin^{2014} x = \cos x^{2015}.$$

*(Martin „E. T." Sýkora)*

ŘEŠENÍ:
Chceme ukázat, že pokud $x$ splňuje první rovnici, musejí být argumenty funkce tangens stejné. Víme, že funkce $\operatorname{tg} x$ je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, tedy prostá. Proto pro každé $a, b \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kde $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b$, platí $a = b$. Zbývá nám zjistit, zda $\sin^{2014} x$, $\cos x^{2015}$ náleží tomuto intervalu.

Funkce $\sin x$ nabývá hodnot z $\langle -1, 1 \rangle$ a pro každé $a \in \langle -1, 1 \rangle$ je $a^{2014} \in \langle 0, 1 \rangle$. Funkce $\cos x$ nabývá hodnot z $\langle -1, 1 \rangle$ a umocněním $x$ se obor hodnot nezmění, neboť $x^{2015}$ stále probíhá všechna reálná čísla.

Zjevně $\langle -1, 1 \rangle \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, čili tangens je prostý na $\langle -1, 1 \rangle$. Pokud tedy $x$ řeší rovnici

$$\operatorname{tg}(\sin^{2014} x) = \operatorname{tg}(\cos x^{2015}),$$

platí i $\sin^{2014} x = \cos x^{2015}$.

---

[1] Možná jste si všimli, že v zadání této série se uzavřené intervaly značily pomocí $[a, b]$ a funkce tangens pomocí tan, zatímco v řešení píšeme $\langle a, b \rangle$ a tg. Nespletli jsme se, jde pouze o rozdíl mezi češtinou a angličtinou. Pokud půjdete studovat matematiku na vysokou školu, uvidíte však, že hranaté závorky značí uzavřený interval zcela běžně i u nás.

[2] The notation $\sin^{2014} x$ means the same as $(\sin x)^{2014}$.

Poznámky:
Naprosté většině řešení nebylo co vytknout. Délka takových se pohybovala od tří vět do popsané stránky, podle toho, co kteří řešitelé považovali za zřejmé. Ačkoli samozřejmě platí, že pokud si nejste jistí známostí nějakého tvrzení, je lepší ho dokázat nebo aspoň vysvětlit, všeho s mírou. Například snad není třeba rozebírat, že funkce tangens je rostoucí na každém intervalu své periody.

Několik málo špatných řešení zapomnělo na periodičnost funkce tangens, případně ukazovalo, že pokud platí druhá rovnice, platí i první. Ano, druhá úloha bývá jednoduchá, ale ne až takto triviální. *(Bára Kociánová)*

## Problem 3.

(67; 49; 2,33; 3,0)

*Find all solutions of* $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$, *where* $x \in [0, 2\pi)$. *(Filip Hlásek)*

Řešení:
Upravujme nejprve zadanou rovnici:

$$\begin{aligned}\sin x - \sqrt{3}\cos x &= 2,\\ \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x &= 1,\\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x &= 1,\\ \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) &= 1.\end{aligned}$$

Funkce $\sin y$ je rovna jedné právě pro $y$ tvaru $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. V našem případě tedy

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \text{takže} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

V zadaném intervalu leží jediná z těchto hodnot, a to $\frac{5\pi}{6}$.

Poznámky:
Uvedené řešení používající součtový vzorec je poměrně trikové, a proto jsem ho odměňoval imaginárním bodem. Běžnějším postupem bylo umocnění zadané rovnice na druhou, což vedlo ke dvěma řešením, z nichž jedno neprošlo zkouškou. Takový postup byl mnohem náchylnější na chyby a někteří řešitelé zkoušku vůbec neprovedli a tvrdili, že obě nalezené hodnoty jsou řešeními původní rovnice.

Na závěr bych ještě chtěl upozornit na to, že z rovnosti $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ neplyne rovnost $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$, neboť $\sin x$ může být i záporný. *(Filip Hlásek)*

## Problem 4.

(49; 44; 4,53; 5,0)

*Is there a function* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *such that for all* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+y) + \sin x + \cos y| < 2\,?$$

*(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:
Uvažme pouze nerovnici $|\sin x + \cos y| < 2$. Ta je evidentně splněná pokaždé kromě těch situací, kdy sinus a kosinus nabývají stejných hodnot, a to 1 nebo $-1$. Tedy pokud chceme, aby funkce existovala, musí pro dvojice $x$, $y$, pro které vnitřek této absolutní hodnoty nabývá hodnoty 2 nebo $-2$, splňovat $f(x+y) \in (-4, 0)$, respektive $f(x+y) \in (0, 4)$. Ovšem první situace je dosaženo například pro $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ a druhé pro $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -\pi$. V obou případech je $x + y = \frac{\pi}{2}$. To znamená, že by v jednom bodě funkce musela nabývat dvou různých hodnot, a to odporuje definici funkce.

Poznámky:
Drtivá většina řešení byla správná. Řekl bych, že i anglický komentář byl na dobré úrovni. Všechna správná řešení se opírala o stejnou myšlenku jako autorské řešení, někdy byla pouze aplikovaná na jiný součet $x + y$. Dále se vyskytlo několik pokusů definovat danou funkci zvlášť pro součet 2, $-2$, a ostatní případy. Bohužel autoři zapomněli ověřit, zda zadané extrémní případy nesplývají.

*(Honza Krejčí)*

## Problem 5.

(53; 51; 4,43; 5,0)

*The internal angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ of triangle $PIG$ satisfy*

$$(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\beta + \sin\gamma) : (\sin\alpha + \sin\gamma) = 7 : 8 : 9.$$

*Find the value of* $\cos\alpha$. *(Filip Hlásek)*

Řešení:
Zadání můžeme přepsat pomocí tří rovností

$$\begin{aligned} \sin\alpha + \sin\beta &= 7x, \\ \sin\beta + \sin\gamma &= 8x, \\ \sin\alpha + \sin\gamma &= 9x \end{aligned}$$

pro nějaké $x \in \mathbb{R}$. Sečtením prvních dvou rovností a odečtením třetí dostaneme $2\sin\beta = 6x$, tedy $\sin\beta = 3x$. Dosazením do druhé rovnosti pak dostaneme $\sin\gamma = 5x$, a konečně dosazením do třetí rovnosti zjistíme, že $\sin\alpha = 4x$. Platí tedy

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 4 : 3 : 5.$$

Díky sinové větě víme, že délky stran trojúhelníka jsou ve stejném poměru jako siny protilehlých úhlů, takže můžeme psát

$$a : b : c = 4 : 3 : 5,$$

kde $a$, $b$, $c$ jsou po řadě strany naproti úhlům $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Délky stran splňují $a^2 + b^2 = c^2$, takže podle Pythagorovy věty je trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem $\gamma$. Hodnotu $\cos\alpha$ tedy snadno spočítáme jako $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$.

Poznámky:
Většina řešitelů postupovala podobně: nějak si upravili vztah ze zadání a pak použili sinovou větu, případně ještě kosinovou (pokud si neuvědomili, že trojúhelník je pravoúhlý). Někteří místo sinové, resp. kosinové věty využili součet úhlů v trojúhelníku a součtové vzorce, a k výsledku se tak dobrali o něco komplikovanější, avšak rovněž korektní cestou.

Častým nedostatkem ostatních řešení bylo, že jejich autoři si tipli nebo drze předpokládali, že trojúhelník bude pravoúhlý, a jiné možnosti nevyloučili. *(Ondra Cífka)*

## Problem 6.

(34; 31; 3,24; 3,0)

*A gadget has two buttons $S$ and $C$ and a display. At first, the display shows* 1. *If $S$ (or $C$) is pressed when a number $x$ is shown on the display, this number is rewritten to* $\sin x$ *(or* $\cos x$*). What is the minimum and the maximum value that can be displayed after* 2015 *presses? (Note that we can change the buttons during the process, so one can start with pressing $C$ three times, then press $S$ eight times and so on. Also assume that the gadget works with radians.)*

*(Alexander „Olin“ Slávik)*

Řešení:
Představme si, že náš přístroj má místo tlačítka $C$ tlačítko $T$, které z čísla $x$ na displeji udělá číslo $\frac{\pi}{2} - x$. Jelikož platí identita $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, můžeme jeden stisk tlačítka $C$ interpretovat jako stisk $T$ a následně $S$. Ptáme se tedy na největší a nejmenší hodnotu, kterou můžeme na tomto pozměněném přístroji získat po 2015 stiscích tlačítka $S$.

Všimněme si, že všechna čísla, která se mohou na displeji přístroje objevit, patří do intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí nerovnost $\sin x < x$, takže stisk tlačítka $S$ vždy způsobí zmenšení čísla na displeji.

Nyní indukcí ukážeme, že nejmenší hodnoty dosáhneme, budeme-li mít před každým stiskem $S$ na displeji nejmenší možné číslo. Pro 2015-tý stisk to platí, neboť funkce sinus je na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí. Předpokládejme nyní, že to platí pro $(2015-k)$-tý stisk, a ukažme to i pro $(2015-(k+1))$-tý stisk.

Kdyby mezi $(2015 - (k + 1))$-tým a $(2015 - k)$-tým stiskem $S$ bylo stisknuto tlačítko $T$, pak by před $(2015 - k)$-tým stiskem $S$ bylo na obrazovce číslo větší nebo rovné $\frac{\pi}{2} - 1$. To ale není nejmenší možné – aplikováním $T$ na začátku získáme $\frac{\pi}{2} - 1$ a následným používáním $S$ toto číslo snížíme, takže v důsledku dosáhneme menšího čísla. Proto mezi krokem $2015 - (k + 1)$ a $2015 - k$ tlačítko $T$ použito není, tedy po kroku $k + 1$ je nejmenší možné číslo, a z toho, že je sin na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, je nejmenší možné číslo i před krokem $2015 - (k + 1)$.

Tím jsme dokonce získali algoritmus na získání nejmenšího čísla po 2015 krocích: Na začátku si vybereme, zda zmáčknout či nezmáčknout $T$, abychom dostali nižší číslo. Jelikož $1 > \frac{\pi}{2} - 1$, tak tlačítko $T$ zmáčkneme, a poté zmáčkneme 2015krát tlačítko $S$. V řeči původní kalkulačky zmáčkneme jednou $C$ a pak 2014krát $S$.

A jak dostaneme maximum po 2015 krocích? Před posledním zmáčknutím $S$ chceme na obrazovce naopak největší možné číslo. Kdybychom však bezprostředně předtím nezmáčkli $T$, nemohlo by číslo před posledním krokem být větší než 1. Pokud naopak $T$ před posledním krokem zmáčknuto bylo, získáme největší možné číslo před 2015-tým krokem tak, že usilujeme o nejmenší možné číslo po provedení 2014-tého kroku. To již umíme obdobou minulého případu (v důkazu nahradíme 2015 za 2014) – zmáčknutím $T$ a následně 2014krát $S$. Číslo před zmáčknutím druhého $T$ je určitě menší než $\frac{\pi}{2} - 1$, takže po zmáčknutí bude větší než 1. Tedy tento postup je určitě výhodnější, než když před posledním krokem $T$ nezmáčkneme. Výsledný postup na neupravené kalkulačce tedy vypadá takto: Nejprve zmáčkneme $C$, potom 2013krát $S$ a potom znovu $C$.

Poznámky:
Přestože řešení vypadá na první pohled složitě, jde pouze o to, rozmyslet si základní vlastnosti sinu a kosinu a neztratit se v nerovnostech (nebo doufat, že se opravující ztratí taky :)). Spousta z Vás úlohu vyřešila úplně správně, ještě více našlo správný algoritmus bez pořádného zdůvodnění. Většina chyb u druhé části řešitelů vycházela z toho, že automaticky předpokládali, že pokud chtějí nejmenší číslo na konci, musí samozřejmě chtít největší číslo v každém kroku, což však není bez zdůvodnění jasné (a například při hledání maxima už to neplatí). Líbil se mi nápad s prohozením tlačítek, protože potom už pracujeme pouze s jednou rostoucí funkcí (ještě je teda potřeba okomentovat prohazování argumentů, ale to už se udělá jednoduše). Za to si *Jan Soukup* a *Filip Bialas* vysloužili $+i$. Další $+i$ dostal *Danil Koženikov* za neobyčejně přehledné řešení, ze kterého by si většina řešitelů mohla (měla) vzít příklad :). Nebylo to zřejmé ze zadání, ale k získání plného počtu bodů stačil postup bez přesného výsledku. Přesto většina řešitelů napsala, že výsledné minimum je přibližně 0,03 a maximum asi 0,999. *(Martin Čech)*

## Problem 7.

(16; 9; 2,75; 4,5)

*Let $x$, $y$ and $z$ be positive real numbers such that $x + y + z = \pi/2$. Prove that*

$$\cos(x - y)\cos(y - z)\cos(z - x) \geq 8 \sin x \sin y \sin z.$$

*(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Řešení:
Jelikož $x, y, z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, platí $\cos x > 0$, $\sin 2x > 0$ a obdobně pro $y$ a $z$. Díky tomu můžeme nerovnost vynásobit $8 \cos x \cos y \cos z$ a dostaneme ekvivalentní nerovnost:

$$2\cos(x-y)\cos z \cdot 2\cos(y-z)\cos x \cdot 2\cos(z-x)\cos y \geq 64 \sin x \cos x \sin y \cos y \sin z \cos z.$$

Nyní si všimneme, že $2\cos(x-y)\cos z$ lze získat ze vzorců pro součet a rozdíl kosinu $x-y$ a $z$:

$$\begin{aligned} 2\cos(x-y)\cos z &= 2\cos\frac{(x-y+z)+(x-y-z)}{2}\cos\frac{(x-y+z)-(x-y-z)}{2} = \\ &= \cos(x-y+z)+\cos(x-y-z). \end{aligned}$$

Dosadíme-li $z = \frac{\pi}{2} - x - y$, dostaneme:

$$\begin{aligned} &\cos\left(x-y+\frac{\pi}{2}-x-y\right)+\cos\left(x-y-\left(\frac{\pi}{2}-x-y\right)\right) = \\ &= \cos\left(-2y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2x + \sin 2y. \end{aligned}$$

Pokud nyní upravíme pravou stranu zadané nerovnosti podle vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, dostaneme, že zadaná nerovnost je ekvivalentní následující nerovnosti:

$$(\sin 2x + \sin 2y)(\sin 2y + \sin 2z)(\sin 2z + \sin 2x) \geq 8 \sin 2x \sin 2y \sin 2z.$$

Tato nerovnost je však součinem tří cyklických obměn AG nerovnosti

$$\sin 2x + \sin 2y \geq 2\sqrt{\sin 2x \sin 2y},$$

čímž je důkaz hotov.

Poznámky:
Přišlo relativně malé množství řešení a ještě méně jich bylo úspěšných. Chtěl bych vyzdvihnout řešení *Martina Vrabce*, který se použitím Mollweidova vzorce vyhnul většině goniometrických úprav. Ostatní se úpravám nejen nevyhnuli, ale občas je používali celkem „náhodně“ a doufali, že jim z toho nakonec nějak řešení vyjde. Bohužel se našlo i několik řešení, která po chvíli úprav končila mlhou o rychlosti klesání různých funkcí. V žádném z těchto řešení jsem ale pro takové úvahy nenašel důvěryhodné odůvodnění a tomu odpovídalo i jejich bodové hodnocení. *(Martin Töpfer)*

## Problem 8.

(9; 6; 3,00; 5,0)

*Phil constructed a black box. Given any real number $x$ as an input, this magical device was able to show $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ on its display as an output, as required by its operator.*[3] *Phil then started to play with his product. First he chose $0$ as the input. After that, when the box showed him the output, he used this output number as the next input. Show that by cleverly choosing the functions that the black box used in each step, Phil could generate any non-negative rational number in a finite sequence of steps. Note that the black box works in radians.* *(David Hruška)*

Řešení:
Dokážeme, že umíme získat dokonce každé číslo tvaru $\sqrt{\frac{a}{b}}$, kde $a, b \in \mathbb{N}$ a $(a, b) = 1$ (takové číslo budeme nazývat *odmocninou*). Postupujme indukcí podle $a + b$. Pokud $a + b = 2$, máme

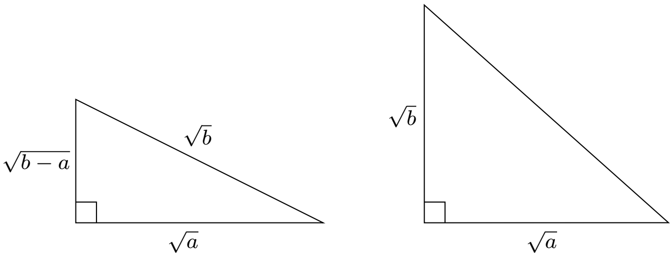
[3] If the required operation could have been done with the number.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 1 = \cos 0$. Nechť nyní $a + b > 2$, $a \neq b$ (jedničku už jsme vyrobili) a všechny odmocniny s nižším součtem čitatele a jmenovatele než $a + b$ již umíme dostat. Rozlišíme dva případy:

(1) Pokud $a < b$, pak

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right),$$

což snadno nahlédneme z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky $\sqrt{b}$ a odvěsnami délek $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b-a}$ (díky odmocninám a Pythagorově větě se skutečně jedná o pravoúhlý trojúhelník). Navíc odmocnina $\sqrt{\frac{a}{b-a}}$ má součet čitatele a jmenovatele $b < a + b$, takže ji z indukčního předpokladu umíme dostat. Hodnota $\operatorname{arctg} x$ náleží pro $x > 0$ intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, takže $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{b-a}}$ je skutečně úhel v našem trojúhelníku naproti odvěsně délky $\sqrt{a}$.




(2) Pokud $a > b$, využijeme nejprve minulého kroku k získání $\sqrt{\frac{b}{a}}$ a poté máme

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\left(\sin\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

což lze opět snadno ověřit v pravoúhlém trojúhelníku o odvěsnách délek $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$. Postupně dostaneme úhel naproti odvěsně délky $\sqrt{b}$, pak jeho sinus, pak úhel naproti odvěsně délky $\sqrt{a}$ a nakonec kýženou odmocninu. Korektnost použití funkcí arctg a arccos si můžeme rozmyslet analogicky minulému případu.

Tím je důkaz indukcí ukončen.

Poznámky:

Na osmičku nebyla úloha moc těžká. Po odhalení finty s odmocninami už šlo jen o to, jak řešení co nejlépe uchopit, ke kterémuž účelu asi nejlépe posloužila právě indukce. Přesto se sešlo jen devět řešení – pět z nich obdrželo přes občasné drobné prohřešky plný počet bodů. Doufám, že to mohu aspoň částečně přičítat pozdě opravené chybě v zadání a příště se s osmou úlohou utká více řešitelů.

Dva řešitelé se pokoušeli dokázat, že lze získat každé kladné reálné číslo (resp. celý interval $(0, 1)$), což není možné, protože jakýkoliv interval obsahuje reálných čísel „moc“. Pro podrobné vysvětlení doporučuji nahlédnout do seriálu z 21. ročníku v našem archivu[4]. *(David Hruška)*

[4] *mks.mff.cuni.cz/archive/21/10.pdf*