

Seriál – Letem grafovým světem I

Přestože matematika zahrnuje spoustu hezkých oblastí, mnohé z nich na střední škole moc nepotkáš. I proto se v PraSátku zavedla tradice seriálů na pokračování, kde se Ti snažíme představit právě některé z těchto odvětví. V těchto a následujících dvojích komentářích vždy najdeš jeden jeho díl a trojici úloh, k jejichž úspěšnému zdoání by Ti mělo stačit přečíst a pochopit obsah již vydaných částí. Kromě samotného výkladu látky v seriálu potkáš i několik cvičení (a návodů, jak na ně), kde si můžeš řešení zkusit „nanečisto“. Do celkového bodového hodnocení se Ti, na rozdíl od běžných sérií, započítají všechny soutěžní úlohy, které zašleš.

Jak už možná víš, tématem letošního (již osmnáctého) seriálu jsou grafy a budeme Tě jimi provázet my, Peter „ π tr“ Korcsok a Martin „E.T.“ Sýkora. Pokud by se Ti v následujícím textu něco nelíbilo nebo bys něčemu nerozuměl(a), můžeš nás kontaktovat na chatu⁵ na našich internetových stránkách nebo nám můžeš napsat e-mail. Přitom můžeš psát na „obecnou“ e-mailovou adresu mks@mff.cuni.cz nebo přímo nám dvěma (to preferujeme) na adresy, které naleznáš na stránkách v sekci „Organizátoři“.

A o čem vlastně ta teorie grafů je? To je velmi dobrá otázka, ale odpověď na ni v tomto odstavci nečekej. Onou odpovědí by totiž měl být celý seriál, který Ti ukáže, co zhruba se v teorii grafů dá studovat. Rozhodně ale ani on nedokáže v plném rozsahu popsat tuto obrovskou oblast matematiky. Mohli bychom se zde teď rozpisovat, proč se vlastně matematici takzvanými grafy zabývají (mimo to, že je to pěkná matematika). Ale protože toho zatím o grafech moc nevíme, pustíme se raději do výkladu. A až se něco naučíme, tak si i řekneme, k čemu se to dá využít v reálném světě. Rovnou ale prozradíme, že pátá úloha letošní první série byla právě z teorie grafů.

Celý výklad je přitom rozdělen do tří dílů. Začátek prvního z nich právě pročítáš. Ve zbytku se naučíš naprosté základy teorie grafů, které uslyšíš a uvidíš ještě mockrát, ale které jsou zároveň naprosto zásadní pro další práci s grafy. Zbylé dva díly se Ti dostanou do rukou v jarní části semináře. Ve druhém díle si ukážeme něco, čemu se odborně říká „systém různých reprezentantů“, ale není potřeba se toho bát, a taky si zkusíme nějaké grafy nabarvit. Ve třetím díle pak naše pouť skončí studiem takzvaných průnikových grafů.

Co to tedy ten graf je?

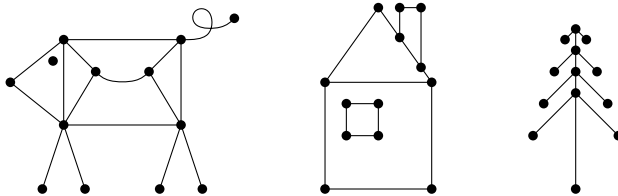
Na střední jsi už určitě potkal(a) mnoho grafů – třeba graf funkce $y = x^2$ nebo $y = \sin x$. Pokud něco podobného očekáváš i tady, musíme Tě zklamat. Grafem totiž budeme rozumět něco úplně jiného, a sice poměrně abstraktní strukturu, kterou nejlépe popisuje následující definice. Věříme, že Tě moc nevyděsí.

⁵Při psaní na chat ale dávej pozor, abys (ani omylem) nepomáhal(a) ostatním se soutěžní sérií.

Definice 1. Graf je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V představuje množinu vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.^{6,7}

Množinu vrcholů grafu G budeme často psát jako $V(G)$ nebo V_G , podobně pak množinu hran $E(G)$ nebo E_G . Abychom se vyhnuli budoucím komplikacím, budeme uvažovat pouze grafy s neprázdnou a konečnou množinou vrcholů.

Protože tohle se dost špatně představuje a ještě hůř se s tím pracuje, často si při uvažování nad zapeklitým grafovým problémem pomáháme obrázky. Tam vrcholy jednoduše znázorníme puntíky a hrany budou představovat křivky s konci v patřičných puntíciích. Třeba tady jsou tři takové grafy na třinácti vrcholech.



A proč vlastně grafy zkoumáme? Mnoho věcí z běžného života se dá reprezentovat právě pomocí grafů. Stačí se podívat na mapu Českých drah nebo silniční síť – vrcholy jsou stanice nebo města a hrany představují přímé spojení mezi nimi. Dalším příkladem může být „graf přátelství“ určité skupiny lidí – každý člověk tam tvoří vrchol, přičemž spojení hranou budou ti, kteří se přátelí. Jindy grafy popisují vztahy mezi úplně abstraktními věcmi, třeba v teorii čísel – hrany mohou představovat dvojice soudělných čísel.

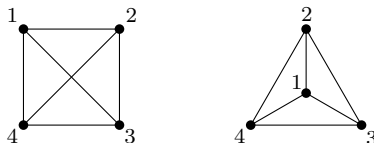
Definice 2. Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} = (V, E')$, kde $E' = \binom{V}{2} \setminus E$.

Tedy, volně řečeno, doplněk je něco jako „opačný“ graf – dvojice vrcholů je v \overline{G} spojena právě tehdy, když není spojena v G .

Cvičení 3. Rozmysli si, že doplněk doplňku je vlastně původní graf.

Izomorfismus

Jak už bylo zmíněno, grafy si budeme poměrně často kreslit. Toto nakreslení ale zdaleka nemusí být jednoznačné. Třeba graf (V, E) s $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a $E = \binom{V}{2}$ může být nakreslen oběma z následujících způsobů.



Proto potřebujeme nějakou metodu, jak určit, kdy jsou dva obrázky tentýž graf.

⁶Tato písmena nejsou náhodná, pocházejí z anglických výrazů pro vrchol (*vertex*, v množném čísle *vertices*) a hranu (*edge*).

⁷Symbol $\binom{X}{2}$ značí množinu všech dvouprvkových podmnožin množiny X .

Definice 4. Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ a $G_2 = (V_2, E_2)$ nazveme *izomorfní*, pokud existuje vzájemně jednoznačné⁸ zobrazení $f: V_1 \rightarrow V_2$, kde pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V_1$ platí

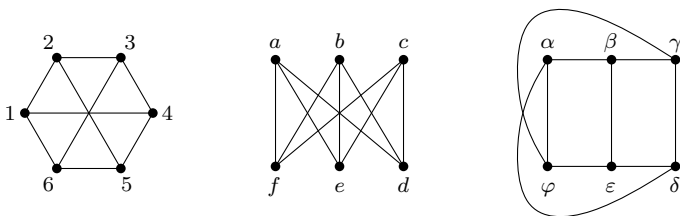
$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Tuto skutečnost značíme $G_1 \cong G_2$ a funkci f pak také nazýváme *izomorfismem* mezi grafy G_1 a G_2 .

Když se trochu vzdálíme od formalismu, jde vlastně o nějaké „přejmenování“ vrcholů bez změny hran.

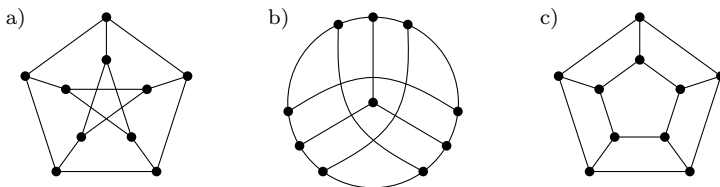
Hned můžeme prozradit, že pokud $G_1 \cong G_2$ a zároveň $G_2 \cong G_3$, pak už nutně $G_1 \cong G_3$, stačí totiž vrcholy G_1 „přejmenovat“ dvakrát za sebou.

Příklad 5. Grafy na následujících třech obrázcích jsou izomorfní.



Řešení. Abychom to ukázali, potřebujeme najít příslušné izomorfismy. Na to máme hned několik možností, například přiřazení $1 \leftrightarrow a \leftrightarrow \alpha$, $2 \leftrightarrow d \leftrightarrow \beta$, $3 \leftrightarrow b \leftrightarrow \gamma$, $4 \leftrightarrow e \leftrightarrow \delta$, $5 \leftrightarrow c \leftrightarrow \epsilon$ a $6 \leftrightarrow f \leftrightarrow \varphi$. Určitě snadno ověříš (ale je k tomu potřeba trochu práce), že vyhovují výše popsané definici. \square

Cvičení 6. Rozhodni, zda následující grafy jsou izomorfní.



Podgrafy

Občas se nám bude hodit podívat se jenom na část grafu a jeho zbytek nás v tom momentě nebude zajímat. Tak si to rovnou pojmenujme.

Definice 7. Graf H je *podgrafem* grafu G , pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Pokud navíc platí

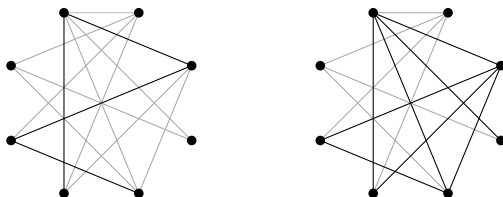
$$E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2},$$

říkáme, že H je *indukovaným podgrafem*.

⁸Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je *vzájemně jednoznačné*, pokud pro každé $y \in Y$ existuje právě jedno $x \in X$, že $f(x) = y$. Často se mu také říká *bijektivní*.

Skutečnost, že H je podgrafem G , značíme obvykle $H \subseteq G$, v případě indukovaného podgrafu $H \subseteq_{\text{ind}} G$.

Tohle je opět nejlepší ukázat na obrázku:



Vlevo je vyznačen „obyčejný“ podgraf, vpravo pak ten indukovaný. Když definici volně přeložíme do češtiny, při vytváření indukovaného podgrafu smažeme několik vrcholů a všechny hrany, které je obsahovaly. Pokud ale odstraníme i některé z dalších hran, dostaneme už podgraf neindukovaný.

Dále by se nám někdy mohlo hodit pro graf G a množinu $U \subseteq V(G)$ označit „tu část grafu G , která využívá jenom vrcholy U “ – podgraf indukovaný vrcholy U je podgraf $H \subseteq_{\text{ind}} G$, kde $V(H) = U$, a značíme ho $G[U]$.

A ještě si označme dva speciální podgrafy a jeden „nadgraf“. Pro graf $G = (V, E)$, jeho vrchol v a hranu e bude $G - v = G[V \setminus \{v\}]$ a $G - e = (V, E \setminus \{e\})$. Navíc pokud $e = \{u, v\}$ je dvojice nesousedních vrcholů grafu G , tak pod $G + e$ budeme rozumět graf $(V, E \cup \{e\})$. Značku $G + v$ neumíme rozumně zdefinovat, protože je víc možností, jak nový vrchol navázat.

Pohled zblízka

Teď se trochu pozorněji podíváme na jednotlivé vrcholy a jejich „kamarády“.

Definice 8. Necht v je vrchol grafu G . Pak množinu všech vrcholů, které jsou spojeny hranou s v , nazýváme *sousedství* vrcholu v a značíme $N_G(v)$. Dále *stupněm* vrcholu v nazýváme počet sousedů, tedy $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.

Pokud bude jasné, který graf máme na mysli, dolní index ve značení můžeme vynechat.

Definice 9. Vrchol stupně nula nazýváme také *izolovaný vrchol* a vrchol stupně jedna *list*.

Mohlo by Tě napadnout, jestli můžeme vrcholům libovolně předepsat stupně a hledat pak graf, který tomuto předpisu vyhovuje. Odpověď je jednoduchá – nemůžeme. I o tom je následující věta.

Věta 10. (Princip sudosti) *Pro každý graf platí, že součet stupňů všech vrcholů je sudé číslo.*

Důkaz. Když se podíváme na libovolnou hranu, zjistíme, že ji v součtu stupňů započteme dvakrát – za každý její konec. Musí tedy platit

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G(v) = 2|E(G)|,$$

což je sudé číslo. □

Cvičení 11. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož všechny vrcholy by měly navzájem různé stupně?

Souvislost

Úplný úvod do teorie grafů máme zdárně za sebou, ale neusneme na vavřínech a směle se pustíme do dalších definic.

Definice 12. *Sledem v grafu G nazveme posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$ vrcholů a hran v grafu G takovou, že pro $i = 1, 2, \dots, n$ platí $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$. Číslo n pak říkáme *délka* tohoto sledu. Speciálně tedy (v_0) je sled nulové délky.*

Tahem v grafu G rozumíme sled v grafu G , jehož hrany se neopakují. Cestou v grafu G pak nazveme sled v grafu G , jehož vrcholy se neopakují.

Cvičení 13. Rozmysli si, že každá cesta v grafu G je zároveň tah v grafu G .

Cvičení 14. Mějme graf G a v něm ne nutně různé vrcholy u a v . Rozmysli si, že v grafu G existuje cesta mezi vrcholy u a v právě tehdy, když mezi nimi existuje tah, a to nastane právě tehdy, když mezi nimi existuje sled.⁹

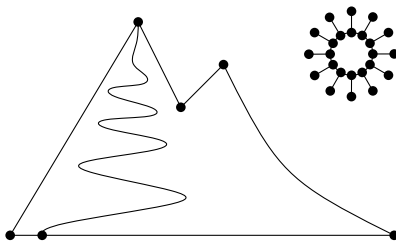
Návod. Jeden směr obou ekvivalencí je zřejmý z toho, že každá cesta je zároveň tah a každý tah je sled. Důkaz opačných implikací je v obou případech podobný. Naznačíme si ho tedy jen v případě první ekvivalence. Buď je daný tah mezi vrcholy u a v rovnou cestu, anebo je to cesta s jakýmsi „smyčkami“, které stačí vypustit, čímž z tahu uděláme cestu. □

Nyní bychom chtěli definovat takzvané souvislé grafy. To jsou ty grafy, v jejichž běžné ob-
rázkové reprezentaci jsou každé dva vrcholy spojeny čarou složenou z nějakých hran. Jistě si
snadno rozmyslíš, že následující definice říká formálním jazykem totéž.

Definice 15. Graf G nazveme *souvislým*, pokud v něm existuje tah mezi každou dvojicí jeho vrcholů.

Dále definujeme *komponentu souvislosti* v grafu G jako libovolný indukovaný podgraf grafu G , který je souvislý a který nelze rozšířit o žádný vrchol tak, aby se zachovala jeho souvislost.

Každý graf se pak rozkládá na několik komponent. Pokud je samotný graf souvislý, je tato komponenta právě jedna, v opačném případě jsou alespoň dvě.



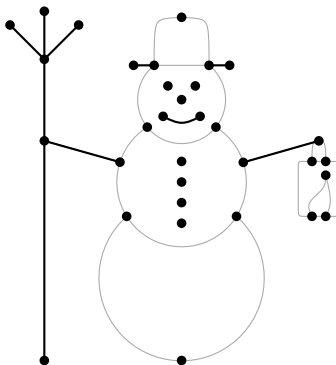
Slunce nad horami – graf se dvěma komponentami

Cvičení 16. Dokaž, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Platí to i obráceně – musí být doplněk souvislého grafu nesouvislý?

Dalším pojmem je termín *most*, který objasňuje následující definice.

Definice 17. Hranu e nazveme *mostem* v grafu G , pokud graf $G - e$ má víc komponent než graf G .

⁹O tahu, sledu či cestě řekneme, že je mezi vrcholy x a y v grafu G , pokud $v_0 = x$ a $v_n = y$ (nebo naopak) a $\{x, y\} \subseteq V(G)$.



Graf se zvýrazněnými mosty

Příklad 18. Dokaž, že graf, který má stupně všech vrcholů sudé, neobsahuje most.

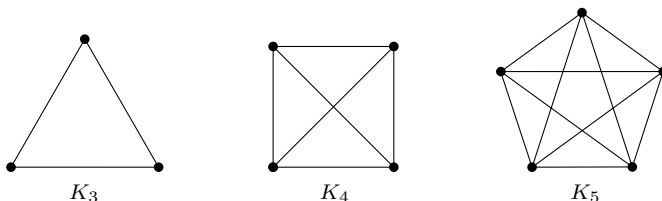
Řešení. Řešení je jednoduché a je vlastně jen důsledkem principu sudosti. Dokažme obměněnou implikaci¹⁰. Předpokládejme, že nějaký graf G obsahuje most e . Pak odebráním tohoto mostu vzniknou dvě nové komponenty souvislosti K a K' . Speciálně komponenta K je samostatný graf (jakožto podgraf G), takže na ni můžeme aplikovat princip sudosti. Součet stupňů vrcholů v K je sudý. Buď jsou tedy všechny stupně sudé, nebo alespoň dva liché. V prvním případě má vrchol z K , který je obsažen v mostu e , v grafu G lichý stupeň. Ve druhém případě alespoň jeden vrchol z těch vrcholů v K , které mají lichý stupeň, není obsažen v mostu e , a proto má lichý stupeň i v G . Tím jsme dokázali obměněnou implikaci a důkaz je tak hotov. \square

Nejznámější typy grafů

Nyní se podíváme na některé typy grafů, které si vysloužily vlastní pojmenování, protože se často vyskytují v různých problémech.

Definice 19. O grafu $G = (V, E)$ řekneme, že je to *úplný graf na n vrcholech*, pokud $|V| = n$ a $E = \binom{V}{2}$.

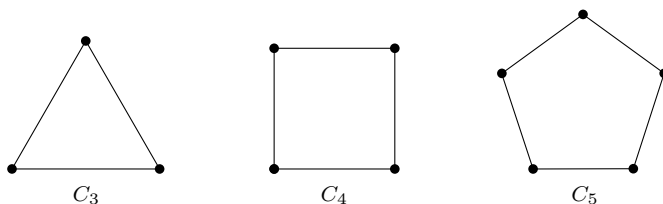
Úplný graf na n vrcholech tradičně značíme K_n . Pokud Ti z definice není jasné, jak takové grafy vypadají, snad Ti to pomohou objasnit následující obrázky.



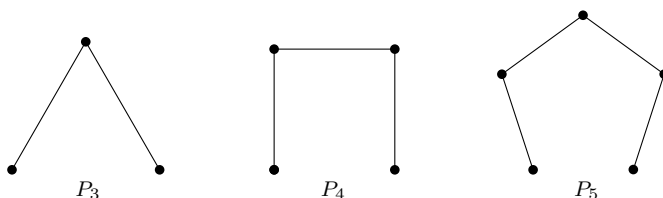
Dalšími základními typy grafů jsou kružnice na n vrcholech a cesta na n vrcholech.

¹⁰Obměněnou implikací k implikaci $A \Rightarrow B$ rozumíme implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Definice 20. *Kružnice na n vrcholech* (pro $n \geq 3$) je graf C_n izomorfní grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, n\}$ a $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$.



Definice 21. *Cestou na n vrcholech* nazveme graf P_n izomorfní grafu $G = (V, E)$, kde $V = \{1, \dots, n\}$ a $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$.

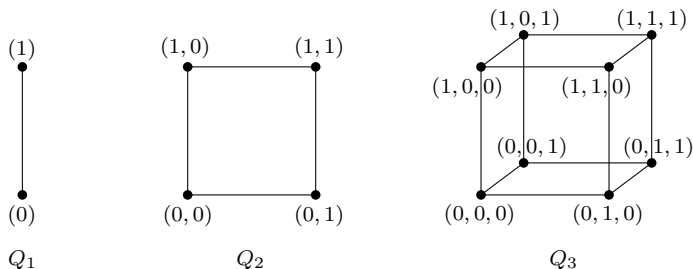


Cvičení 22. Pro která $n \in \mathbb{N}$ je kružnice C_n izomorfní se svým doplňkem?

Následující grafy už sice nepatří mezi ty úplně základní, jsou ale hezké a zaslouží si své zvláštní jméno.

Definice 23. Graf nazveme *n -krychlí* ($n \geq 0$), pokud jeho vrcholy jsou všechny n -tice nul a jedniček, přičemž dvě n -tice jsou spojeny hranou právě tehdy, když se liší na právě jedné pozici. Speciálně 0-krychle obsahuje pouze jediný vrchol.

Zavedené značení pro n -krychle je Q_n a z následujícího obrázku můžeš získat představu, jak vlastně vypadají a proč je nazýváme krychlemi.

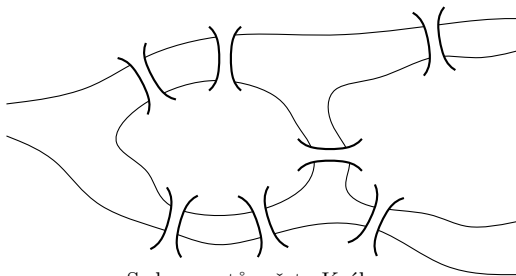


Cvičení 24. V závislosti na n urči, kolik vrcholů a kolik hran mají grafy K_n , C_n , P_n a Q_n .

Eulerovské grafy

Dovol nám jednu krátkou historickou odbočku. V první polovině osmnáctého století mělo město Královec (dnes Kaliningrad), rozkládající se na obou březích řeky Pregole a dvou říčních ostrovech, dohromady sedm mostů (viz obrázek). Leonhard Euler jako první ukázal, že není možné

v rámci jedné procházky Královcem projít každý z mostů právě jednou (a to ani pokud nemusíme skončit tam, kde jsme začínali).



Sedm mostů města Královec

Tím se tedy dostáváme k další speciální třídě grafů – takzvaným eulerovským grafům. Ne- přesně řečeno to jsou ty grafy, které lze nakreslit jedním tahem bez zvednutí tužky z papíru tak, abychom začali a skončili ve stejném vrcholu a abychom každou hranu projeli právě jednou. Abychom si mohli říct přesnou definici, je třeba zavést několik základních pojmů.

Definice 25. O sledu (tahu) v grafu G řekneme, že je *uzavřený*, pokud $v_0 = v_n$, jinak je *otevřený*.

Definice 26. Tah, který obsahuje všechny vrcholy a hrany svého grafu, nazveme *eulerovským*.

Uzavřenou cestu takto definovat nemůžeme, protože z definice cesty v grafu nemůže požadovaná rovnost nastat. Proto místo toho definujeme *kružnici v grafu G* jako uzavřený tah v G , v němž se neopakují vrcholy (kromě prvního a posledního).

Cvičení 27. Rozmysli si, že každá kružnice v grafu G je zároveň uzavřeným tahem v grafu G a každý uzavřený tah v G je i uzavřeným sledem v G .

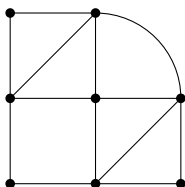
A nyní už toho víme dost na to, abychom si mohli pořádně definovat pojem eulerovských grafů.

Definice 28. O grafu řekneme, že je *eulerovský*, pokud v něm existuje uzavřený eulerovský tah.

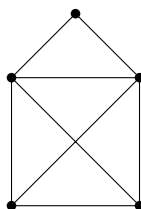
Cvičení 29. Které z následujících grafů jsou eulerovské?

a) Úplné grafy K_4 , K_5 , K_6 .

b)



c)



Předcházející cvičení jsi jistě lehce rozlouskl(a). Možná by Tě ale zajímalo, jestli lze nějak jednoduše rozpoznat, jaký graf je eulerovský a jaký ne. Nebudeme Tě zbytečně napínat, odpověď na tuto otázku zní „Ano!“. Přesnou charakterizaci eulerovských grafů podává následující věta.

Věta 30. Graf G je eulerovský právě tehdy, když je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň.

Důkaz. Nejprve si dokažme lehčí implikaci (tedy že daná podmínka je nutná). Pokud je graf eulerovský, existuje cesta mezi každými dvěma jeho vrcholy, a proto je souvislý. Navíc pokud jdeme po daném (uzavřeném) eulerovském tahu jedním směrem, do každého vrcholu vstoupíme tolikrát, kolikrát z něho vystoupíme, takže každý vrchol má sudý stupeň.

Ve zbytku důkazu předvedeme, že tato podmínka je zároveň podmínkou postačující. Nechtě tedy $t = (v_0, e_1, \dots, v_n)$ je nejdelší možný tah v grafu G (pokud je takových tahů víc, vybereme libovolný z nich) a nechtě V' a E' jsou množiny vrcholů a hran obsažených v tahu t .

Dále si ukažme, že t je uzavřený. Kdyby nebyl, sousedil by jeho koncový vrchol s lichým počtem hran z E' . Ale stupeň všech vrcholů v G je sudý, proto můžeme tah alespoň o jednu hranu prodloužit, čímž dostáváme spor s tím, že má být nejdelší možný. Tah t je tedy skutečně uzavřený, takže $v_0 = v_n$.

Teď máme dva případy. Nejprve předpokládejme, že $V \neq V'$. Pak ze souvislosti grafu G plyne, že existuje hrana $e = \{v_k, v'\}$, kde $v_k \in V'$ a $v' \in V \setminus V'$. Potom tah

$$t' = (v', e, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, \dots, v_n = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$$

je delší než tah t , neboť má délku $n + 1$, čímž dostáváme spor s výběrem tahu t .

Už tedy víme, že $V = V'$. Stačí tak jen dokázat, že $E = E'$. Pro spor předpokládejme, že nějaká hrana $f = \{v_k, v_l\}$, kde $v_k, v_l \in V'$, nenáleží E' , ale náleží E . Pak má ale tah

$$t'' = (v_l, f, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, \dots, v_n = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k),$$

analogicky jako v minulém případě, délku $n + 1$. Tím jsme opět získali spor a důkaz je tak hotov. \square

Možná Tě už ale napadla otázka, jaké grafy lze nakreslit jedním tahem s tím, že neskončíme v tom stejném vrcholu, ve kterém jsme začali. Takové grafy určitě znáš, je jím například poslední graf z předešlého cvičení. Formálně řečeno, jsou to grafy obsahující otevřený eulerovský tah. Těmto grafům budeme říkat *poloeulerovské*¹¹ a nalezení jejich charakterizace Ti přenecháme jako cvičení. Pokud bys nevěděl(a), jak na to, přeči si zadání následujícího cvičení, které dává na předchozí otázku odpověď bez důkazu. Náznak důkazu pak najdeš v návodu.

Cvičení 31. Ukaž, že graf G je poloeulerovský právě tehdy, když splňuje následující dvě podmínky.

- (i) Stupeň právě dvou jeho vrcholů je lichý, u ostatních je sudý.
- (ii) G je souvislý.

Návod. To, že dané podmínky jsou nutné, se dokáže podobně jako v předcházejícím důkazu. Pro důkaz opačné implikace si označme vrcholy s lichým stupněm u a v . Pokud jsou spojeny hranou $e = \{u, v\} \in E$, pak uvážime graf $G' = G - e$, v opačném případě graf $G' = G + e$, jenž má všechny vrcholy sudého stupně. G' má pak buď jednu nebo dvě komponenty, v nichž existují uzavřené eulerovské tahy. Zbytek už jistě hravě domyslíš sám (sama). \square

A teď už budeš, stejně jako Euler, umět rozhodnout, jestli je možné se procházet po Královci a projít každý z mostů právě jednou. Když si místo obou břehů a obou ostrovů představíš vrcholy a místo mostů hrany, dostaneš něco jako graf. Některé vrcholy budou sice spojeny více hranami, ale důkazy předchozích vět a cvičení je možné zobecnit i pro takovéto „skorografy“¹². Až si

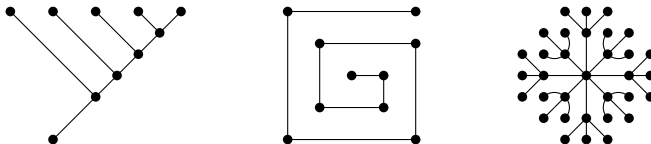
¹¹Termín poloeulerovské grafy, na rozdíl od termínu eulerovské grafy, rozhodně není vžit a běžně používán.

¹²Povolíme-li volnější definici grafu, v níž umožníme spojení dvojice vrcholů více paralelními hranami, dostaneme definici *multigrafu*. Speciálně se někdy povolují i *smýčky*, tedy „hrany“ s oběma konci ve stejném vrcholu. Podobně jako pro grafy, také pro multigrafy platí spousta hezkých věcí, v tomto seriálu se jim ale věnovat nebudeme.

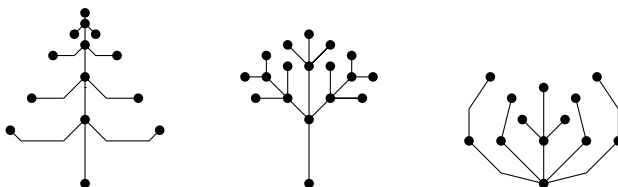
rozmysliš odpověď, nebudeš ji stejně moci využít, pokud se někdy v Kaliningradu vyskytněš. Z tehdejších mostů už totiž stojí jen dva, jeden byl přestavěn a několik dalších postaveno.

Stromy

Zkus se teď podívat na následující obrázky a říct si, co mají společného.



Ano, hádáš správně, jsou to souvislé grafy, které neobsahují kružnici jako podgraf. Takovýmto grafům říkáme *stromy* a tradičně je značíme velkým písmenem T .¹³ Pokud Tě zarazí, proč právě název „strom“, věz, že i opravdové stromy a křoviny jsou souvislé, ale neobsahují kružnice, jak ukazují následující obrázky.



Jistě s námi budeš souhlasit, že každý správný strom má listy (alespoň pokud bereme jehličí jako speciální formu listů). A právě o tom hovoří následující věta.

Věta 32. *Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.*

Důkaz. Uvažme libovolný strom s alespoň dvěma vrcholy a označme jej T . Necht' posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ je cesta v grafu T mezi vrcholy v_0 a v_n taková, že žádná jiná cesta v grafu T není delší. Pak speciálně platí, že tuto cestu nejde prodloužit. Stejně tak nemůže vést žádná další hrana z jejích konců do zbytku cesty, proto mají vrcholy v_0 a v_n stupeň jedna. \square

Další věta hovoří o tom, že i když stromu odebereme nebo přidáme list, stromem být nepřestane. Její důkaz je lehký a plyne přímo z definice stromu, takže Ti jej rádi přenecháme jako jednoduché cvičení.

Věta 33. *Bud' $G = (V, E)$ graf na alespoň dvou vrcholech a l list v G . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (1) G je strom.
- (2) $G - l$ je strom.

Stromy jsou ale tak pěkné, že je lze ekvivalentně definovat mnoha způsoby. O některých z nich hovoří následující věta.

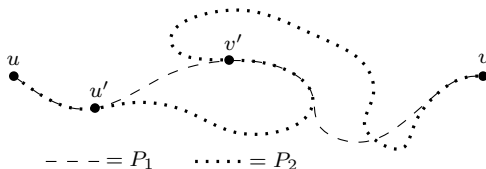
¹³Písmeno T opět pochází z anglického pojmu pro strom – *tree*.

Věta 34. Pro graf $G = (V, E)$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (1) G je strom.
- (2) Pro každé dva vrcholy $u, v \in V$ existuje jediná cesta v G z u do v .
- (3) G je souvislý a odebráním libovolné hrany souvislým být přestane.
- (4) G je graf bez kružnic a přidáním libovolné hrany by v něm vznikla kružnice.
- (5) G je souvislý a $|E| = |V| - 1$.

Důkaz. Ekvivalenci všech tvrzení dokážeme postupně. Složením následujících implikací dostaneme všechny požadované vztahy.

(1) \Rightarrow (2): Přímo z definice stromu víme, že nějaká cesta z u do v vede. Pokud by ale existovaly dvě (P_1 a P_2), nalezneme první místo od u , kde se tyto cesty rozdělí, a označíme ho u' . Z tohoto bodu se vydáme po cestě P_1 a opět se zastavíme v momentě, kdy narazíme na vrchol v' , jenž je taky na cestě P_2 . Úseky cest mezi vrcholy u' a v' označme P'_1 a P'_2 .



A teď si stačí uvědomit, že cesty P'_1 a P'_2 spolu sdílejí pouze své konce – vrcholy u' a v' . Jejich spojením tedy dostáváme kružnici, což je ale ve sporu s definicí stromu.

(2) \Rightarrow (3): Mějme graf G a libovolnou hranu $e = \{u, v\}$. Potom posloupnost (u, e, v) je zjevně cesta mezi u a v . Pokud bychom odstraněním této hrany dostali souvislý graf, musí existovat nějaká druhá cesta mezi u a v , čímž dostáváme spor.

(3) \Rightarrow (1): Souvislost grafu G už máme, stačí nám tedy ukázat, že neobsahuje kružnici. Pro spor předpokládejme, že tam existuje kružnice C , a označme e libovolnou její hranu. Ukážeme, že pak graf $G - e$ je souvislý. Ze souvislosti víme, že každé dva vrcholy jsou v grafu G propojeny cestou. Mohou nastat dva případy:

1. Tato cesta hranu e nevyužívá, pak bez změny existuje taky v $G - e$.
2. Cesta prochází hranou e . Můžeme ji upravit na sled v $G - e$ tím, že místo „kroku“ přes e „obejdeme“ zbytek kružnice C .

Každé dva vrcholy v $G - e$ jsou tedy spojeny sledem, což k souvislosti stačí.

(2) \Rightarrow (4): Mějme graf G a libovolnou nehranu $e = \{u, v\}$. Víme, že mezi vrcholy u a v vede cesta, přidáním hrany e z ní tedy vytvoříme kružnici.

(4) \Rightarrow (1): Už máme, že G neobsahuje kružnici, ukažme tedy, že je také souvislý. Vezměme si libovolné dva vrcholy u a v . Pokud jsou přímo spojeny hranou, pak tato hrana je zároveň i cesta mezi nimi.

Předpokládejme tedy, že mezi u a v hrana není. Dle (4) přidání libovolné hrany vytvoří kružnici, speciálně tedy musí existovat i cesta mezi u a v , jinak by hrana $\{u, v\}$ kružnici nevytvořila.

(1) \Rightarrow (5): Souvislost máme opět přímo z definice stromu a vztah počtu hran a vrcholů dokážeme indukci dle počtu vrcholů. Pro graf s jediným vrcholem triviálně platí, protože $|V| = 1$ a $|E| = 0$.

O stromě s alespoň dvěma vrcholy už víme, že má alespoň dva listy. Označme l libovolný z nich, pak už taky víme, že $G - l$ je opět strom, jenž má ale menší počet vrcholů. Teď můžeme uplatnit indukční předpoklad (tedy rovnost $|E(G - l)| = |V(G - l)| - 1$), přičemž zároveň platí i $|E(G - l)| = |E| - 1$ (s „odtržením“ listu jsme odebrali také jednu hranu) a $|V(G - l)| = |V| - 1$. Z těchto tří rovností dostaneme požadovaný vztah.

(5) \Rightarrow (1): Opět využijeme indukci dle počtu vrcholů. Jediný graf s jediným vrcholem je zároveň i strom. Pro větší grafy víme ze vztahu

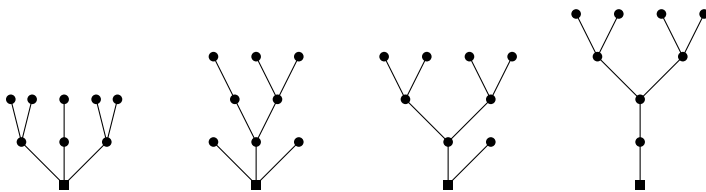
$$\sum_{v \in V} \deg v = 2 \cdot |E| = 2 \cdot |V| - 2,$$

že musí existovat alespoň jeden vrchol l , jenž má nanejvýš jednoho souseda. Pokud by ale neměl žádného, nemůže být graf souvislý, proto vrchol l má právě jednoho souseda a je tedy list.

Podívejme se na graf $G - l$: oproti grafu G má o jednu hranu a jeden vrchol méně, proto vztah $|E(G - l)| = |V(G - l)| - 1$ platí, stejně tak je graf $G - l$ souvislý (jinak by nebyl souvislý ani graf G). Použitím indukčního předpokladu dostáváme, že $G - l$ je strom, a tedy z předešlé věty plyne, že i G musí být strom. \square

V přírodě má většina stromů svůj kořen. Jinak tomu nebude ani tady, protože někdy se nám při práci se stromy může hodit je zakořenit.

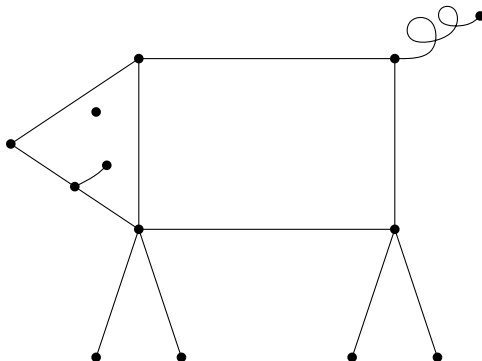
Definice 35. *Zakořeněným stromem* budeme rozumět dvojici (T, r) , kde T je strom a r jeden z jeho vrcholů, běžně označovaný jako *kořen*.¹⁴



Několik variant zakořenění jednoho stromu

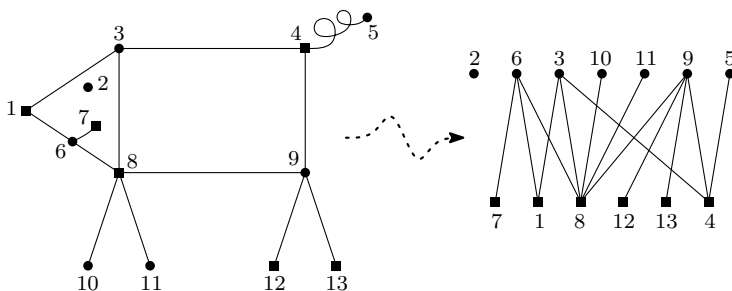
Bipartitní grafy

Další poměrně rozsáhlou skupinou jsou takzvané *bipartitní grafy*. To jsou ty grafy, jejichž vrcholy se dají rozdělit do dvou skupinek tak, aby žádná hrana nevedla uvnitř některé z nich. Tyto skupinky také nazýváme *partity* grafu. Jeden takový graf je na následujícím obrázku.



¹⁴Písmeno r pochází, stejně jako minule, z anglického slova pro kořen – *root*.

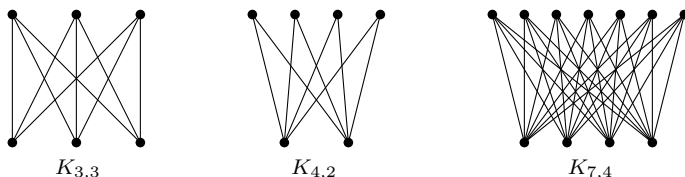
A jak tedy vypadá to rozdělení do skupinek?



Opět přidáním slovíčkem *úplný* budeme označovat ty bipartitní grafy, které mají všechny možné hrany. V zkrácené verzi je budeme značit $K_{m,n}$, kde m a n představují počty vrcholů v jednotlivých skupinkách. Možná už znáš (relativně starou) grafovou hříčku, ve které vystupuje úplný bipartitní graf $K_{3,3}$:

Úloha 36. V jistém kraji jsou tři domky a tři studny. Je možné spojit každý z těchto domků s každou ze studní, pokud se cesty nesmějí křížit?

Následující obrázek ukazuje několik dalších úplných bipartitních grafů.



Charakterizace bipartitních grafů

Když už teď víme, co to bipartitní grafy vůbec jsou, můžeme se ještě podívat na způsoby, jak tuto vlastnost odhalit.

Cvičení 37. O následujících grafech rozhodni, jestli jsou bipartitní, nebo ne:

- cesty P_3, P_4, P_5, P_6 ;
- kružnice C_3, C_4, C_5, C_6 ;
- úplné grafy K_3, K_4, K_5, K_6 ;
- krychle Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 ;
- stromy.

Pokud jsi toto cvičení poctivě vyřešil(a), část následujícího tvrzení Tě už asi nepřekvapí.

Věta 38. Graf je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky jako podgraf.

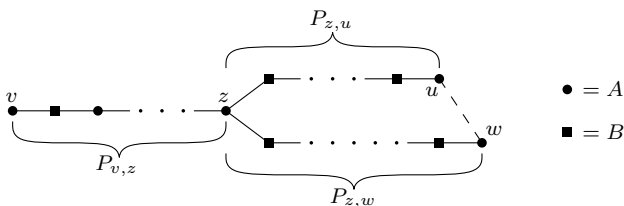
Důkaz. Jeden směr implikace je poměrně jednoduchý: označíme-li si vrcholy jedné partity A a druhé B , pak na libovolné kružnici se musejí tato písmena střídát, což přímo zajišťuje sudou délku kružnice.

Pro opačný směr předpokládejme, že máme graf bez lichých kružnic. Opět budeme označovat vrcholy písmeny A a B : začneme libovolným vrcholem v , který dostane A , pak všichni jeho sousedi budou B , všichni sousedi sousedů dostanou opět A a tak dále. Tak budeme postupovat, dokud buď nebudou označeny všechny vrcholy, nebo dokud nám nebude algoritmus přikazovat

„přejmenovat“ nějaký vrchol. V případě nesouvislého grafu nejprve označíme vrcholy jedné komponenty a následně budeme stejně pokračovat na dalších komponentách.

Pokud jsme označili všechny vrcholy, podařilo se nám určit partity a tím také dokázat, že graf je skutečně bipartitní. V opačném případě označme u vrchol, který měl dostat druhé písmeno, a w jeho souseda, jenž toto „dvojoznačení“ způsobil. Určitě platí, že oba tyto vrcholy mají stejné písmeno.

Když se teď zpětně podíváme na všechny vrcholy, které zapříčinily označení pro vrcholy u a w , dostaneme cesty $P_{v,u}$ a $P_{v,w}$ z vrcholu v do u a w . Označme ještě poslední společný vrchol obou cest z .



Jedna z možných situací

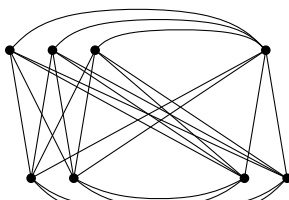
Cesty $P_{z,u}$ a $P_{z,w}$ vytváří spolu s hranou $\{u, w\}$ kružnici C . Už víme, že vrcholy u a w jsou označeny stejným písmenem, proto mohou nastat pouze dva případy:

1. Vrchol z má stejné písmeno jako u a v , pak cesta $P_{z,u}$ má sudý počet hran, stejně tak i cesta $P_{z,w}$. Spolu s hranou $\{u, w\}$ má pak kružnice C lichý počet hran, což je spor s naším předpokladem.
2. Písmeno u vrcholu z se liší od písmen u a v , pak obě cesty $P_{z,u}$ i $P_{z,w}$ obsahují lichý počet hran, což spolu s hranou $\{u, w\}$ dává opět lichý počet hran pro kružnici C . Znovu tedy dostáváme spor. □

Postup označování vrcholů písmeny, který jsme použili v důkazu, můžeme taky použít na libovolný graf, o němž potřebujeme určit, je-li bipartitní. Buď se nám podaří označit všechny vrcholy, nebo nalezneme nějakou lichou kružnici, která „nebipartitnost“ grafu potvrdí.

Vícepartitní grafy

Bipartitní grafy se dají zobecnit na grafy k -partitní – vrcholy těchto grafů lze rozdělit na k disjunktních množin tak, aby konce každé hrany byly v různých množinách. Úplnost je u těchto grafů podobná jako u těch bipartitních – K_{n_1, \dots, n_k} označuje graf, který má k skupin vrcholů (velikostí n_1 až n_k) a každá dvojice vrcholů z různých skupinek je spojena hranou.



$K_{3,2,2,1}$

Závěrem

Pokud jsi dočetl(a) až sem, můžeš si gratulovat, protože těmito odstavci první díl seriálu končí. Ještě než se ale odmlčíme, splatíme dluh, který vůči Tobě máme.

Asi sis všiml(a), že jsme na začátku slibovali udávání příkladů z reálného světa, které budou demonstrovat možnosti praktických aplikací teorie grafů. A také Ti asi neuniklo, že jsme se potom o téměř žádném využití nezmínili. Nyní přichází čas to napravit.

Jednoduchoučkým důsledkem principu sudosti je fakt, že vrcholů lichého stupně je v grafu sudý počet. Pokud tedy v grafu najdeme jeden vrchol lichého stupně, víme bez hledání, že alespoň jeden další vrchol má lichý stupeň. Pokud tedy na mapě v autoatlasu najdeš město, ze kterého vychází lichý počet silnic, můžeš ihned usoudit, že z nějakého jiného města také povede lichý počet silnic.¹⁵ Navíc o daném systému měst a silnic můžeš s jistotou prohlásit, že nelze projet každou silnici právě jednou (a navštívit všechna města) tak, abychom se vrátili do města, ze kterého jsme vyjeli. Bez poznatků teorie grafů bys na něco takového přišel (přišla) asi poměrně těžko.

Dobře, uznáváme, že výše uvedené aplikace jsou možná hezké, ale asi by se bez nich dalo žít. Pokud by ses tedy chtěl(a) dozvědět o něčem, co má skutečně použitelné aplikace, nastuduj si třeba hledání nejkratší cesty v grafu.¹⁶ Zatím jsme si řekli, co to je cesta. Neřekli jsme si ale, jak poznat, jestli mezi dvěma vrcholy vede, a pokud ano (a pokud jich je víc), jaká je nejkratší. Navíc se dá problém nalezení nejkratší cesty ještě zesložitit tím, že každé hraně přiřadíme číslo reprezentující délku dané hrany a délkou cesty budeme rozumět součet délek všech jejích hran. I takový problém ale je řešitelný a k řešení pomohla právě teorie grafů. To, že se řešení výše zmíněného problému dá použít pro řešení reálných problémů, je jasné – například pro hledání nejkratší cesty z jednoho města do druhého. A hlavně něco podobného dělá třeba IDOS, když Ti vyhledává nejrychlejší spojení.

Jako malou odměnu za vytrvalost nabízíme řešení některých cvičení, abys měl(a) možnost si zkontrolovat správnost svých výsledků:

6. Grafy na obrázcích a) a b) navzájem izomorfní jsou. Graf na obrázku c) naopak obsahuje kružnice na čtyřech vrcholech, které ale zbylé dva grafy neobsahují, proto s nimi izomorfní být nemůže.

11. Neexistuje. Musel by obsahovat izolovaný vrchol a zároveň vrchol sousedící se všemi ostatními vrcholy.

22. $\overline{C_n} \cong C_n$ platí pouze pro $n = 5$.

24. Úplný graf K_n má n vrcholů a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ hran, kružnice C_n má n vrcholů i hran a cesta P_n má n vrcholů a $n - 1$ hran. Krychle Q_n obsahuje 2^n vrcholů a hran má $n \cdot 2^{n-1}$.

29. Eulerovský je graf K_5 a graf z obrázku b), zbylé grafy eulerovské nejsou.

37. Bipartitní jsou všechny cesty, krychle a stromy, dále ještě kružnice C_4 a C_6 , ostatní grafy bipartitní nejsou.

A to už je od nás pro tuto chvíli opravdu vše. Děkujeme Ti za pozornost a za to, žes měl(a) trpělivost a dočetl(a) text až sem. Přejeme Ti mnoho štěstí v soutěžní sérii a těšíme se na společné absolvování druhého dílu.

¹⁵To ovšem za předpokladu, že žádná silnice nekončí uprostřed pole.

¹⁶V seriálu se tímto tématem zabývat nebudeme. K nastudování doporučujeme knížku *Kapitoly z diskrétní matematiky* od profesorů Matouška a Nešetřila; samozřejmě lze také hledat na internetu. Zdrojů je mnoho.