Povídání ke druhé jarní sérii

Milý řešiteli, jsou-li pro Tebe polynomy úplnou novinkou, máš nyní možnost se s nimi trochu seznámit. Nuže čti.

Co je polynom?

O funkci $f(x)$ řekneme, že je *polynomem*[1], jestliže je ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_n \neq 0$. Číslům a_i říkáme *koeficienty* polynomu $f(x)$ a číslo n nazýváme *stupněm* polynomu f.[2] Koeficientu a_n se říká *vedoucí koeficient*.

Příklad. Funkce

$$x^2 + x + 1, \qquad x^{17} - 1, \qquad x + \sqrt{2}, \qquad 1$$

jsou polynomy, jejichž stupně jsou po řadě čísla 2, 17, 1, 0. Funkce $\sin(x)$ a $\sqrt{x}$ nejsou polynomy.

Kořeny polynomu

Další pojem, s nímž se budeš setkávat v úlohách, je *kořen polynomu*. Kořeny polynomu $P(x)$ jsou taková reálná[3] čísla a, pro něž platí $P(a) = 0$.

Kupříkladu polynom $P(x) = x^2 + 2x$ má dva reálné kořeny, a to čísla 0 a -2, naopak polynom $x^4 + 1$ nemá žádný reálný kořen, protože nabývá pouze kladných hodnot.

Není těžké si uvědomit, že když řešíš kvadratickou rovnici, pak vlastně hledáš kořeny polynomu stupně dva. Dodejme, že sice existují vzorečky pro hledání kořenů polynomů stupně tři a čtyři, ale jsou velmi složité a nebudeš je potřebovat.[4]

Součinový tvar polynomu

Základní finta při práci s polynomy je rozklad na součin. Například polynom $x^2 + 5x + 6$ můžeme upravit do tvaru $(x + 2)(x + 3)$. Známe-li tento rozklad, je již jasné, že kořeny tohoto polynomu jsou -2 a -3.

Provádět takovéto rozklady u polynomů vyšších stupňů samozřejmě není vůbec lehké a mnohdy to ani nejde. Často nám však může součinový tvar pomoci. Více napoví řešení následující úlohy.

Úloha. Urči kořeny polynomu $P(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, když víš, že jeden z nich je 1.

Řešení. Dodatečnou znalost využijeme k úpravě polynomu na součinový tvar. Pokusíme se totiž z polynomu vytknout člen $(x - 1)$, který by se podle všeho měl v hledaném rozkladu objevit. Proveďme tedy úpravu

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x^3 - x^2) - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1).$$

[1] Často se používá i český výraz *mnohočlen*.

[2] Na stupni nulového polynomu se matematici neshodnou, a proto ho nedefinujeme.

[3] Můžeme také uvažovat komplexní kořeny, viz poznámka o kus dál.

[4] Pro vyšší stupně už takový vzoreček ani sestavit nelze.

Všimni si obzvlášť prvního kroku, v němž se k sobě sdružily násobky $(x-1)$. Nyní již rozklad podle známého vzorce dokončíme a dostaneme

$$P(x) = (x+1)(x-1)^2.$$

Kořeny jsou tedy čísla 1 a -1.

To, že funguje minulý příklad, není náhoda. Platí totiž následující tvrzení.

Tvrzení. *Číslo a je kořenem polynomu f právě tehdy, když existuje polynom g takový, že $f(x) = g(x)(x-a)$. Polynomu $x-a$ říkáme kořenový činitel.*

Jinými slovy, kořenový činitel $(x-a)$ můžeme z polynomu f vždy vytknout a započít tak rozklad. Takové vytýkání lze sice provést vždy, nicméně občas může být docela namáhavé správně sdružit násobky $x-a$, proto existuje i jiná metoda, jak toto spolehlivě provádět. Jmenuje se dělení polynomu polynomem. Pokud ji budeš potřebovat, určitě nebudeš mít problém si tento postup někde vyhledat.

Obecně tedy nemůžeme o rozkladu polynomu na součinový tvar říci nic, jelikož nevíme, kolik má polynom (reálných) kořenů. Ovšem kdykoliv víme o nějakém čísle, že je kořenem, pak můžeme prohlásit, že se příslušný kořenový činitel objeví v našem rozkladu. Dokonce řekne-li nám někdo, že daný polynom má třeba pět kořenů, víme pak, že součinový tvar tohoto polynomu se skládá z alespoň pěti členů. **Všeobecně platí, že práce se součinovým tvarem je velmi účinnou zbraní při řešení úloh o polynomech.**

Nyní už snadno odvodíme dvě důležitá tvrzení.

Tvrzení. *Nenulový polynom stupně n má nejvýše n kořenů.*

Takový polynom se zkrátka nedá zapsat jako součin více než n závorek stupně jedna.

Tvrzení. *Víme-li o polynomu*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

že má n reálných kořenů, které si nazveme $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, pak můžeme psát

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Pokud součinový tvar roznásobíme, získáme vztahy mezi kořeny a koeficienty známé též jako *Viètovy vztahy.* Tyto vztahy nabývají přehlednější podoby pro polynomy nižších stupňů, které mají za vedoucí koeficient jedničku. Například pro polynom $x^3 + ax^2 + bx + c$ s kořeny x_1, x_2, x_3 máme

$$c = -x_1x_2x_3, \qquad b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \qquad c = x_1x_2x_3.$$

Poznámka. Pokud připustíme komplexní kořeny, pak každý polynom stupně n má přesně n kořenů (počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost, tj. kolikrát můžeme vytknout příslušný kořenový činitel). Z toho plyne, že v komplexních číslech je každý polynom součinem lineárních členů. Například $2x^2 + 2 = 2(x+i)(x-i)$.

Polynomy s celočíselnými koeficienty

Pokud potkáme polynom, jehož koeficienty jsou pouze celá čísla, vyplatí se použít dělitelnost.

Úloha. $P(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty takový, že $P(0)$ a $P(1)$ jsou lichá čísla. Může mít $P(x)$ celočíselný kořen?

Návod. Uvaž paritu (dělitelnost dvěma).

A na závěr přidáme jedno tvrzení o polynomech s celočíselnými koeficienty. Ještě předtím si však objasníme, že číslo $a - b$ dělí číslo $a^n - b^n$, kdykoliv a, b jsou celá čísla a n je přirozené. K tomu využijeme polynomy:

Podíváme-li se na polynom proměnné a s předpisem $P(a) = a^n - b^n$, vidíme, že b je jeho kořenem, tedy člen $(a - b)$ je možné z polynomu vytknout. Takže $a - b$ vskutku dělí $a^n - b^n$.

Tvrzení. *Je-li $P(x)$ polynom s celočíselnými koeficienty, pak pro každá celá čísla a, b platí $a - b \mid P(a) - P(b)$.*

Důkaz. Zde stačí napsat

$$P(a) - P(b) = a_n(a^n - b^n) + a_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \cdots + a_1(a - b)$$

a z předchozího tvrzení vidíme, že násobkem $a - b$ je každý člen, tedy i celý výraz. $\square$