

Politika

1. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. ÚNORA 2015

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Do druhého kola prezidentských voleb v PraSestánu postoupili tři kandidáti: Pašík, Čuník a Vepřík. Každý z milionu voličů zahlasoval tím způsobem, že tyto kandidáty nějak seřadil. Ukázalo se, že více než polovina voličů upřednostňuje Pašíka před Čuníkem a více než polovina voličů upřednostňuje Čuníka před Vepříkem. Musí už nutně dávat více než polovina voličů přednost Pašíkovi před Vepříkem?

ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Některé dvojice z deseti ministerstev jsou propojené. Každé ministerstvo každý den v pravé poledne pošle všechny oběžníky (kopie), které má k dispozici, všem s ním propojeným ministerstvům. Zákon o oběžnících stanovuje, že pokud ministerstvo vyšle oběžník, musí jej do dvou dnů obdržet všechna ostatní ministerstva. Zákon o byrokracii dodává, že se to nikdy nesmí stihnout za jediný den. Navrhněte nějaké legální propojení ministerstev.

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Politik chce v rámci předvolební kampaně projet n měst. Začíná v hlavním městě¹ a každé město chce navštívit právě jednou. Mezi každými dvěma městy vede obousměrná silnice. Navíc chce projet všemi silnicemi, které nechal za předchozího volebního období opravit. Kolika způsoby to může uskutečnit, jestliže nechal opravit m silnic a z každého města vede nejvýše jedna opravená silnice?

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

Každá ze tří politických stran má sto členů. Dále je známo, že každý člen má mezi členy zbylých dvou stran alespoň 101 přátel². Dokažte, že existuje trojice lidí z různých stran, kde se přáteli každý s každým.

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Každý z milionu úředníků má svůj unikátní kód sestávající z šesti číslic. Kvůli problémům se zaměňováním vládní rozhodla, že kódy každých dvou úředníků se musejí lišit alespoň na dvou pozicích. Kolik nejméně úředníků musí být propuštěno?

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Město má tvar obdélníka. Jeho hlavní ulice jsou úsečky rovnoběžné s některým jeho okrajem (stranou obdélníka) a rozdělují jej na obdélníkové čtvrti. *Centrem* nazveme takovou čtvrt, která nesousedí s okrajem. Podle vyhlášky žádná hlavní ulice nevede napříč celým městem. Dokažte, že město má centrum.

¹Hlavní město počítáme jako jedno z n měst.

²Přátelství je vzájemné.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Na velkém nádvoří jsou na zemi vyznačeny vrcholy čtvercové sítě a na některých z nich stojí židle. Rozhodněte, zda lze na jakoukoliv takovou konfiguraci židlí usadit republikány a demokraty tak, aby na každé židli seděl právě jeden politik, aby se pro každou řadu počet v ní sedících demokratů lišil od počtu v ní sedících republikánů nejvýše o jedna a to samé aby platilo pro všechny sloupce.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Ve volbách soupeřili dva kandidáti. První z nich dostal a hlasů, druhý b hlasů, přičemž $a > kb$ pro nějaké přirozené k . Hlasy se sčítaly v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu celého sčítání měl první kandidát ostře víc hlasů, než byl k -násobek počtu dosud sečtených hlasů jeho soupeře, tj. že nerovnost platila pro všechny průběžné výsledky během sčítání?