Polynomy

2. JARNÍ SÉRIE　　　　TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. BŘEZNA 2015

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Najděte polynom nabývající celočíselných hodnot ve všech celých číslech, který nemá všechny koeficienty celočíselné.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Pro které trojice reálných čísel a, b, c, kde $a \neq c$, mají polynomy

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1,$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

dva různé společné reálné kořeny?

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Najděte všechny reálné polynomy $P(x)$, které pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňují

$$x \cdot P(x-1) = (x+1) \cdot P(x).$$

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Existuje polynom sudého stupně s lichými celočíselnými koeficienty, který má racionální kořen?
Poznámka: Jak se můžeme dočíst v úvodním textu, za koeficienty polynomu x^2 považujeme čísla 1, 0, 0.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Nenulový polynom s celočíselnými koeficienty má alespoň dva různé kladné reálné kořeny, přičemž jeden z nich je roven 2015. Dokažte, že nějaký jeho koeficient je menší nebo rovný -2015.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Trojice kladných reálných čísel a, b, c a x, y, z mají stejný součin a stejný součet a navíc platí $\max(a, b, c) \geq \max(x, y, z)$. Dokažte, že $\min(a, b, c) \geq \min(x, y, z)$.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Najděte všechny polynomy, jejichž koeficienty jsou pouze 1 nebo -1, takové, že je lze rozložit na součin lineárních polynomů s reálnými koeficienty.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Je dána funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ taková, že pro libovolná různá celá k, l platí $k - l \mid f(k) - f(l)$. Navíc existuje polynom $P(x)$ takový, že $|f(k)| < P(k)$ pro každé celé k. Dokažte, že existuje polynom $Q(x)$ takový, že $Q(k) = f(k)$ pro všechna celá k.