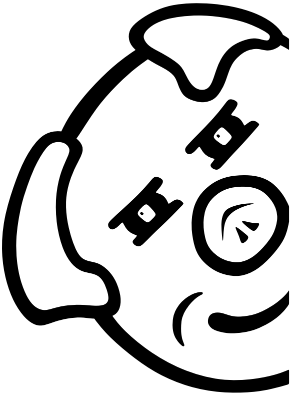
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



Pokud se Ti o Vánocích neukázalo zlaté prasátko, nezoufej, naše PraSátko Ti to určitě mnohokrát vynahradí. Tentokrát Ti jako opožděný dárek přináší hned tři série plné úloh – *Cestování a bloudění*, *(Od)mocniny* a druhou seriálovou. K ní patří text, nazvaný tentokrát *Pevné základy*, který najdeš dále v komentářích. Jestliže jsi měl(a) podzim příliš hektický a pořád ses seriálem *Do nekonečna a ještě dál* neprokousal(a), rozhodně to nevzdávej. Začátek tohoto dílu totiž na předchozí část nenavazuje, takže se do něj může pustit kdokoli. Pokud ho ale chceš pochopit celý a přečíst si i pohádku o nespočetném gamblerovi, znalosti z prvního dílu budeš potřebovat.

Podzimní část už skončila a co nevidět budou známé její konečné výsledky. Nejlepší řešitelé budou jako vždy pozvaní na jarní soustředění, které se tentokrát uskuteční od 12. do 20. března na zatím utajeném místě. Ale ať už pojedeš, nebo ne, určitě se snaž i v jarní části – podzimní soustředění bývá taky super, na ukázku z toho posledního se můžeš podívat níže.

Za ostatní organizátory zdraví a krásný nový rok se spoustou vyřešených úloh přeje

Bára Kociánová

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Seriál – Do nekonečna a ještě dál II.
- Výsledkové listiny

- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

Vzpomínka na podzimní soustředění

Soustředění tentokrát proběhlo ve Skleném na Vysočině. Účastníci tam přijeli 24. října jakožto branci a branky a podstoupili začátek vojenského výcviku. Nicméně kvůli (ne)schopnosti své a generálově se propadli do pohádkové země, kde ušli nepočítaně mil, spali sto let a zničili jednoho děda Vševěda. Nakonec se jim ale podařilo dostat zpět do našeho světa a jako skoro ostřílení vojáci a řešitelé zkušenější o mnoho matematických přednášek odjeli 1. listopadu domů.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

Jarní výlet

V sobotu **9. dubna** se vypravíme na tradiční jarní výlet za krásami Středočeského kraje. Pokud už PraSátka znáš, určitě se tam potkáš s nějakými svými kamarády z řad účastníků a organizátorů. Pokud jsi naopak v našem semináři nováčkem, je to pro Tebe jedinečná příležitost se s námi seznámit. Bližší informace, jako například místo srazu, se dozvíš v příštích komentářích. Prozatím prozradíme, že se vydáme do takřka legendárních míst, kde vznikalo naše turistické značení, a která už vlastně ani neexistují.

Náboj

Do kalendáře si také poznamenej datum **15. dubna**, kdy se uskuteční mezinárodní matematická soutěž Náboj. Uteče to, tak už raději mezi spolužáky začni hledat spolunadšence do týmu!

Poměry

2. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(193; 191; 2,97; 3,0)

Jana, Dana a Hana organizují spolu s pěti hochy Korespondenční seminář z poměrů. Vyšlo najevo, že Jana i Dana měly v minulosti poměr se třemi organizátory a Hana dokonce se čtyřmi. Musí už nutně existovat organizátor, který měl poměr se všemi třemi organizátorkami?

(Alexander „Olin“ Slávik)

ŘEŠENÍ:

Organizátorky měly dohromady celkem deset poměrů, které můžeme rozdělit mezi pět organizátorů tak, aby každý měl právě dva. Organizátory si označíme čísly 1 až 5. Jana měla poměr s organizátory 1, 2, 3, Dana s organizátory 4, 5, 1 a Hana s organizátory 2, 3, 4, 5. Takto měl každý organizátor poměr právě se dvěma organizátorkami. Tudíž tvrzení, že vždy nutně existuje organizátor, který měl poměr se všemi třemi organizátorkami, neplatí.

POZNÁMKY:

S první úlohou si hravě poradili téměř všichni řešitelé. K vyvrácení zadaného tvrzení stačilo najít jedinou situaci, kdy žádný organizátor neměl poměr se všemi organizátorkami. To se v podobě grafů, tabulek nebo jen barvitých líčení podařilo všem, kteří správně pochopili zadání.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 2.

(170; 166; 2,89; 3,0)

Tenista počítá svoji úspěšnost tak, že vydělí počet vyhraných zápasů počtem všech odehraných zápasů. Před začátkem turnaje byla jeho úspěšnost přesně 1/2. Během turnaje odehrál čtyři zápasy, ze kterých tři vyhrál a jeden prohrál. Po turnaji jeho úspěšnost přesáhla 0,503*. Jaký nejvyšší počet zápasů mohl před turnajem vyhrát?* *(Lucia Magurová)*

ŘEŠENÍ:

Počet zápasů, které tenista vyhrál před turnajem, si označíme písmenem n. Potom víme, že před turnajem byla jeho úspěšnost $0{,}5 = \frac{n}{2n}$, takže celkový počet zápasů, které odehrál před turnajem, je $2n$. Po turnaji přibyly čtyři zápasy, z toho tři vyhrané; také však víme, že úspěšnost přesáhla hodnotu 0,503. To si zapíšeme nerovnicí, kterou následně vyřešíme:

$$\begin{aligned}
\frac{n+3}{2n+4} &> 0{,}503,\\
n+3 &> 1{,}006n + 2{,}012,\\
0{,}988 &> 0{,}006n,\\
164{,}\bar{6} &> n.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že ve druhém kroku jsme násobili výrazem $2n+4$, kterým násobit můžeme, protože to je jistě kladné číslo. Nejvyšší celočíselné n splňující danou nerovnost je 164, a protože provedené úpravy byly ekvivalentní, je to také řešení naší úlohy.

Poznámky:

Úloha byla přímočará a skoro všechna řešení se ubírala stejnou cestou jako to vzorové. Těm několika řešitelům, kteří si sestavili chybnou nerovnici (zajímavé je, že každý jinou) a tu poté vyřešili, jsem strhnul jeden bod.

(Václav Rozhoň)

Úloha 3.

(144; 129; 2,74; 3,0)

Buď $ABCD$ rovnoběžník. V jakém poměru rozdělují přímky procházející vrcholem A a středy stran BC resp. CD úhlopříčku BD?

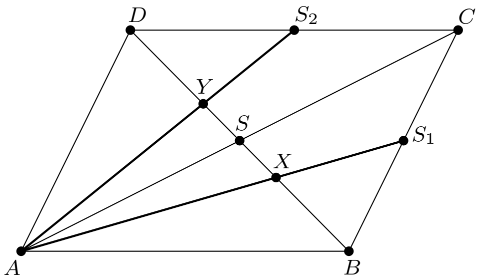
(Míša Hubatová)

Řešení:

Označme si středy stran BC, resp. CD, jako S_1, resp. S_2. Dále si označme průsečík úhlopříček AC a BD jako bod S a průsečíky BD s AS_1, resp. AS_2, jako X, resp. Y.

Úhlopříčky se v rovnoběžníku půlí, proto $|AS| = |SC|$ a $|BS| = |SD|$. V trojúhelníku ABC je proto BS těžnicí na stranu AC. Zároveň je AS_1 těžnicí na stranu CB, takže bod X je těžiště trojúhelníku ABC. Z toho plyne $|BX| = 2|XS|$, neboli $|BX| = \frac{2}{3}|BS| = \frac{1}{3}|BD|$.

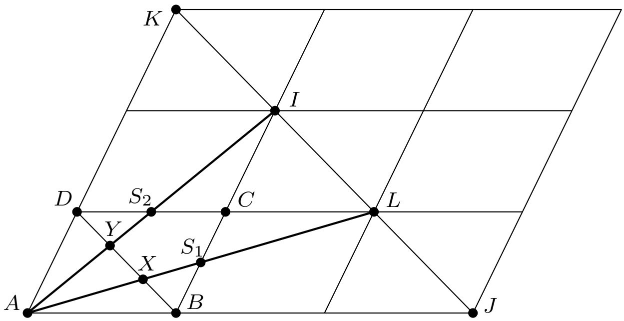
Analogicky z trojúhelníku CDA plyne $|DY| = 2|YS|$, což implikuje $|DY| = \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|BD|$. Body X a Y jsou tedy ve třetinách úhlopříčky BD, takže $|DY| : |YX| : |XB| = 1 : 1 : 1$.



Jiné řešení:

Definujme si body X, Y, S_1 a S_2 stejně jako v minulém řešení. Posunutím rovnoběžníku $ABCD$ vytvoříme síť shodných rovnoběžníků jako na obrázku. Jako I, J, K a L si označme body zvýrazněné na obrázku. Bod B se ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem 3 zobrazí na bod J a bod D na K. Naším cílem bude ukázat, že se také zobrazí bod X na L (a analogicky také bod Y na I). Jednak je úsečka JL rovnoběžná s BD, a tedy i s BX. Dále z toho, že $ABLC$ je rovnoběžník, plyne, že jeho úhlopříčka AL půlí druhou úhlopříčku BC. Proto S_1 leží na AL, a tedy i X leží na AL. A protože obraz X je průnikem AX a rovnoběžky s BX vedené skrze obraz B, je L skutečně obrazem X.

Protože KI, IL a LJ jsou úhlopříčky ve shodných rovnoběžnících, je $|KI| = |IL| = |LJ|$. Po opětovném použití stejnolehlosti získáváme $|DY| = |YX| = |XB| = \frac{1}{3}|BD|$. Hledaný poměr tedy je $1 : 1 : 1$.



Ještě jiné řešení:
Označme si body stejně jako v prvním řešení. Z rovnoběžnosti přímek DC a AB plyne rovnost $|\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle S_2DY|$, protože tyto dva úhly jsou střídavé. Dále platí $|\sphericalangle DYS_2| = |\sphericalangle BYA|$, protože se jedná o vrcholové úhly. Navíc platí $|DS_2| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{2}|BA|$. Proto podle věty uu dostáváme $\triangle AYB \sim \triangle S_2YD$ s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$. Z toho plyne $|DY| = \frac{1}{2}|YB|$. Analogicky dostaneme i $|BX| = \frac{1}{2}|XD|$. Z toho plyne $|DY| = |YX| = |XB|$, takže kýžený poměr je 1 : 1 : 1.

Poznámky:
Úloha byla celkem jednoduchá, o čemž svědčí počet správných řešení. Někdy se vyskytovala řešení pro nějaké konkrétní rovnoběžníky – čtverec atd. Proto připomínám, že pokud není v zadání specifikováno jinak, myslí se obecný rovnoběžník a je nutno dokazovat vše obecně. Rozhodně se také za důkaz nepovažuje objekt narýsovaný v geogebře nebo v ruce! Pokud se dalo řešení jednoduše zobecnit, dával jsem dva body, v opačném případě nebo v případech, kdy chyběly důkazy či jejich podstatné části, jsem dával jeden.

Dalším nešvarem, vyskytujícím se u poměrně velkého množství řešitelů, je nedbat při zapisování podobnosti trojúhelníků na pořadí vrcholů. To je nutné, neboť nám pak toto pořadí udává, jaké strany jsou v jakém poměru. Při nedodržení značení získávám poměr jiných stran, než chci nebo používám v důkazu. *(Honza Kadlec)*

Úloha 4.

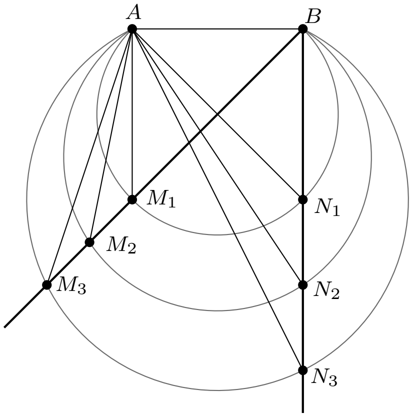
(78; 70; 4,21; 5,0)

Jsou dány tři kružnicové oblouky se společnými koncovými body A a B. Z bodu B vedeme dvě polopřímky tak, že obě leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce AB. První polopřímka oblouky protne postupně v bodech M_1, M_2, M_3, druhá pak postupně v bodech N_1, N_2, N_3. Dokažte, že

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|} = \frac{|N_1N_2|}{|N_2N_3|}.$$

(Martin Töpfer)

Řešení:



Všimneme si, že úhly AM_1B a AN_1B jsou shodné, neboť jsou to obvodové úhly oblouku AB. Obdobně jsou shodné dvojice AM_2B a AN_2B i AM_3B a AN_3B. Trojúhelníky AM_1M_2 a AN_1N_2 jsou podobné podle věty uu (už jsme ukázali $|\sphericalangle AM_2B| = |\sphericalangle AN_2B|$ a úhly AM_1M_2 a AN_1N_2 jsou doplňkové do $180°$ k úhlům AM_1B, resp. AN_1B, jejichž shodnost jsme si též již ukázali). Obdobně si jsou podobné i trojúhelníky AM_2M_3 a AN_2N_3. Z první podobnosti vyplývá

$$\frac{|M_1M_2|}{|N_1N_2|} = \frac{|AM_2|}{|AN_2|}$$

a z druhé

$$\frac{|M_2M_3|}{|N_2N_3|} = \frac{|AM_2|}{|AN_2|}.$$

Pravé strany jsou si rovny, takže se musí rovnat i levé, tedy

$$\frac{|M_1M_2|}{|N_1N_2|} = \frac{|M_2M_3|}{|N_2N_3|},$$

což už lze jednoduše upravit na dokazovanou rovnost.

Poznámky:

Téměř všechna řešení, která jsem opravoval, byla správně a téměř všechna správná řešení vypadala jako vzorové. Nejčastější chybou bylo, že se při dokazování shodnosti úhlů $\sphericalangle AM_1B$ a $\sphericalangle AN_1B$ řešitelé místo shodnosti obvodových úhlů snažili používat Thaletovu větu. Ta ale lze použít pouze v případě, kdy by AB byl průměr daného oblouku. V řešení, kde jsem objevil alespoň náznak toho, že autor ví, že je Thaletovu větu pro použití v tomto případě nutno nějak „zobecnit“, jsem ale za tuto chybu body nestrhával. Dalším častým problémem bylo, že mnozí nijak nedokázali a dokonce ani nezmínili, že koeficienty podobností mezi trojúhelníky jsou stejné (ve vzoráku dokázáno porovnáváním s poměrem $|AM_2| : |AN_2|$), za což jsem jeden bod strhával. *(Viki Němeček)*

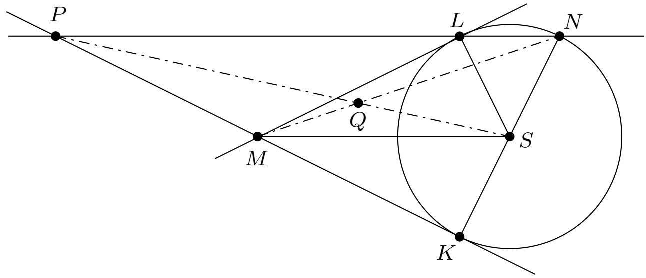
Úloha 5.

(101; 91; 4,28; 5,0)

Tečny ke kružnici k se středem S se jí dotýkají v bodech K, L a protínají se v bodě M. Bod N leží na k tak, že KN je její průměr. Označme P průsečík přímek LN a KM a Q průsečík PS a MN. Vypočtěte $|MQ| / |QN|$.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:



Tečny z bodu M ke kružnici k mají stejnou délku, tudíž $|MK| = |ML|$. Dále $|SK| = |SL|$, protože obě úsečky jsou poloměry kružnice k. Trojúhelníky SMK a SML jsou tedy shodné a spolu tvoří deltoid, jehož úhlopříčka SM tvoří osu druhé úhlopříčky KL.

Nyní se podívejme na trojúhelník KLP, který má pravý úhel u vrcholu L, neboť KLN je úhel nad průměrem KN v kružnici k, a proto je pravý. Střed kružnice opsané trojúhelníku KLP je střed úhlopříčky KP, který také náleží osám odvěsen. Zmíněný střed kružnice opsané musí být tedy M, protože leží na KP a ose KL. Z toho plyne, že M je střed KP. Vyšlo tak najevo, že bod Q je těžiště trojúhelníka KNP. Poměr, v kterém těžiště dělí těžnici, je přitom dobře znám – kýžený výsledek je $|MQ|/|QN| = 1/2$.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla správná a skoro všechna spočívala v důkazu, že Q je těžiště trojúhelníka PKN jako ve vzorovém řešení, nebo že MS je rovnoběžná s PN a hledaný poměr se pak dá vypočítat z podobných trojúhelníků MQS a NQP. Dále chci upozornit, že se nesmí zapomenout na slovní definici přikreslených bodů nebo úhlů, které se nevyskytly v zadání úlohy.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 6.

(55; 24; 1,91; 0,0)

Pětiprvkovou množinu nenulových reálných čísel nazveme vykutálenou, pokud platí, že pro libovolná tři různá čísla x, y, z ležící v této množině je $xy + yz + zx$ racionální číslo. Ukažte, že poměr libovolných dvou čísel z jedné vykutálené množiny je racionální. *(Rado Švarc)*

Řešení:

Budeme používat skutečnost, že součet, rozdíl, součin i podíl nenulových racionálních čísel jsou také racionální. To se ukáže lehce – racionální čísla x a y zapíšeme jako $x = p/q$ a $y = r/s$, kde p, q, r a s jsou nenulová celá čísla. Potom dostáváme

$$x \pm y = \frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} = \frac{ps \pm qr}{qs} \in \mathbb{Q},$$

$$xy = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \in \mathbb{Q},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr} \in \mathbb{Q},$$

což jsme chtěli.

Nechť a a b jsou libovolné dva různé prvky vykutálené množiny M. Ukážeme, že a/b je racionální. Zbylé prvky M budeme označovat jako c, d a e. Platí $ab+bc+ca \in \mathbb{Q}$ a $ab+bd+da \in \mathbb{Q}$. Potom i rozdíl těchto dvou čísel je racionální, takže

$$(ab+bc+ca)-(ab+bd+da)=(a+b)(c-d)\in\mathbb{Q}.$$

Analogicky dostaneme i vztahy

$$(b+e)(c-d)\in\mathbb{Q} \quad \text{a} \quad (a+e)(c-d)\in\mathbb{Q}.$$

Pak ale musí být i

$$(a+b)(c-d)+(a+e)(c-d)-(b+e)(c-d)=2a(c-d)\in\mathbb{Q}.$$

Analogicky dostaneme

$$2b(c-d)\in\mathbb{Q}.$$

Nyní si uvědomíme, že a i b jsou ze zadání nenulová. Navíc c a d jsou různé prvky, takže $c-d\neq 0$. Proto $2a(c-d)\neq 0$ a $2b(c-d)\neq 0$. A protože poměr dvou nenulových racionálních čísel je racionální, dostáváme, že

$$\frac{2a(c-d)}{2b(c-d)}=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q},$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Řešení se sešlo vcelku mnoho, většina z nich ovšem byla špatně. Velká část řešitelů prohlásila, že pokud je součet tří čísel racionální, potom všechna tato čísla jsou taktéž racionální. To ale zjevně neplatí, například pro trojici $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Většina úspěšných řešení používala stejný postup jako řešení vzorové – různým sčítáním, odčítáním a dělením čísel, o nichž je známo, že jsou racionální, dostávat další racionální čísla. Zajímavý postup, který vlastně objasňoval, proč řešení ostatních vážně funguje, zvolila *Vendula Kuchyňová*, která použila substituci $x_1=ab$, $x_2=ac$, …, $x_{10}=de$ a prohlásila, že ze zadání plyne, že $x_1+x_2+x_5=q_1$ pro nějaké racionální q_1 a analogicky pro další součty. Tím dostala soustavu deseti lineárních rovnic o deseti neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ s racionálními parametry $q_1, q_2, \ldots, q_{10}$. Následně prohlásila, že tuto soustavu umíme vyřešit a tím každé x_i vyjádřit jako nějakou racionální kombinaci q_1 až q_{10}. V tu chvíli už víme, že součin každých dvou čísel z vykutálené množiny je racionální, a protože $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$, jsme hotovi. Kvůli nejasnostem v tom, proč má daná soustava vždy jednoznačné řešení, se tak dopracovala ke kurióznímu ohodnocení $4+i$. *(Rado Švarc)*

Úloha 7.

(67; 24; 2,34; 1,0)

V trojúhelníku ABC má úhel při vrcholu A velikost $60°$. Uvnitř trojúhelníka se nachází bod K, pro který $|\sphericalangle AKB|=|\sphericalangle BKC|=|\sphericalangle CKA|=120°$. Označíme-li střed strany BC jako M, dokažte rovnost

$$\frac{|KA|+|KB|+|KC|}{|AM|}=2.$$

(Martin Töpfer)

Řešení:
Označíme si $x = |AK|$, $y = |BK|$, $z = |CK|$ a $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $|\sphericalangle BAK| = \varphi$. Z toho plyne $|\sphericalangle CAK| = 60^\circ - \varphi$. Dopočítáním do 180° v trojúhelníku ABK dostaneme

$$|\sphericalangle ABK| = 180^\circ - 120^\circ - \varphi = 60^\circ - \varphi,$$

takže $\triangle ABK \sim \triangle CAK$ podle věty *uu*. Tedy $x/y = z/x$, tedy $x^2 = yz$. Nyní použijeme kosinovou větu, která tvrdí, že v libovolném trojúhelníku XYZ platí

$$|XZ|^2 = |XY|^2 + |YZ|^2 - 2 \cdot |XY| \cdot |YZ| \cdot \cos |\sphericalangle XYZ|.$$

Z rovnosti $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ plyne, že použitím kosinové věty pro trojúhelníky AKB, AKC a BKC získáme vztahy

$$b^2 = x^2 + z^2 + xz,$$
$$c^2 = x^2 + y^2 + xy,$$
$$a^2 = z^2 + y^2 + zy.$$

Nyní použijeme kosinovou větu na trojúhelníky ABM a ACM. Tím dostaneme

$$b^2 = |AM|^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot |AM| \cdot \cos |\sphericalangle CMA|,$$
$$c^2 = |AM|^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot |AM| \cdot \cos |\sphericalangle BMA|.$$

Jelikož $|\sphericalangle BMA| = 180^\circ - |\sphericalangle CMA|$, tak díky vztahu $\cos \phi = -\cos(180^\circ - \phi)$ dostaneme po sečtení těchto rovností $b^2 + c^2 = 2|AM|^2 + a^2/2$. Tedy $4|AM|^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Nyní můžeme dosadit.

$$\begin{aligned} 4|AM|^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ &= 2(x^2 + z^2 + xz) + 2(x^2 + y^2 + xy) - (z^2 + y^2 + zy) \\ &= 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - yz. \end{aligned}$$

Ze vztahu $x^2 = yz$ získáme rovnost $3x^2 = 3yz$. Tu dosadíme a dostaneme

$$4|AM|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = (x + y + z)^2.$$

Obě strany můžeme odmocnit, protože jsou nezporné, a dostaneme

$$2|AM| = |AK| + |BK| + |CK|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Druhé řešení (podle Tomáše Konečného):
Uvažujme nový trojúhelník A_1BC_1 vzniklý rotací trojúhelníku ABC kolem bodu B o 60° směrem od bodu C k bodu A. Nechť K_1 je obraz K v této rotaci. Protože otočení je shodné zobrazení, platí $|A_1K_1| = |AK|$. Navíc z $|BK| = |BK_1|$ a $|\sphericalangle KBK_1| = 60^\circ$ plyne, že $\triangle BKK_1$ je rovnostranný, takže speciálně platí $|KK_1| = |BK|$. Potom platí

$$|AK| + |BK| + |CK| = |A_1K_1| + |K_1K| + |KC|.$$

Jelikož $|\sphericalangle CKA| = 120^\circ$, po otočení AK o 60° přímky CK a K_1A_1 svírají úhel 180°, tedy A, K_1, K a C leží na jedné přímce. Z toho také plyne

$$|A_1K_1| + |K_1K| + |KC| = |A_1C|,$$

takže vlastně chceme dokázat, že $|A_1C| = 2|AM|$.

Přímky AC a BA_1 jsou rovnoběžné, jelikož $|\sphericalangle A_1BA| = |\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Střed A_1B nazvěme X. Trojúhelník A_1AB je rovnostranný a AX je jeho těžnice. Proto je zároveň jeho výškou, takže $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$. Potom $BXAC$ je lichoběžník s pravým úhlem u vrcholu X. Střed XA nazvěme Y. Potom YM je střední příčka lichoběžníka $AXBC$ a YM je kolmá na XA. Ale jelikož $|XY| = |AY|$, je $\triangle YMX$ shodný s $\triangle YMA$, tedy $|AM| = |XM|$.

V trojúhelníku BA_1C je však XM střední příčka, z čehož dostáváme $2|XM| = |A_1C|$. Proto je i $2|AM| = |A_1C|$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina řešení obsahovala tvrzení, že když máme trojúhelník splňující zadání, potom už musí být rovnostranný. To samozřejmě není pravda, bod K má každý trojúhelník. Říká se mu *Fermatův*, nebo též *Torriceliho bod* a platí pro něj spousta zajímavých věcí. Správná řešení většinou používala vzorec pro výpočet těžnice kombinovaný se vztahem $|AK|^2 = |BK| \cdot |CK|$.

Dvě řešení zase použila zobrazení, ze kterého už bylo řešení vidět. Tyto řešení jsem odměnil $+i$, jelikož byly výrazně elegantnější než algerbaické počítání. *(Jakub Svoboda)*

Úloha 8.

(58; 15; 1,07; 0,0)

Pro přirozené číslo n označme jeho ciferný součet symbolem $S(n)$. Najděte největší možnou hodnotu poměru $S(n) / S(16n)$. *(Martin Töpfer)*

Řešení:
Označme cifry přirozených čísel a a b tak, že $a = \sum_{i=0}^{k} 10^i a_i$ a obdobně $b = \sum_{j=0}^{l} 10^j b_j$. Nyní ukážeme několik základních tvrzení, která platí o ciferném součtu.

(1) $S(10^n a) = S(a)$: Vynásobením a mocninou desítky jen připíšeme n nul na konec čísla, ciferný součet se tedy nezmění.
(2) $S(a) \leq a$.
(3) $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$: Podívejme se, jak se sčítají čísla a a b pod sebou. Na každém řádu je buď součet příslušných cifer z a a b, nebo dojde k přenosu jedničky. Pak se číslo na tomto řádu sníží o 10 a číslo řádu o jedna vyššího se zvýší o jedna, ciferný součet se tedy celkově sníží o 9. Proto platí dokazovaná nerovnost.
(4) $S(a \cdot b) \leq S(a) \cdot S(b)$: Násobení a a b rozepíšeme jako násobení jednotlivých cifer a následně výraz odhadneme pomocí předchozích tvrzení:

$$S(a \cdot b) = S\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_i b_j 10^{i+j}\right) \leq \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} S\left(a_i b_j 10^{i+j}\right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} S\left(a_i b_j\right) \leq \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_i b_j = S(a) \cdot S(b).$$

S použitím těchto pozorování již snadno odhadneme hodnotu zadaného poměru

$$\frac{S(n)}{S(16n)} = \frac{S(10000n)}{S(16n)} \leq \frac{S(625) \cdot S(16n)}{S(16n)} = 13.$$

Poměr může nabývat hodnoty nejvýše 13. Této hodnoty dosáhneme např. pro $n = 625$.

Poznámky:
Sešlo se nebývalé množství řešení osmičky, ale bohužel většina řešení sice našla maximální hodnotu, ale chyběla hlavní část úlohy – dokázat, že jde skutečně o maximum. Nejčastější chybný argument byl, že pro maximalizaci hodnoty zlomku stačí minimalizovat hodnotu jmenovatele. To není pravda už jen proto, že pro libovolně velký jmenovatel dokážeme nalézt n, aby hodnota zlomku byla 13 (n-krát za sebe napíšeme 625). Dalším jednoduchým příkladem, proč taková úvaha nebude správná, je maximalizace hodnoty nějakého jiného zlomku – například n^2/n. Podle předchozího argumentu by takový zlomek nabýval hodnoty nejvýše 1 (pro $n = 1$). V některých řešeních byl i pokus o rozebrání jiných hodnot n než 625, ale většinou i tato řešení rozebrala jen některé hodnoty n, o kterých řekla (bez zdůvodnění), že budou nejlepší.

Obecně u podobných úloh je úvaha založená na myšlence, že nějaký konkrétní postup (zde $S(n) = 1$) bude nejlepší, většinou nevede k cíli. Často je totiž popsaný postup založený na nějaké lokální optimalizaci nebo na pouhé intuici řešitele. Ani jedna z těchto věcí ale nezaručuje optimální výsledek a u opravovatele neprojde.

Úlohu jsem se rozhodl bodovat velmi přísně a dost pravděpodobně jde o úlohu s nejnižším bodovým průměrem za poslední dobu. Za pouhé najití n, pro které má zlomek hodnotu 13, jsem neuděloval žádný bod. Stejně tak si body nevysloužily ani řešení založená na nějaké variaci argumentu zmíněného v poznámkách, protože podobný postup by nebylo možné nějak jednoduše rozšířit tak, aby šlo o řešení úlohy. U lehčí úlohy bych zřejmě i za částečné výsledky nějaké body uděloval, ale u osmé (tj. teoreticky nejtěžší) úlohy v sérii mi přijde, že by mělo být vyžadováno úplné řešení. *(Martin Töpfer)*

Úlohy na šachovnici

3. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(141; 135; 2,90; 3,0)

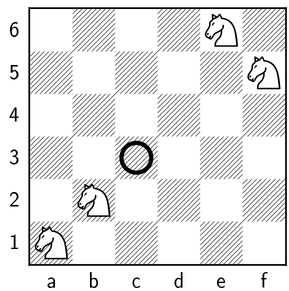
Rozmístěte na šachovnici 6×6 *čtyři tchýně*[1] *tak, aby se navzájem neohrožovaly a právě jedno volné pole zůstalo neohrožené.* *(Martin Töpfer)*

Řešení:

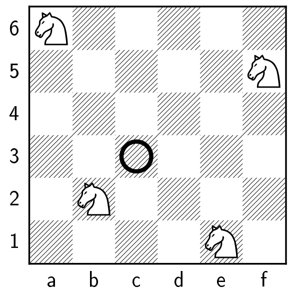
V této úloze bylo úkolem najít vyhovující rozestavení tchyní. Možností, jak nějaké takové najít, existuje mnoho. My si ukážeme, jaké úvahy nám v hledání mohou pomoci.

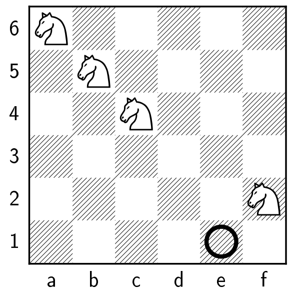
Začneme pozorováním, že žádné dvě tchyně se nemohou vyskytovat ve stejném řádku ani sloupci, protože by se jinak ohrožovaly tahem věže. Právě čtyři řádky a čtyři sloupce tedy budou obsazeny tchyní. Dva neobsazené řádky a sloupce nám pak určují čtyři políčka, která tchyně nebudou ohrožovat tahem věže. Víme, že jedno z těchto polí musí zůstat neohrožené a zbylá tři musí být tchyněmi ohrožena tahem koně.

Nyní se můžeme zaměřit na ta rozestavení, kde jsou neobsazené právě dva prostřední sloupce a dva prostřední řádky. Po chvíli zkoušení pak dojdeme k jednomu z rozestavení na prvních dvou obrázcích (či k rozestavení, které z těchto dvou vznikne tak, že šachovnici otočíme, či překlopíme podle jedné z jejích os symetrie).



[1] Tchýně je figura pohybující se po šachovnici pomocí tahů koně i věže.





Jinou možností je začít s rozestavením čtyř tchyní na hlavní diagonálu šachovnice. Toto ještě není správné řešení, neboť zbývají dvě neohrožená políčka. Přesunutím poslední tchyně však již získáme validní pozici na třetím obrázku.

Poznámky:

Sešlo se mnoho různých rozestavení a drtivá většina z nich byla správně. Jejich tvůrci si tak zasloužili plný počet bodů. Jak si také někteří řešitelé povšimli, správných řešení je hodně[2]. To je mimo jiné způsobeno tím, že otočením či překlopením šachovnice ze správného řešení vyrobíme zase správné řešení.

Na závěr opravme jednu gramatickou chybu, ke které nedopatřením v zadání došlo a kterou někteří z Vás postřehli. Slovo tchyně je odvozeno od podstatného jména tchán pomocí přípony -yně, a není tedy důvod psát jej s dlouhým ý, čehož jsme se v zadání dopustili. Omlouváme se a doufáme, že Vás tato nepřesnost při řešení natolik závažného problému, jakým bezpečné rozmístění tchyní jistě je, příliš nerušila. *(Václav Rozhoň)*

Úloha 2.

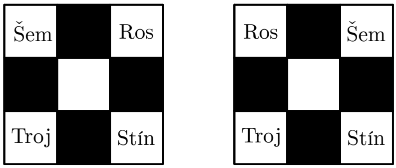
(98; 76; 2,07; 2,0)

V rozích šachovnice 3×3 stojí dokola postupně Šemík, Rosinanta, Stínovlas a Trojský kůň. Všichni se mohou pohybovat jako šachoví koně a nesmí stát dva na stejném poli. Je možné, aby se za těchto podmínek Šemík s Rosinantou prohodili a ostatní se vrátili na svá původní místa?

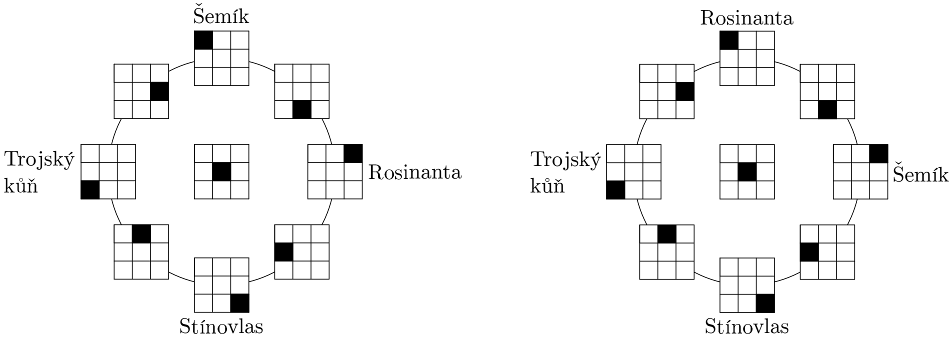
(Anh Dung „Tonda“ Le)

[2] přesněji 340 :)

Řešení:



Uvažme tahy, kterými se koně mohou pohybovat mezi poli. Sestrojíme graf, jehož vrcholy odpovídají polím šachovnice a hrana spojuje dvě políčka taková, že se z jednoho dá jedním tahem skočit na druhé. Výsledný graf je cyklus a jeden izolovaný vrchol (viz obrázek), ve kterém tahy koní odpovídají pohybu na sousední políčko.



Ani v tomto grafu nemohou dva koně stát ve stejném vrcholu. Podíváme-li se, kde stojí Šemík, a půjdeme-li po cyklu po směru hodinových ručiček, nalezneme Rosinantu, Stínovlase a nakonec Trojského koně. Uvedené tahy toto pořadí zachovávají. Rozestavení, do kterého chceme koně rozmístit, má ovšem jiné pořadí, a proto není možné prohodit Šemíka s Rosinantou tak, aby se ostatní vrátili na původní místa.

Poznámky:
Všimněte si, že můžeme vypustit předpoklad o vracení na původní místa a stále to nepůjde. Mezi Šemíkem a Rosinantou je v cyklu pouze jedno políčko, kde nemohou stát oba Stínovlas a Trojský kůň. Nebo můžeme ze šachovnice odstranit Trojského koně, a přesto hledaná posloupnost tahů nebude existovat. Rozmyslete si, že to dokazuje stejný argument s pořadím koňů v cyklu. Kdybychom uvažovali pouze tři koně a nevyžadovali návrat na původní políčko, existovala by posloupnost tahů, při níž by si Šemík s Rosinantou vyměnili místa.

Zhruba třetina řešení se podobala tomu autorskému. Většina těch ostatních se pokoušela o rozbor případů. To není úplně marná cesta, protože na takto malé šachovnici existuje poměrně málo různých situací a většina z nich je navíc v jistém smyslu symetrická. Postup je to ale velmi zdlouhavý a velmi náchylný na chyby. Mnoho řešitelů si snažilo ušetřit práci tím, že vybrali vždy ten *nejlepší* nebo *nejrozumnější* tah, ale bez argumentu s cyklem vůbec není jasné, který tah to je. Navíc není vůbec jasné, proč nemá smysl, aby kůň skočil zpět, odkud přišel (dokud se nezmíní rozestavení na kružnici). A jak vlastně může být nějaký tah *lepší* než jiný, když ani jeden z nich nevede ke zdárnému cíli? Při rozboru případů je nezbytné pozorně prozkoumat všechny možnosti a nezavrhnout nějakou jenom proto, že „nevypadá slibně.“ *(Filip Hlásek)*

Úloha 3.

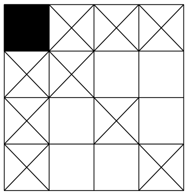
(132; 105; 2,39; 3,0)

Obarvěte sedm polí šachovnice 4×4 tak, aby na ní po odebrání libovolných dvou sloupců a dvou řádků zůstalo alespoň jedno obarvené pole. *(Rado Švarc)*

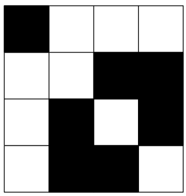
Řešení:

Nejprve si uvědomíme, že po vyškrtnutí libovolných dvou řádků a sloupců nám z šachovnice zbude čtveřice polí, která původně tvořila rohy obdélníku[3] se stranami rovnoběžnými s okrajem šachovnice.

Pro začátek obarvěme horní levý roh šachovnice a přeškrtněme všechna pole ležící na úhlopříčce, v řádku a v sloupci, které obsahují tento roh (viz obrázek).

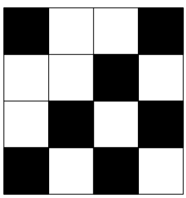


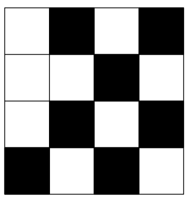
Všimneme si, že žádná čtveřice přeškrtnutých polí netvoří rohy obdélníku. Tudíž všechny obdélníky, které nemají v rohu již obarvené pole, musejí mít v alespoň jednom z rohů některé nepřeškrtnuté pole. Těch už je ale jen 6, tudíž je můžeme obarvit všechna a získáme tak jedno z možných řešení:



Poznámky:

Nejprve bych rád zmínil, že až na proházení řádků a sloupců měla úloha jediné řešení, celkem jich tedy bylo 96. Vzhledem k malým rozměrům zadané šachovnice bylo častým řešením této úlohy zkoušení několika různých obarvení, dokud nebyla splněna zadaná podmínka. Tento postup se ovšem poměrně velkému počtu řešitelů vymstil, jelikož naprostá většina chybných řešení opomněla jeden či dva nepokryté obdélníky. Špatné řešení bylo obvykle podobné jednomu z následujících dvou obarvení:





(Tomáš Novotný)

[3] Čtverec je speciálním případem obdélníku.

Úloha 4.

(89; 80; 3,35; 3,0)

Najděte všechna přirozená n, pro která lze rozdělit šachovnici $n \times n$ na lichý počet čtverců 2×2 a několik[4] *tetromin tvaru T.* *(Rado Švarc)*

Řešení:

Nejprve si dokážeme, že n musí být sudé: Čtverec 2×2 i T-tetromino jsou složené ze čtyř čtverečků. Proto $4 \mid n^2$, a tedy $2 \mid n$.

Dále oddělíme dva případy, $n = 4k + 2$ a $n = 4k$, kde k je nějaké celé nezáporné číslo.

Pro $n = 4k+2$ je možné pokrýt šachovnici lichým počtem čtverců 2×2 bez použití T-tetromina. Zjevně jich můžeme $n/2 = 2k + 1$ položit vedle sebe na spodní okraj mřížky. Pak totéž uděláme ve zbylých $2k$ dvojřádcích a dohromady budeme mít $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ čtverců 2×2, což je lichý počet.

Pro $n = 4k$ obarvíme šachovnici černobíle klasickým způsobem. Protože je n sudé a barvy se pravidelně střídají, je na šachovnici stejně černých i bílých čtverečků. Každý čtverec 2×2 zřejmě zabírá dvě bílá a dvě černá políčka. Naopak T-tetromino pokryje vždy buď jeden bílý a tři černé (nazveme ho *černé*), nebo jeden černý a tři bílé čtverečky (nazveme ho *bílé*). Abychom našimi útvary mohli pokrýt celý čtverec $n \times n$, určitě potřebujeme zakrýt stejný počet bílých i černých políček. Proto ke každému *černému* T-tetrominu musí být na šachovnici jedno *bílé*. Neboli je potřeba použít sudý počet T-tetromin, označme tedy jejich počet jako $2l$ pro l nezáporné celé číslo.

Platí $n = 4k$, neboli $n^2 = 16k^2$. A odečteme-li od celkového počtu polí počet polí zabraných T-tetrominy, dostaneme $16k^2 - 4 \cdot (2l) = 8(2k^2 - l)$. Každý čtverec 2×2 zabírá čtyři políčka, do zbytku šachovnice se jich tedy vejde $8(2k^2 - l)/4 = 2(2k^2 - l)$, což je sudé číslo. Pro n dělitelné čtyřmi proto nelze šachovnici pokrýt podle zadání.

Poznámky:

Úloha nedopadla moc dobře, ačkoli ke správné odpovědi dospěli snad všichni, kteří si správně přečetli zadání. Více než polovina řešitelů ale potom nedokázala, že pro n dělitelné čtyřmi se šachovnice pokrýt nedá. Většinou vágně tvrdili, že „z T-tetromin se nedá sestavit jiný rozumný tvar než čtverce 4×4“, což zaprvé není pravda (lze jimi vyplnit například dvoučtverečkový okraj šachovnice pro $n = 4k + 2$) a zadruhé (což je mnohem důležitější) to opravdu nemůžeme tvrdit jen proto, že jsme nenašli žádné jiné jejich uspořádání. Pro čtyři nebo pět T-tetromin snad ještě můžeme vyzkoušet všechny možnosti, ale pro tisícové počty by to šlo už opravdu těžko.

Stejně tak je potřeba ukázat, že pro $n = 4k + 2$ řešení opravdu existuje. Snadno si lze totiž představit útvar, který na šachovnici zabere $n^2/4$ bílých a $n^2/4$ černých čtverečků, a přesto se vedle něj už nevejde druhý, který by pokryl zbytek šachovnice.

Na závěr bych ještě poznamenala, jaké problémy působilo slovo *tetromino.* Řešitelé ho tak půl napůl používali ve středním a mužském rodě, někteří z něj udělali třeba *tetramín* nebo dokonce *triomino* a vůbec jim nevadilo, že tak se běžně nazývá útvar o čtvereček menší.

(Bára Kociánová)

Úloha 5.

(76; 63; 4,11; 5,0)

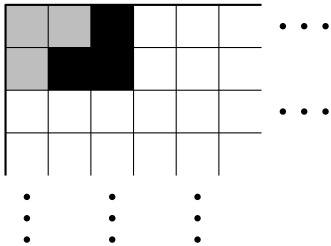
Kuba a Bára spolu hrají hru. Na začátku mají šachovnici 2015×2015*, kde jsou všechna políčka bílá. Kuba v každém svém tahu přebarví nějaký bílý čtverec* 2×2 *na černo, Bára vždy přebarví nějaká tři bílá políčka tvořící jakkoliv orientované L. Pravidelně se střídají v tazích, přičemž Kuba začíná. Prohrává ten, kdo jako první nemůže táhnout. Který z nich má vyhrávající strategii?*

(Kuba Krásenský)

[4] Nemusí být použito žádné.

Řešení:

Vyhrávající strategii má Bára. Ve svém prvním tahu si vybere některý z prázdných rohů šachovnice (takový určitě existuje, protože Kuba zatím stihl vybarvit jen jeden čtverec 2×2) a zahraje do něj následovně:



Vzniknou tak tři *rezervní* políčka (v obrázku vyznačena šedě) ve tvaru L taková, že ani jedno z nich nemůže Kuba svým tahem vybarvit. Potom bude hra pokračovat. Bára bude nadále hrát tak, že nebude vybarvovat žádné z rezervních políček. Jelikož v každém tahu ubude bílých políček, tak časem nastane situace, že na šachovnici už nebude žádný bílý čtverec 2×2. Pokud je v této situaci na tahu Kuba, prohrál, protože nemá co zabarvit. Pokud je na tahu Bára, může zabarvit tři rezervní políčka. Po tomto jejím tahu Kuba nemá co zabarvit, takže také prohrál.

Poznámky:

Úloha byla na pětku celkem jednoduchá a pětibodovými řešeními se to jen hemžilo. Drtivá většina z nich využívala stejnou myšlenku jako to vzorové. Několik řešitelů navrhlo pro Báru strategii takovou, že bude hrát vždy na pozici středově symterickou s předchozím Kubovým tahem – tato strategie funguje také, jen je potřeba dát si pozor na pár technických detailů. *(Tonda Češík)*

Úloha 6. (71; 52; 3,37; 5,0)

Dva kamarádi, Plusík a Mínusík, našli šachovnici 3×3 vyplněnou v nějakém pořadí čísly 1 až 9. Plusík umí ke všem číslům v libovolném čtverci 2×2 přičíst jedničku, Mínusík umí analogicky odčítat. Poté, co si s šachovnicí chvíli takto hráli, objevilo se ve všech jejích políčkách stejné číslo. Kolik to mohlo být? *(Rado Švarc)*

Řešení:

Na začátku je součet čísel na šachovnici rovný 45. Označme p počet tahů Plusíka a m počet tahů Mínusíka. Položme $k = p - m$. Plusík i Mínusík ovlivňují každým svým tahem 4 políčka. Na konci jejich hry tedy bude součet čísel na šachovnici rovný $45 + 4k$.

Dále označme e hodnotu, která se původně nacházela ve středu šachovnice. Každý tah Plusíka i Mínusíka toto číslo mění, a tak na konci bude hodnota na prostředním políčku rovna $e + k$. Na konci však má být na všech polích šachovnice stejná hodnota, tudíž jejich součet bude roven devítinásobku čísla na prostředním políčku. Můžeme tedy psát, že

$$45 + 4k = 9(e + k),$$
$$45 = 9e + 5k.$$

To však znamená, že e je dělitelné 5. Jediné číslo, které bylo na počátku napsáno na šachovnici a bylo dělitelné pěti, je 5. Tedy $e = 5$. Z toho již snadno dopočteme, že $5k = 45 - 9e = 0$, tedy $k = 0$. Hodnota, která nakonec na šachovnici zůstane, je $e + k = 5$. Příkladem šachovnice, kde je možné všechny hodnoty změnit na 5, může být

4	1	2
7	5	3
8	9	6

Plusík jednou zvýší hodnoty v levém horním čtverci a třikrát v pravém horním. Mínusík jednou sníží čísla v pravém dolním a třikrát v levém dolním. Jediné číslo, které mohlo být na všech políčkách šachovnice zároveň je tedy 5.

POZNÁMKY:
Úlohu bylo možno dokázat mnoha různými postupy. Ti, kteří předvedli rychlé a elegantní řešení, byli odměněni imaginárním bodem. Část řešitelů mylně předpokládala, že se Plusík a Mínusík ve svých tazích musí pravidelně střídat. *(Martin Hora)*

Úloha 7.

(67; 41; 3,12; 4,0)

Na šachovnici 2015×2015 *stálo* 2015 *věží, z nichž se žádné dvě neohrožovaly. Náhle se všechny proměnily v tchýně, udělaly jeden tah jako koně a proměnily se zpět ve věže. Dokažte, že nyní se nutně nějaké dvě z nich ohrožují.* *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

ŘEŠENÍ:
Zavedeme si souřadnice políček tak, že souřadnice levého horního políčka je $(1, 1)$ a souřadnice pravého spodního políčka je $(2015, 2015)$. Pokud se žádné dvě věže neohrožují, musí být každá v řádku i sloupci sama, a protože je věží stejně jako řádků a sloupců, je v každém řádku i sloupci právě jedna věž.

Uvažujme nyní součet x-ových a y-ových souřadnic všech věží. Na začátku se žádné dvě věže neohrožovaly, proto se každý řádek i každý sloupec vyskytl v součtu právě jednou. Součet byl tudíž roven

$$1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + 2015 + 2015 = 2 \cdot \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2015 \cdot 2016.$$

Předpokládejme, že se ani po tahu žádné dvě věže neohrožují. Potom je součet jejich souřadnic zase $2015 \cdot 2016$, takže se nezměnil.

Ale každá věž se pohnula dohromady o tři políčka, změnila tedy součet souřadnic o liché číslo. A protože věží je 2015, dohromady také změnily součet souřadnic o liché číslo, což je spor.

ŠACHOVNICOVÉ ŘEŠENÍ (PODLE JANA ŠORMA):

Lemma. *Mějme šachovnici* $(2k-1) \times (2k-1)$*, kde* k *je přirozené, a na ní* $2k-1$ *věží rozmístěných tak, aby se neohrožovaly. Pokud šachovnici obarvíme šachovnicově tak, aby levé horní políčko bylo černé, pak je na černých políčkách lichý počet věží.*

Důkaz. Indukcí podle k.

Pro šachovnici 1×1 tvrzení platí. (Je tam jedno černé políčko a na něm jedna věž.)

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $2k-1$, a mějme šachovnici $(2k+1) \times (2k+1)$ a na ní $2k+1$ věží rozmístěných tak, aby se neohrožovaly. Každá věž je sama v řádku i ve sloupci. Rozebereme dvě možnosti:

(i) Pokud je na černých políčkách pouze jedna věž, tvrzení platí.

(ii) Jinak jsou na černých políčkách alespoň dvě věže. Nějaké takové dvě vybereme a odebereme je i s jejich řádky a sloupci. Tím jsme dostali vyhovující šachovnici $(2k-1) \times (2k-1)$, na kterou použijeme indukční předpoklad, tedy že tam je lichý počet věží na černých políčkách. A pak zpátky přidáme ty dvě, čímž se parita nezmění.

□

Nyní je úloha triviální, protože skokem koně změní figura barvu svého políčka. Protože je věží 2015, můžeme použít lemma. Na začátku se neohrožují, je jich lichý počet na černých, a tedy sudý počet na bílých políčkách. Skokem koně změní svou barvu, takže bude na černých políčkách sudý počet věží. Proto se nějaké dvě budou ohrožovat.

Řešení pomocí cyklů v permutacích (podle Adama Španěla):
Opět si uvědomíme, že když se věže neohrožují, je v každém řádku i v každém sloupci právě jedna.

Nyní si celou šachovnici promítneme na osu x (tzn. máme jeden řádek dlouhý 2015 políček). Na každém políčku je právě jedna věž. Předpokládejme pro spor, že se věže po skoku neohrožují. To znamená, že je opět každé políčko zabrané. Nechť první věž skočila na políčko i. Věž, která stála před skokem na i, musela skočit na nějaké jiné políčko. Takto pokračujeme, ale protože je políček jen 2015, musela někdy nějaká věž skočit na políčko 1, čímž nám vznikl cyklus. A my si přesouvání věží rozdělíme na takové cykly.[5]

Každá věž mohla skočit o ± 2 nebo o ± 1 políčko. Aby se cyklus uzavřel, musí být součet skoků 0, což je sudé číslo. Takže počet skoků o 1 musel být sudý. A to platí pro každý cyklus, tedy celkový počet skoků o 1 ve všech řádcích musel být sudý. Proto skoků o 2 byl lichý počet (protože dohromady jich bylo 2015).

Ale tutéž úvahu můžeme udělat, pokud si šachovnici promítneme na osu y. Každý kůň skočí o 2 ve směru jedné osy a o 1 ve směru druhé, neboli pokud ve směru x skočil o 2, skočí ve směru y o 1 a opačně. Podle předchozí úvahy ve směru y skočil lichý počet koňů o 1. Ale to je spor, protože aby se neohrožovali, musel by jich o 1 skočit sudý počet.

Poznámky:
Úloha byla na sedmičku poměrně jednoduchá a tomu také odpovídá počet došlých řešení. Několik řešitelů tvrdilo, že jediné možné vyhovující rozmístění je diagonální, což není pravda (dokonce existuje 2015! vyhovujících rozmístění).[6] Mnoho řešení se snažilo ukázat, že pro nějaké konkrétní rozložení věží se je přesunout nepovede, ale úloha chtěla dokázat, že pro každé vyhovující rozložení věží a každou variantu jejich skoků se nakonec budou nějaké dvě ohrožovat. To je častá chyba v chápání úlohy, dávejte si na to pozor, zbytečně pak ztrácíte body. *(Matěj Konečný)*

Úloha 8.

(24; 15; 2,42; 3,0)

Kouzelníci Štěpán a David si pro Rada připravili trik s šachovnicí $n \times n$. Nejprve David odešel pryč, aby nic neviděl ani neslyšel. Poté Štěpán Radovi nakázal, ať na každé políčko položí dle své vůle buď bílý, nebo černý knoflík. Následně ho nechal, aby zvolil libovolné políčko A a sdělil mu, které to je. Nato si Štěpán vybral políčko B (ne nutně různé od A) a změnil barvu knoflíku, který na B ležel. Když potom přišel David, byl schopný pouze z pohledu na šachovnici uhodnout, které políčko A si Rado vybral. Pro která n je tento trik proveditelný? *(Rado Švarc)*

Řešení:
Nejprve předpokládejme, že je možné trik uskutečnit pro šachovnici $n \times n$. Jakýkoliv způsob, jakým je možné rozmístit knoflíky na šachovnici, budeme nazývat konfigurací.

David je schopen z pouhého pohledu na šachovnici zjistit, které políčko si Rado vybral. Nechť S_P je množina všech konfigurací, podle kterých David pozná, že si Rado vybral políčko P. Protože David je schopný se jednoznačně rozhodnout, jsou všechny tyto množiny disjunktní.

Nechť M je to políčko šachovnice, které má nejmenší množinu S_M. Protože políček je n^2, existuje 2^{n^2} možných konfigurací. Protože žádná konfigurace neleží ve dvou množinách, každá množina má velikost alespoň $|S_M|$ a celkem je jich n^2, platí

$$n^2 \cdot |S_M| \leq 2^{n^2}.$$

Pro každou konfiguraci z S_M existuje n^2 konfigurací, které se od ní liší jen v barvě jednoho knoflíku. Takže celkově je maximálně $n^2 \cdot |S_M|$ konfigurací, které se liší jen o jedna od nějaké

[5] Skoky věží odpovídají nějaké permutaci a my pracujeme s jejím rozkladem na cykly.

[6] $n!$ se čte n faktoriál a značí to součin $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

konfigurace z S_M. Ovšem aby byl trik uskutečnitelný i v případě, že si Rado vybere M, musí pro každou konfiguraci existovat konfigurace z S_M, která se od ní liší jen v barvě jednoho knoflíku. Protože konfigurací je 2^{n^2}, dostáváme vztah

$$n^2 \cdot |S_M| \geq 2^{n^2}.$$

Porovnáním těchto dvou nerovností dostáváme $n^2 \cdot |S_M| = 2^{n^2}$, takže $n \mid 2^{n^2}$. To znamená, že n musí být mocnina dvou.

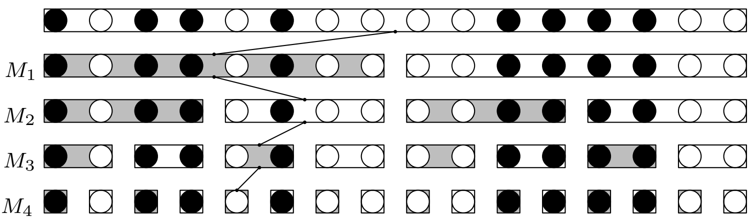
Nyní ukážeme, že pokud $n = 2^k$ pro nějaké nezáporné celé k, je trik už proveditelný. Pro $n = 1$ je to lehké – David ví, že si Rado zvolil to jediné políčko, které na šachovnici je. Předpokládejme dále, že $n > 1$. Ukážeme si dva různé způsoby, jak řešení dokončit.

Řešení XORem:
Budeme používat takzvaný XOR. Nechť a a b jsou nezáporná celá čísla, která se v binární soustavě zapíšou jako $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ a $\overline{b_1b_2\ldots b_k}$ (pokud nemají stejný počet cifer, tak to menší doplníme zleva nulami). Pro každé i od jedné do k nechť $c_i = 0$, pokud $a_i = b_i$, a $c_i = 1$ v opačném případě. Potom XOR a a b zadefinujeme jako takové číslo $a \oplus b$, které se v binární soustavě zapíše jako $\overline{c_1c_2\ldots c_k}$. Například $12 \oplus 5 = 1100_2 \oplus 0101_2 = 1001_2 = 9$. Povšimněme si, že $a \oplus a = 0$, a pokud $a \oplus b = c$, pak $a \oplus c = b$.

Políčka na šachovnici si označíme čísly od 0 do $2^{2k} - 1$. Potom Štěpán s Davidem postupují následovně: Nechť x je XOR čísel všech políček, na které Rado položil černý knoflík a nechť a je číslo políčka A. Potom Štěpán změní barvu knoflíku na políčku s číslem $x \oplus a$ (takové existuje, protože na šachovnici jsou právě všechna políčka, jejichž čísla mají $2k$ nebo méně cifer). Po této změně bude XOR čísel všech políček s černým knoflíkem roven $x \oplus (x \oplus a) = a$. Proto si David pouze spočítá XOR všech políček s černým knoflíkem a dostane A.

Řešení půlením intervalů (podle Františka Coufa):
Všechna políčka šachovnice si pomyslně poskládáme za sebe a vytvoříme pole délky n^2. To rozdělíme na dvě souvislé části, přičemž levou nazveme M_1. Následně si každou z částí rozdělíme na dvě a levé půlky obou vložíme do množiny M_2. Poté opět každý interval rozdělíme na dvě poloviny a ty levé vložíme do M_3. Postupujeme dál a dál, dokud intervaly nejsou velikosti 1. K těm se dostaneme po $2k - 1$ krocích.

Níže uvedený obrázek prezentuje dělení pro šachovnici o šestnácti políčkách, přičemž M_i je tvořena všemi šedými částmi v příslušném řádku.



David po příchodu k šachovnici bude postupovat následujícím algoritmem: pokud je v M_i sudý počet černých knoflíků, přesune se v i-tém kroku do levé poloviny intervalu, ve kterém právě je, jinak se přesune do pravé. Na příkladu na obrázku vidíme, že v M_1, M_2, M_3 a M_4 jsou postupně 4, 5, 4 a 4 černé knoflíky, a proto se David přesouvá doleva, doprava, doleva a doleva. Za odpověď zvolí to políčko, na kterém skončil.

Stačí nám tedy ukázat, že Štěpán umí změnit jeden knoflík tak, aby David skončil přesně na tom políčku, které Rado zvolil. Štěpán ví, jakou posloupnost příkazů „doleva“ a „doprava“ musí David vykonat. Proto se podívá, zda by ho v i-tém kroku současná konfigurace posílala na správnou, nebo špatnou stranu. Pokud na špatnou, zapamatuje si množinu M_i, jinak si zapamatuje její doplněk. Chce, aby knoflík, který změní, byl ve všech zapamatovaných množinách.

Ovšem pomocí jednoduché indukce se lehce ukáže, že průnik prvních i zapamatovaných množin má průnik právě v jednom intervalu délky 2^{2k-i}. Skutečně, pro $i = 1$ toto platí, a pokud tvrzení platí pro i, pak průnik prvních $i+1$ zapamatovaných množin je buď levá, nebo pravá půlka průniku prvních i množin. To znamená, že průnik všech množin je interval délky 1, a tudíž Štěpán skutečně najde knoflík, jehož přebarvením se změní parita počtu černých knoflíků právě těch intervalů, které posílaly Davida na špatnou stranu. Díky tomu David najde správné políčko.

Poznámky:
Úloha byla na osmičku spíše lehká, a protože sestávala ze dvou částí, mnoho řešitelů skutečně tu lehčí vyřešila. Často se ale neshodli na tom, která to je.

Krom dvou nastíněných řešení (rozmyslete si, že jde vlastně o to samé řešení, jen jinak zapsané), se objevilo ještě třetí, které úlohu převedlo na obarvování grafu hyperkrychle Q_{2^k}, což dořešilo indukcí.

(Rado Švarc)

Do nekonečna a ještě dál I

1. seriálová série | Vzorové řešení

Úloha 1. (33; 23; 3,39; 5,0)

Na nějakém celém čísle na číselné ose sedí neviditelná blecha. V každém skoku skočí o pevně dané nenulové přirozené číslo n doleva nebo doprava (při každém skoku si může znovu vybrat směr). Mirek se snaží blechu chytit tak, že po každém skoku blechy položí na některé celé číslo past. Blechu chytí, pokud položí past na blechu nebo blecha ve svém skoku skočí do již dříve položené pasti. Ukažte, že Mirek může pasti pokládat tak, aby blechu po konečně mnoha skocích zaručeně chytil, i když nezná počáteční pozici blechy, konstantu n ani směry, kterými blecha skáče. *(Mirek Olšák)*

Řešení:

Nejprve dokážeme, že možných dvojic (m, n), kde m je počáteční pozice a n délka skoku, je spočetně mnoho. Možných výchozích pozic je stejně jako celých čísel, a těch je stejně jako přirozených. Délka skoku je přirozené číslo, takže dvojic, které nás zajímají, je stejně jako dvojic přirozených čísel. A těch je stejně jako přirozených čísel.[7]

To ale znamená, že tyto dvojice je možné očíslovat přirozenými čísly a jednu po druhé projít. V nějakém kroku budeme například předpokládat, že parametry blechy mají konkrétní hodnoty (m_k, n_k). Než jsme se dostali k tomuto předpokladu, uplynulo již i tahů (rozdělených do $k-1$ skupin, během nichž jsme postupně lovili blechy s parametry (m_1, n_1) až (m_{k-1}, n_{k-1})). Pak můžeme postupovat následovně: Položíme past na číslo $m_k + n_k \cdot i$ (pokud tam již není) a pak na $m_k - n_k \cdot (i+1)$. Tím je blecha uvězněna na konečném úseku přímky. Následně v libovolném pořadí projdeme všechny pozice, které uvězněné bleše zbyly – tedy čísla tvaru $m_k + l n_k$ pro $l \in \mathbb{Z} \cap \langle -i, i-1 \rangle$.

Takto jsme prošli postupně všechny možnosti, kde blecha mohla začínat a o kolik mohla skákat. Vyřešení každé z nich nám zabralo konečně mnoho tahů, takže jsme ji bez ohledu na počáteční polohu a délku skoku po konečném počtu tahů chytili.

Alternativní řešení:

Tahy si rozdělíme do trojic. V prvním tahu k-té trojice položíme past na pole $k! + k$, v druhém na pole $-(k! + k)$ a ve třetím na pole (případně jedno z polí), na kterém ještě není past a které je z takových polí nejblíže nule.

Protože faktoriál roste rychleji než libovolná lineární funkce, dosáhneme za určitou dobu toho, že políčka, která budeme zabírat v prvních a druhých tazích, budou od nuly dále než blecha. Všimněme si, že se blecha pohybuje pouze po číslech, která dávají po dělení n zbytek m. Kdyby tedy $k! + k$ nejen bylo dost velké, ale zároveň dávalo po dělení n zbytek m, podařilo by se nám v k-tém tahu uvěznit blechu na konečném úseku přímky.

Pro $k \geq n$ platí $n \mid k!$. To ale znamená, že $k! + k$ se modulo n mění při každém zvýšení k o jedna. Proto projde během každých n po sobě jdoucích tahů každou možnou zbytkovou třídu modulo n. Tím tedy bude blecha uvězěna v nějakém konečném intervalu. Pomocí třetího kroku naší trojice celý tento interval časem vyplníme pastmi, a tak blechu chytíme.

[7] Toto tvrzení je dokázáno v textu seriálu.

Alternativní řešení 2:
Zvolíme si funkci $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která roste rychleji než lineárně (například x^2 nebo x^x), a budeme postupovat následovně: Pokaždé, když budou pasti právě na všech číslech mezi nejpravější a nejlevější pastí, zvolíme si $k = f(i)$, kde i je počet již položených pastí. Následně budeme pokládat pasti popořadě na k, $-k$, $k-1$, $-k+1$ a tak dále, dokud opět nebudou pasti na všech číslech mezi k a $-k$.

Budiž nyní opět m počáteční poloha blechy a n délka skoku. Maximální vzdálenost blechy od nuly po jejím l-tém skoku můžeme vyjádřit jako $\left||m|+l\cdot n\right|$. V některém z tahů, ve kterém položíme popořadě i-tou past na $f(i)$-té pole, bude splněna nerovnost

$$\left||m| + in + 2n^2\right| < f(i) - n.$$

Bude platit díky tomu, že levá strana roste lineárně (jediná proměnná je i, zbytek jsou konstanty), kdežto pravá strana roste rychleji. Nyní se podíváme, co tato nerovnost vyjadřuje.

Výraz $\left||m| + in + 2n^2\right|$ je maximální vzdálenost blechy od nuly po $i+2n$ skocích, kdežto $f(i)-n$ vyjadřuje vzdálenost od nuly, v jaké se nám podařilo (v $(i+2n)$-tém kroku) položit na n po sobě jdoucích čísel pasti (a to stejný počet symetricky jak na kladné, tak na záporné části osy). Podařilo se nám tedy vytvořit bariéru, kterou blecha neumí přeskočit, a rozhodně se k ní nedostala dříve, než jsme ji dostavěli. Nyní je tedy blecha lapena mezi dvěma barikádami, a následným zaplněním prostoru mezi nimi ji nutně chytíme.

Poznámky:
Téměř každé řešení, které dorazilo, bylo originál, ať už volbou funkce f u řešitelů postupujících podle poslední verze řešení, nebo popisem seřazení dvojic počáteční polohy blechy a délky jejího skoku při řešení prvního typu.

Určitě se hodí poznamenat, že první řešení má oproti zbývajícím dvěma jednu výhodu: dalo by se úplně stejně aplikovat i v případě, že by blecha skákala například po racionálních číslech o racionální hodnotu, či v jakémkoli jiném případě, kdy je možno všechny možné počáteční konfigurace zapsat pomocí nějaké n-tice přirozených čísel a zároveň platí, že umíme blechu v konečném počtu kroků chytit, známe-li tento počáteční stav a počet kroků, který od začátku hry uběhl.

Pozitivně mě překvapilo, že většina řešitelů vyřešila úlohu správně nebo skoro správně, a i většina špatných řešení obsahovala alespoň správnou myšlenku. Jestliže někde byla chyba, tak zpravidla v tom, že některá tvrzení nebyla dokázána, nebo v tom, že řešiteli uniklo, že mu z jeho konstrukce může umět blecha pro nějaká m, n vždy utéct. *(Viki Němeček)*

Úloha 2.

(32; 19; 2,97; 3,0)

Nechť X je množina všech bijekcí $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ukažte $|X| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)|$, kde symbol $\mathbb{R}^+$ značí množinu všech kladných reálných čísel. *(Mirek Olšák)*

Řešení:
Abychom dokázali, že $|X| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)|$, stačí najít prosté zobrazení g z $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ do X. Podmnožině kladných reálných čísel M přiřadíme následující reálnou funkci f:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{pokud } x \in M \\ x, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tímto způsobem jsme definovali zobrazení g, můžeme tedy psát $g(M) = f$.

Je funkce f bijekcí? Pokud mají dvě čísla $a \neq b$ různé absolutní hodnoty, zobrazí se na různá čísla. Pokud je mají stejné, jedná se o opačná čísla, a ta se zobrazí na vzájemně opačné hodnoty – buď se prohodí, nebo obě zůstanou na místě. Proto je f prostá. Dále je funkce f také na, neboť pro reálné číslo a se $-a$ zobrazí na a, pokud $|a| \in M$, a jinak se a zobrazí na samo na sebe. Z toho, že f je prostá a na, plyne, že je skutečně bijekcí.

Víme tedy, že g zobrazuje z $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ do X. Nyní stačí ukázat, že g je prosté. Nechť N je podmnožina kladných reálných čísel různá od M. Určitě existuje takové kladné reálné x, že x leží v právě jedné z množin M, N. Pak se hodnota $f(x)$ pro tyto dvě podmnožiny liší, neboť v jednom případě dostaneme x a v druhém $-x$.

Poznámky:
Potěšilo mě, že se navzdory obtížnosti a abstraktnímu tématu seriálu sešlo mnoho správných řešení. Řešitelům, kteří postupovali jako ve vzorovém řešení, jsem udělil $+i$. Častou chybou byla konstrukce funkce z $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ do X, která využívala očíslování podmnožiny M přirozenými čísly. Podmnožina M může být i nespočetná, a proto takové očíslování nemusí existovat. *(Anh Dung „Tonda" Le)*

Úloha 3.

(12; 3; 1,25; 0,0)

Najděte takové dvě nekonečné DUMy A, B, aby platilo $A \cdot B \simeq B$. Zdůvodněte, proč se jedná o DUMy, a popište příslušnou rostoucí bijekci. *(Mirek Olšák)*

Řešení:
Uvažme množinu všech konečných posloupností přirozených čísel, do které ještě přidáme prázdnou posloupnost $\emptyset$. Tuto množinu uspořádáme primárně podle délky a sekundárně standardně lexikograficky odzadu. Máme tedy

$$\emptyset < (0) < (1) < (2) < \cdots < (0,0) < (1,0) < (2,0) < \cdots < (42,42,42) < (43,42,42) < \cdots .$$

Toto uspořádání je dobré, protože je lineární a každá podmnožina má nejmenší prvek – nejprve z podmnožiny vezmeme nejkratší posloupnosti a mezi nimi pak najdeme tu nejmenší v lexikografickém uspořádání. Popsaná množina posloupností je tedy DUM, označme ji jako X. Nyní definujme zobrazení $f\colon \omega \cdot X \to X$ jako

(1) $f\big((0,\emptyset)\big) = \emptyset$,
(2) $f\big((n,\emptyset)\big) = (n-1)$ pro $n > 0$,
(3) $f\big(n,(x_1,x_2,\dots,x_k)\big) = (n,x_1,\dots,x_k)$ pro $k \geq 1$.

Tato funkce je definovaná pro každou dvojici (n,x), kde $n \in \omega$ a $x \in X$, a je zřejmě prostá a na – body (1) a (2) pokryjí nejvýše jednoprvkové posloupnosti a bod (3) zbytek. Funkce f je tedy bijekce. Je rostoucí? Pokud $(m,x) < (n,y)$ pro $(m,x),(n,y) \in \omega\cdot X$, znamená to, že nastává některá z těchto možností:

(i) $x = y = \emptyset$. Pak musí být $m < n$, a tedy i $f\big((m,x)\big) < f\big((n,y)\big)$ vzhledem k bodům (1) a (2).
(ii) $\emptyset = x < y$. $f\big((m,x)\big)$ je nejvýše jednoprvková, zatímco $f\big((n,y)\big)$ je alespoň dvouprvková.
(iii) $\emptyset < x < y$. Posloupnost $f\big((m,x)\big)$ bez prvního členu je x a posloupnost $f\big((n,y)\big)$ bez prvního členu je y; protože $x < y$ a uspořádání uvažujeme „odzadu", dostáváme tak $f\big((m,x)\big) < f\big((n,y)\big)$.
(iv) $\emptyset < x = y$. Zde musí být $m < n$. Vztah $f\big((m,x)\big) < f\big((n,y)\big)$ plyne z porovnání prvních prvků těchto posloupností.

Našli jsme rostoucí bijekci a dokázali tak $\omega\cdot X \simeq X$, takže DUMy $A = \omega$ a $B = X$ vyhovují zadání.

Poznámky:
Jak se na řešení dalo přijít? To se v první části těchto poněkud delších poznámek pokusím popsat. Součin $A \cdot B$ si můžeme představit tak, že postupně procházíme[8] prvky B (rostoucím způsobem

[8]Můžete namítnout, že jiné nekonečné DUMy než ω takto celé projít neumíme, a budete mít pravdu. Nicméně je tento pohled stále užitečný, takže si pojďme pojďme představit „procházení" libovolně dlouhých DUM. Koneckonců přesně to umí transfinitní indukce a rekurze.

vzhledem k jejímu uspořádání), ale místo každého prvku projdeme kopii DUMy A, opět vzestupně vzhledem k uspořádání A. DUMa A musí být nekonečná, ale zároveň tím, že budeme v B brát místo každého prvku kopii A, chceme dostat stejný typ. Dává tedy smysl volit A co nejmenší, tedy jako ω. Za B chceme naopak zvolit co největší DUMu, aby ji násobení moc nezměnilo. V seriálu je uvedeno, že $2 \cdot \omega \simeq \omega$, obdobně to platí i pro $n \cdot \omega$. Kdyby tedy mohla být množina A konečná, je úloha vyřešena. Bohužel ale $\omega \cdot \omega \not\simeq \omega$ a podobně ani $\omega \cdot (\omega \cdot n) \not\simeq \omega \cdot n$. Pro nekonečné A je tedy potřeba volit větší B. Podívejme se, jaké větší DUMy známe. Co takhle zkusit $\omega \cdot \omega$? Podle definice násobení je to množina všech dvojic přirozených čísel s porovnáváním primárně podle druhé složky. A co $\omega \cdot (\omega \cdot \omega)$? Bude to vlastně to samé jako $(\omega \cdot \omega) \cdot \omega$? Opět použitím pouhé definice násobení si snadno rozmyslíme, že obojí odpovídá trojprvkovým posloupnostem přirozených čísel s lexikografickým uspořádáním – v prvním případě přidáváme k dvojicím číslo na tu nejméně důležitou – první – pozici a ve druhém před číslo přidáváme méně důležitou dvojici. Ze stejného důvodu dává smysl definovat pro $n > 1$ DUMu $\omega^n = \omega \cdot \omega^{n-1} = \omega^{n-1} \cdot \omega$ jako lexikograficky uspořádané posloupnosti n přirozených čísel. Žádnou takovou DUMu nemůžeme použít jako B (pro $A = \omega$), protože vynásobení ω zvýší exponent o jedničku.

Mohli bychom použít množinu nekonečných posloupností? Tu by podle výše použitých úvah přenásobení ω určitě nezměnilo, ale máme jiný problém – nekonečné posloupnosti s lexikografickým uspořádáním netvoří ani spočetnou, ani dobře uspořádanou množinu! Pro nespočetnost viz seriál a nekonečnou klesající posloupnost pro vyvrácení dobrého uspořádání jistě zvládnete najít sami. Abychom se existenci této posloupnosti vyhnuli, nezbývá už než zkusit konstrukci popsanou výše. :-)

Úloha byla obtížná a obdrželi jsme pouze tři správná řešení, všechna myšlenkově shodná se vzorovým. Nejčastějším chybou těch ostatních byla volba $A = B = \omega$ s bijekcí $\omega \cdot \omega \to \omega$ popsanou v kapitole seriálu věnované Hilbertovu hotelu. Tato bijekce je dobrým zdůvodněním toho, že jsou obě příslušné množiny stejně velké, ale není rostoucí vzhledem k uspořádání DUMy $\omega \cdot \omega$. Dá se sice říct, že bijekce $\omega \to M$ čísluje prvky množiny M, takže je „rostoucí“, to jsme ale na M přenesli uspořádání z ω, takže o jejím vlastním uspořádání (pokud to byla DUM) z toho nic usoudit nemůžeme. DUM X ze vzorového řešení se obvykle nazývá ω^ω a jistou představu o ní lze získat studiem zajímavého obrázku[9]. *(David Hruška)*

[9] *https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e6/Omega-exp-omega-labeled.svg*

Do nekonečna a ještě dál

Na počátku bylo slovo, a to slovo bylo od Matematika, a to slovo bylo „množina“.

Díl druhý – pevné základy

V tomto díle si ukážeme, jak se matematika asi před sto dvaceti lety rozbila, a především to, jak ji následně opravili. Nenavážeme tedy na první díl hned, ale až zhruba v polovině seriálu.

Možná totiž v prvním díle nebylo jasné, proč při snaze sestrojit obrovské množiny používáme tak rafinované konstrukce namísto toho, abychom prostě úplně všechny množiny naházeli do jednoho pytle. To už bude určitě největší množina. Nic většího nevyrobíme. Jenže v tom je právě ta potíž, vždyť jsme si ukázali, že vždycky můžeme sestrojit větší množinu pomocí potence. Jak to? Když si vzpomeneme na důvod, proč je potence větší než původní množina, dostáváme Russelův paradox:

Russel: „Existuje množina všech množin?“

Intuice: „Ovšem že ano. Proč by měla neexistovat?“

Russel: „A obsahuje tato množina sama sebe?“

Intuice: „Jasně, obsahuje přece všechny množiny.“

Russel: „A existuje množina všech množin, které neobsahují samy sebe?“

Intuice: „Jasně, stačí z množiny všech množin vyhodit ty prvky, které samy sebe obsahují.“

Russel: „A obsahuje tato množina sama sebe?“

Intuice: „Jejda.“

Problém spočívá v tom, že z definice množiny všech množin neobsahujících samu sebe vyplývá, že tato množina se obsahuje právě tehdy, když se neobsahuje. Obě varianty vedou ke sporu.

Matematika ale nesmí vést sama o sobě ke sporu. Když jsme dostali spor, znamená to, že jsme ji špatně vybudovali. Po objevu Russelova paradoxu matematici bádali nad tím, jak zařídit, aby fungovala veškerá dosud vybudovaná matematika, ale již nikoli Russelův paradox.

S řešením přišli pánové Zermelo a Fraenkel. Sestavili pro matematiku sadu axiomů – to jsou tvrzení, která se bez důkazu považují za pravdivá, jedná se tedy o základní kameny matematiky. Podle těchto axiomů není množinou jen tak ledaco, axiomy dávají pro tvorbu množin striktní pravidla. Nemůžeme si tedy jen tak vzít množinu všech množin. Naopak Russelův paradox sporem dokazuje, že žádná množina všech množin ve skutečnosti neexistuje.

Jazyk teorie množin

Napřed si představíme formální jazyk, ve kterém jsou axiomy psané. Jedná se o jazyk hovořící o množinách, žádné jiné matematické objekty v něm zastoupeny nejsou. Možná si říkáš: „No moment, a co prvky těch množin? O těch se mluvit nedá? Co přirozená čísla? Co body v rovině? Co posloupnosti? Co funkce?“ Inu, vše tohle budou zase množiny.[10] Časem si definujeme, která

[10] Se situací, kdy prvky množiny byly opět množiny, ses v minulém díle setkal(a) například u potence $\mathcal{P}(X)$ – prvky potence jsou podmnožiny X, tedy množiny.

množina je přirozeným číslem, která bodem v rovině, a tak podobně. V základním jazyku teorie množin si však vystačíme s následujícími symboly.

(i) Závorky a klasické logické spojky[11]: $\neg$ (není pravda, že), $\wedge$ (a zároveň), $\vee$ (nebo), $\Rightarrow$ (implikuje), $\Leftrightarrow$ (právě tehdy, když).
(ii) Proměnné – písmenka, která zastupují nějakou množinu.
(iii) Kvantifikátory: Symbol $(\forall x)$ (pro všechna x) znamená, že následující výrok platí, ať za x dosadíme kteroukoli množinu, a symbol $(\exists x)$ (existuje x) znamená, že je možné v následujícím výroku dosadit za x nějakou množinu tak, aby byl splněn.
(iv) Rovnítko $x = y$ značí, že x a y jsou tytéž množiny.
(v) Náležítko $x \in y$ značí, že množina x je prvkem množiny y. **Pozor!** Prvek množiny a podmnožina množiny jsou zásadně odlišné pojmy. Prvky množiny často nebývají jejími podmnožinami. Je rozdíl mezi množinou x a jednoprvkovou množinou obsahující x jako prvek.

Z koncepce tohoto jazyka je patrné, proč se o množinách říká, že „Prvky množiny jsou neuspořádané a nemohou se opakovat". Samotný jazyk totiž neumožňuje zjistit, v jakém pořadí prvky v množině jsou a kolikrát. Jediné, na co se lze ptát, je, zda $x \in y$, či nikoli.

Pomocí těchto symbolů pak lze skládat takzvané *formule* – to je něco jako výroky. Formule jsou takové nápisy, které jdou smysluplně přečíst. Formulí je třeba $(x = y) \wedge (\exists z)(z \in x)$, což se přečte jako „$x$ je stejná množina jako y a zároveň existuje z, které je prvkem množiny x." Zato například $\exists\neg) =\in x$ formulí není, protože je to zkrátka blbost. Exaktně můžeme formuli definovat jako to, co vznikne opakovaným použitím následujících pravidel:

(i) Formulemi jsou $x \in y$ a $x = y$ (případně s jinými proměnnými).
(ii) Nechť φ je formule.[12] Pak přidáním kvantifikace na začátek vznikne opět formule. Tedy $(\forall x)(\varphi)$ a $(\exists x)(\varphi)$ jsou formule.
(iii) Aplikováním logických spojek na formule opět vzniknou formule. Tedy z formulí φ, ψ vzniknou například formule $\neg(\varphi)$ nebo $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$.

Pokud nedojde k nejednoznačnosti, lze závorky v zápisu vynechat. Ke kvantifikátoru v takovém případě náleží jen to, co po něm bezprostředně následuje: $(\exists x)(\varphi) \wedge (\psi)$ znamená $\big((\exists x)(\varphi)\big) \wedge (\psi)$.

Příklad. Ukážeme konstrukci formule $(x = y) \Rightarrow (\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z)$. Z bodu (i) jsou formulemi formální nápisy $x = y$, $x \in z$ a $y \in z$. Aplikováním bodu (iii) získáme formuli $x \in z \Leftrightarrow y \in z$. Dále z bodu (ii) je formulí $(\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z)$ a nakonec opět z bodu (iii) dostaneme formuli

$$x = y \Rightarrow (\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z).$$

Ještě přeložme tuto formuli do češtiny: „Pokud jsou x a y stejné objekty $(x = y)$, tak pro libovolnou množinu z platí, že x je prvkem množiny z právě tehdy, když y je prvkem množiny z." Říká tedy jen to, že když jsou x, y stejné prvky, tak leží ve stejných množinách. To platí v každém případě, čili tato formule platí obecně, pro libovolnou volbu[13] x, y. Zato formule, které jsme vytvořili cestou (například $x \in z$) nejsou obecně pravdivé.

Příklad. Chceme napsat formuli „Množina x je jednoprvková." Formule se může opírat pouze o to, které prvky leží v této množině, tedy „Existuje jeden prvek y množiny x takový, že každý prvek z množiny x musí být roven onomu jednomu prvku y." To lze říci ještě formálněji: „Existuje y takové, že y je prvkem x a zároveň pro každé z platí, že pokud je z prvkem x, tak je z rovno y." Toto již lze přímočaře přepsat do řeči symbolů:

$$(\exists y)(y \in x \wedge (\forall z)(z \in x \Rightarrow z = y)).$$

[11] Logické spojky jsou popsány například na `http://www.matematika.cz/vyroky`.

[12] Řecké písmenko φ označující nějakou formuli se čte „fí". Dále budeme pro formule používat písmenko „psí" ψ.

[13] Pokud zvolíme x, y různé, tak vyjde formule pravdivá z toho důvodu, že není splněn předpoklad implikace.

O něco stručnější způsob zápisu by mohl být: „Existuje objekt y takový, že pro každý objekt z je z prvkem x právě tehdy, když je z roven y." Formule vypadá takto:

$$(\exists y)\big((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z = y\big).$$

Cvičení 1. Napiš formuli, která říká: „Množina x' obsahuje stejné prvky jako x a ještě jeden navíc."

Abychom nemuseli všude psát samá náležitka, zavedeme ještě běžně používané zkratky.

(i) $x \notin y$ resp. $x \neq y$ znamená $\neg(x \in y)$ resp. $\neg(x = y)$.
(ii) $x \subset y$ (x je podmnožinou množiny y) znamená $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$.
(iii) Pokud za $\forall x$ okamžitě následuje požadavek na x, například $(\forall x \in y)(\ldots)$, jedná se o zkratku za to, že příslušný požadavek je předpokladem implikace, tedy $(\forall x)\big((x \in y) \Rightarrow (\ldots)\big)$.
(iv) Pokud za $\exists x$ okamžitě následuje požadavek na x, například $(\exists x \subset y)(\ldots)$, jedná se o zkratku za to, že příslušný požadavek je současně vyžadován, tedy $(\exists x)\big((x \subset y) \wedge (\ldots)\big)$.
(v) Zápis $(\forall x, y, z)$ je jen zkratka za sled kvantifikátorů $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$, obdobně pro existenční kvantifikátor.
(vi) Zápis $y = \{x : \varphi(x)\}$ (*množina daná předpisem*), kde $\varphi(x)$ je formule,[14] značí, že y je množina těch prvků x, které splňují formuli φ. Jedná se tedy o formuli $(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \varphi(x))$.

Pozastavíme se u posledního bodu. Ten dává návod, jak interpretovat $y = \{x : \varphi(x)\}$, ale již neříká, jak do základního jazyka přeložit samotnou množinu danou předpisem, tedy samotné $\{x : \varphi(x)\}$. Pokud se ve formuli vyskytne taková množina, přeložíme ji do jazyka teorie množin tak, že založíme novou proměnnou y, která se ve formuli dosud nevyskytuje. Tou nahradíme (jeden) výskyt $\{x : \varphi(x)\}$ a před vzorec s tímto výskytem připíšeme $(\exists y = \{x : \varphi(x)\})$.

Příklad. Přepíšeme do základního jazyka formuli

$$\{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x : x \in C \wedge x \in D\}.$$

Nejprve nahradíme první výskyt do tvaru

$$(\exists y = \{x : x \in A \wedge x \in B\})(y = \{x : x \in C \wedge x \in D\})$$

neboli

$$(\exists y)\big((y = \{x : x \in A \wedge x \in B\}) \wedge (y = \{x : x \in C \wedge x \in D\})\big).$$

Nyní již můžeme nahradit výrazy podle bodu (vi):

$$(\exists y)\Big((\forall x)\big(x \in y \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)\big) \wedge (\forall x)\big(x \in y \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \in D)\big)\Big).$$

Poznámka. Skutečnost, že můžeme množinu danou předpisem napsat, ještě nezaručuje její existenci a jednoznačnost. Jednoznačnost vyplyne z axiomu extensionality, existence v některých případech nebude možná vůbec (jak ukazuje Russelův paradox). Pokud si tedy například formálně rozepíšeme tvrzení $a \in \{x : x = x\}$, zjistíme, že jsme dostali nepravdivou formuli (kde nepravdivost vyplývá z neexistence množiny všech množin, která vyplyne až z axiomu vydělení).

Za často používané typy množin daných předpisem zavedeme další zkratky. V těchto případech z axiomů vyplyne dokonce existence.

(i) $\{x_0, \ldots, x_n\}$ (*množina zadaná výčtem prvků*) značí $\{z : z = x_0 \vee \cdots \vee z = x_n\}$.
(ii) $x \cap y$ (*průnik x a y*) značí množinu $\{z : z \in x \wedge z \in y\}$.
(iii) $x \setminus y$ (*množinový rozdíl x minus y*) značí množinu $\{z : z \in x \wedge z \notin y\}$.
(iv) $x \cup y$ (*sjednocení x a y*) značí množinu $\{z : z \in x \vee z \in y\}$.
(v) $\mathcal{P}(x)$ (*potence x*) značí množinu $\{y : y \subset x\}$.

[14] To, že se tato formule jmenuje $\varphi(x)$, a ne jen φ, naznačuje, že se x v této formuli nejspíše bude vyskytovat, a že tedy na x závisí její platnost.

Příklad. Formule $a \in \{c, \{d\}\}$ se do základního jazyka přepíše takto:

$$(\exists y_0)(\exists y_1)\Big(a \in y_1 \wedge (\forall z)(z \in y_0 \Leftrightarrow z = d) \wedge (\forall z)\big(z \in y_1 \Leftrightarrow (z = c \vee z = y_0)\big)\Big).$$

Pokud před dvojtečku napíšeme složitější výraz než jednu proměnnou, značíme množinu všech možných hodnot takového výrazu. Například pokud máme zafixované množiny x a y, značí $\{\{a,b\} : a \in x, b \in y\}$ množinu $\{c : (\exists a \in x)(\exists b \in y)(c = \{a,b\})\}$.

Nyní již se takřka můžeme pustit do axiomů, tedy formulí, jejichž platnost se v teorii množin automaticky předpokládá. Poslední věc, kterou je třeba o těchto axiomech pochopit, je, že se nejedná o axiomy logiky. K logice budeme přistupovat intuitivně – například chápeme, že když $x = y$, tak můžeme ve formuli nahradit x za y a nezmění se tím její platnost. Nebo že když platí $\varphi \vee \psi$ a neplatí φ, tak platí ψ. Popsat a vysvětlit axiomy logiky a formální dedukci by bylo na mnohem delší povídání. Axiomy teorie množin jsou od toho, aby jasně definovaly, jak se chová náležítko, a tedy, co přesně můžeme dělat s množinami.

Axiomy

Za každým axiomem je vysvětleno, co říká a k čemu slouží. Ale v principu by tento doprovodný text nemusel být třeba. Jestli si chceš popřemýšlet, zkus nejprve pokaždé pochopit axiom bez něj.
(0) Axiom existence:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x).$$

Česky řečeno: Existuje množina x taková, že pro žádnou[15] množinu y není y prvkem množiny x. Jinými slovy x nemá žádný prvek. Tuto množinu x budeme nazývat *prázdná* množina a budeme ji značit $\emptyset$.
(1) Axiom extensionality:

$$(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow (x = y).$$

Tento axiom říká, že množina není dána ničím jiným než svými prvky. Tedy například prázdná množina, průnik, sjednocení, potence, množina zadaná výčtem prvků či obecná množina zadaná předpisem je (pokud existuje) dána jednoznačně. Opačná implikace – že stejné množiny obsahují stejné prvky – také platí. Ta vyplývá přímo z axiomů logiky, považujeme ji tedy za ještě samozřejmější než axiomy teorie množin.
(2) Axiom dvojice:

$$(\forall x, y)(\exists d)(d = \{x, y\})$$

neboli pro každé dvě zadané množiny existuje množina, která obsahuje právě je. Tento axiom mimo jiné zaručuje i existenci jednoprvkových množin $\{x\}$, protože $\{x\} = \{x, x\}$.

Cvičení 2. Dokaž „opak extensionality“: $(\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z) \Rightarrow (x = y)$.

(3) Schéma axiomů vydělení: To, že se jedná o schéma, znamená, že za jistý kus axiomu je možné dosadit skoro jakoukoli formuli a dá se říci, že takto vlastně vyrobíme nekonečně mnoho axiomů. V tomto případě je možné za $\varphi(z)$ dosadit formuli, která v sobě neobsahuje y. Pak je axiomem

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))\big).$$

Jinými slovy toto schéma zaručuje existenci množiny y dané předpisem $\{z : z \in x \wedge \varphi(z)\}$. Jedná se o vydělení těch prvků z množiny x, které splňují formuli $\varphi(x)$, výslednou množinu budeme značit i $\{z \in x : \varphi(z)\}$. Použitím axiomu vznikne vždy podmnožina nějaké existující množiny, takže ke konstrukci množiny všech množin tento axiom použít nelze.

[15] V češtině má slovo „žádná“ takřka stejný význam jako slovo „každá“. Sloveso rozhoduje, které z těchto dvou slov se má použít. Divně se zde chová čeština, nikoli formální jazyk.

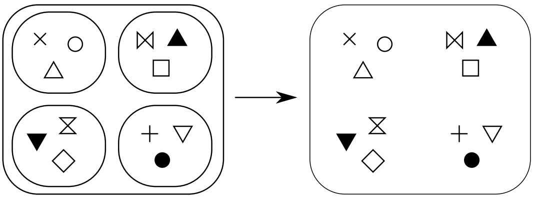
Příklad. Axiom vydělení je možné použít i ke konstrukci průniku $a \cap b$. Za formuli $\varphi(z)$ zvolíme $z \in b$. Dále za x dosadíme a a použijeme axiom. Dostáváme y splňující $(\forall z)\big(z \in y \Leftrightarrow (z \in a \wedge z \in b)\big)$. Tedy $y = a \cap b$.

Cvičení 3. Odvoď pomocí axiomu vydělení existenci množiny $a \setminus b$.

(4) Axiom sjednocení:

$$(\forall x)(\exists s)(\forall z)\big(z \in s \Leftrightarrow (\exists y \in x)(z \in y)\big).$$

Tento axiom říká, že kdykoli máme množinu x, můžeme sjednotit všechny množiny, které v x leží. Toto sjednocení s značíme $\bigcup x$. Použití axiomu dvojice a následně axiomu sjednocení zaručuje existenci sjednocení dvou množin $x \cup y$.



x $\qquad\qquad$ $\bigcup x$

Navíc můžeme pokračovat a sestavit pomocí tohoto axiomu libovolně velkou konečnou množinu danou výčtem $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Existují totiž jednoprvkové množiny $\{x_0\}, \{x_1\}, \ldots, \{x_{n-1}\}$ a postupným aplikováním sjednocení dvou množin z nich dostáváme $\{x_0, x_1\}, \{x_0, x_1, x_2\}, \ldots$, až nakonec získáme $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

(5) Axiom potence:

$$(\forall x)(\exists y)(y = \mathcal{P}(x)).$$

Cvičení 4. Přepiš axiom potence (tedy tvrzení „existuje potence x“) jen pomocí základního jazyka teorie množin.

(6) Schéma axiomů nahrazení: Mějme formuli $\psi(x, y)$, která v sobě neobsahuje b, y_0 ani y_1. Symbolem $\psi(x, y_0)$ resp. $\psi(x, y_1)$ značíme úpravu formule $\psi(x, y)$, ve které nahradíme proměnnou y za proměnnou y_0 resp. y_1. Pak je axiomem

$$(\forall x, y_0, y_1)\big((\psi(x, y_0) \wedge \psi(x, y_1)) \Rightarrow (y_0 = y_1)\big) \Rightarrow (\forall a)(\exists b)(\forall y)\big(y \in b \Leftrightarrow (\exists x \in a)(\psi(x, y))\big).$$

I když je tohle schéma na první pohled opravdu nestravitelné, překvapivě to s ním není až tak hrozné. Nechť f je zobrazení, které množině x přiřadí množinu y, aby platilo $\psi(x, y)$. Celá první závorka je jen podmínka požadující, aby f bylo jednoznačně určené zobrazení, tedy aby bylo k jednomu x přiřazeno jen jedno y. Axiom pak říká, že obrazy prvků množiny a (přesněji té její části, která leží v definičním oboru) v zobrazení f opět tvoří množinu.

Pokud budeme chápat zápis $f(x) = y$ jako formální $\psi(x, y)$ můžeme axiom přepsat do tvaru

$$(\forall x, y_0, y_1)\big(((f(x) = y_0) \wedge (f(x) = y_1)) \Rightarrow (y_0 = y_1)\big) \Rightarrow (\forall a)(\exists b)(b = \{f(x) : x \in a\}).$$

(7) Axiom fundovanosti (nebo též regularity):

$$(\forall x \neq \emptyset)(\exists y \in x)(\forall z \in y)(z \notin x).$$

Tento axiom požaduje, aby každá neprázdná množina obsahovala prvek, který je s ní disjunktní[16]. Není to intuitivní požadavek a my nebudeme tento axiom příliš potřebovat. Smyslem tohoto axiomu je vyloučit existenci divných množin.

[16] Slovo disjunktní znamená neprotínající se, tedy že dané množiny mají prázdný průnik.

Cvičení 5.

(i) Ukaž, že nemůže existovat množina a splňující $a \in a$.
(ii) Ukaž, že nemohou existovat množiny a, b takové, že $(a \in b) \wedge (b \in a)$.

(8) Axiom nekonečna:

$$(\exists m)\big(\emptyset \in m \wedge (\forall x \in m)(x \cup \{x\} \in m)\big).$$

Tento axiom zaručuje existenci nekonečné množiny m jistou konkrétní konstrukcí, ačkoli jednoznačně množina m určená není. Podstata tohoto axiomu spočívá v sestrojení alespoň nějaké uchopitelné nekonečné množiny. Se vzniklou množinou se setkáme při konstrukci množiny všech přirozených čísel.

Cvičení 6. Přepiš axiom nekonečna jen pomocí základního jazyka teorie množin.

(9) Axiom výběru:

$$(\forall a)\big((\forall x \in a, y \in a)(x \neq y \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow (\exists b)(\forall x \in a)(\exists y)(x \cap b = \{y\})\big).$$

Tento axiom říká, že pokud máme množinu a neprázdných disjunktních množin, tak je možné z každé množiny vybrat po jednom prvku a sestavit z těchto prvků množinu b. Intuitivně tento axiom říká, že je možné provést nekonečně mnoho nahodilých výběrů najednou. Podrobněji se mu budeme věnovat v příštím díle.

Tato (obvykle používaná) sada axiomů trochu překvapivě není minimální – tři axiomy by bylo možné vyškrtnout, aniž bychom o jejich platnost přišli, jak ukazuje následující cvičení.

Cvičení 7.

(i) Uvědom si, že platnost axiomu existence plyne z axiomu nekonečna.
(ii) Odvoď schéma axiomů vydělení ze schématu axiomů nahrazení.
(iii) Odvoď axiom dvojice z axiomů existence, potence a nahrazení.

To, že se uvádějí i nadbytečné axiomy, je dáno historickými a pedagogickými důvody – přeci jen je snazší pochopit axiom dvojice než axiom nahrazení. Dalším důvodem je, že se občas uvažují jiné teorie množin bez axiomu potence či bez axiomu nahrazení, ale těmito verzemi se zabývat nebudeme.

Dvojice a kartézský součin

Nyní si ukážeme, jak pomocí množin vytvořit některé známé struktury, které se od běžných množin liší.

Neuspořádaná dvojice obsahující prvky a a b je množina $\{a, b\}$. Obecně se tedy jedná o dvouprvkovou nebo jednoprvkovou množinu.

Uspořádaná dvojice (a, b) je množina $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

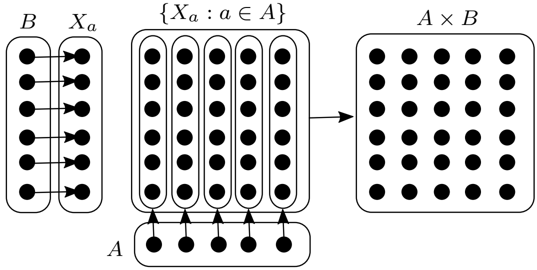
Cvičení 8. Ukaž, že uspořádaná dvojice $(\emptyset, \{\emptyset\})$ je prvkem $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

Následující cvičení říká, že uspořádané dvojice se chovají tak, jak bychom chtěli, tedy že jednoznačně určují svůj první i druhý prvek.

Cvičení 9. Ověř, že pokud $(a_0, b_0) = (a_1, b_1)$, tak už nutně $a_0 = a_1$ a $b_0 = b_1$.

Kartézský součin $A \times B$ je množina obsahující všechny uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$, lze jej tedy zapsat jako $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Příklad. Ukážeme z axiomů, že pro libovolné dvě množiny A, B existuje kartézský součin $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Pro každé a, b plyne existence dvojice (a, b) z trojnásobného použití axiomu dvojice.[17] Dále zafixujeme a a definujeme formuli $\psi(x,y)$ jako $y = (a,x)$. Díky axiomu nahrazení existuje množina obrazů všech $b \in B$ v tomto zobrazení, tedy množina $X_a = \{(a,b) : b \in B\}$. Tím už jsme skoro hotovi, stačí sjednotit množiny X_a pro $a \in A$. Množina X_a existuje, ať zvolíme kterékoli a. Uvažme jinou formuli $\psi(x,y)$, a to $y = \{(x,b) : b \in B\}$ (neboli $y = X_x$). Použitím axiomu nahrazení na množinu A dostáváme množinu $\{X_a : a \in A\}$. Aplikováním axiomu sjednocení na tuto množinu dostáváme $A \times B$.



Cvičení 10. Dokaž existenci kartézského součinu bez použití axiomu nahrazení.

Třídy a dvojí pohled na zobrazení

V prvním díle jsme definovali zobrazení (neboli funkci) jako předpis, jak přeměnit jeden typ objektů na jiný. Toto lze formálně přepsat pomocí formule jako v axiomu nahrazení: Uvažme formuli $\psi(x,y)$, která neobsahuje proměnné y_0, y_1, a navíc pro ni platí

$$(\forall x, y_0, y_1)\big((\psi(x,y_0) \wedge \psi(x,y_1)) \Rightarrow (y_0 = y_1)\big).$$

Pak taková formule určuje *třídovou funkci* f_ψ, kde zápisem $f_\psi(x)$ rozumíme ten jediný prvek y, který splňuje $\psi(x,y)$ (existuje-li). Takto popsaná funkce je formulí, nikoli množinou. Další formule ale mohou mluvit jen o množinách. Nelze tedy například napsat formuli, která by znamenala „existuje zobrazení“, což je například pro porovnávání mohutností množin celkem podstatný problém. Proto definujeme funkci coby množinu.

Množinovou funkcí $f\colon A \to B$, kde A, B jsou množiny, myslíme nějakou podmnožinu součinu $f \subset A \times B$, takovou, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ splňující $(a,b) \in f$. I zde píšeme $f(a) = b$.

Jakmile máme takovou množinu f, můžeme pomocí ní napsat odpovídající formuli $\psi(x,y)$ coby $(x,y) \in f$. Takto jsme převedli množinové zobrazení f na *třídové* zobrazení f_ψ, problém je, že obráceně to nemusí být možné provést. Pro lepší uchopení si objasníme pojem třídy.

Vraťme se k Russelovu paradoxu. Ten vzešel z toho, že jsme s množinami začali zacházet způsobem, na který původně nebyly stavěny. Pokud bychom zůstali u množin coby „souhrnného označení pro nějaký typ bodů v rovině, časových okamžiků, lidí na Zeměkouli, …“, tak bychom Russelův paradox nedostali. Problém nastal, když jsme množiny opět prohlásili za matematické objekty a začali strkat množiny do množin. V takovém okamžiku se ukázalo, že za množinu nemůžeme prohlásit jen tak něco, nýbrž jen to, co sestrojíme pomocí axiomů. Občas se ale hodí používat opět množiny v jejich původním významu, tedy jen coby souhrnné označení pro nějaký typ objektů. Jenže slovo množina je již zabrané. Proto budeme souhrnnému označení pro nějaký typ množin říkat *třída*.

Formálně je *třída* T vždy reprezentovaná nějakou formulí $\varphi(x)$. Za prvky třídy T pak prohlásíme přesně ty množiny x, pro které $\varphi(x)$ platí.

[17] Jedno použití vytvoří množinu $\{a\}$, druhé množinu $\{a,b\}$ a poslední žádanou množinu.

Příklad.

(i) Třída všech množin je reprezentovaná formulí $x = x$. Z Russelova paradoxu plyne, že tato třída neodpovídá žádné množině. Třídy, které neodpovídají žádné množině, budeme nazývat *vlastní*.

(ii) Pro libovolnou množinu A můžeme popsat třídu se stejnými prvky formulí $x \in A$. Každá množina je tedy i třídou. Axiom vydělení navíc říká, že kdykoli jsou všechny prvky třídy T obsaženy v jedné množině, je tato třída opět množinou. Proto si lze třídy představovat jako „příliš velké na to, aby byly množinami".

(iii) Třída všech jednoprvkových množin je reprezentovaná formulí $(\exists y)(x = \{y\})$.

Cvičení 11. Dokaž, že třída všech jednoprvkových množin je vlastní.

V některých případech se třídy chovají oproti množinám benevolentněji, v některých stejně, v jiných zas striktněji. Stejně jako v množinách můžeme pro libovolné dvě třídy T, U reprezentované formulemi φ, ψ napsat

(i) $T \cup U$ (třída reprezentovaná formulí $\varphi(x) \vee \psi(x)$),

(ii) $T \cap U$ (třída reprezentovaná formulí $\varphi(x) \wedge \psi(x)$),

(iii) $T \subset U$ (neboli $(\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$).

Na rozdíl od množin ale

(i) vlastní třída nemůže být prvkem množiny ani třídy,

(ii) třídy nelze kvantifikovat (tedy ptát se, zda existuje třída či zda něco platí pro každou třídu). Ve výjimečných případech, kdy se tak děje (například ve schématech vydělení a nahrazení), se nejedná o formuli, ale pouze o „metatvrzení", těmito nuancemi se však nebudeme příliš zabývat.

Nyní je zřejmé, proč zobrazení určené formulí nazýváme třídovým. Platí ještě jedno metatvrzení dávající do souvislosti třídy a zobrazení.

Tvrzení. *Třídové zobrazení lze zapsat množinově právě tehdy, když jeho definiční obor je množina.*

Důkaz. Pokud lze zobrazení napsat množinově, je jeho definiční obor množina z definice množinového zobrazení. Naopak předpokládejme, že máme třídové zobrazení, jehož definiční obor je množina A. Z axiomu nahrazení je tak i jeho obor hodnot množina, označme ji B. Hledané množinové zobrazení dostaneme vydělením z kartézského součinu $A \times B$. $\square$

Příklad. Potence je třídová funkce, kterou nelze vyjádřit množinou, protože je definovaná na všech množinách.

Třídová a množinová zobrazení nebudeme důsledně rozlišovat, nicméně pokud to bude možné, budeme chápat zobrazení jako množinová.

Ordinální čísla – typy DUM

Podobně jako jsme zavedli funkci f coby množinu, můžeme zavést DUMu. DUM coby objekt v sobě musí mít uloženou nejenom nosnou množinu, ale i informaci o tom, jak se prvky nosné množiny porovnávají. Formálně proto definujeme DUMu jako dvojici (D, U), kde D je nosná množina a $U \subset D \times D$ je uspořádání na ní. Uspořádání U pak funguje tak, že značením $d_0 < d_1$ rozumíme $(d_0, d_1) \in U$. Aby (D, U) byla DUM, požadujeme po U vlastnosti dobrého uspořádání.

Jak se ukázalo v minulém díle, není pro DUMu důležitá ani tak její nosná množina, jako spíš jen její „typ". Prozatím si typ představujeme naivně jako „zapomenutí konkrétních prvků", ale daleko vhodnější bude jej definovat jako konkrétní množinu. To se standardně provede takto:

Definice. Mějme DUMu (D, U). Transfinitní rekurzí definujeme na D zobrazení f předpisem $f(x) = \{f(d) : d < x\}$, speciálně pro nulový prvek $d_0 \in D$ vyjde $f(d_0) = \emptyset$. Nakonec definujeme *typ* této DUMy jako $\operatorname{typ}(D, U) = \{f(d) : d \in D\}$. Množiny, které lze získat jako $\operatorname{typ}(D, U)$ nějaké DUMy (D, U), nazveme *ordinálními čísly* (stručně *ordinály*).

Příklad. Pro libovolnou trojprvkovou DUMu (D, U) na nosné množině $\{d_0, d_1, d_2\}$, kde $d_0 < d_1 < d_2$, se chová definice typu takto:

$$f(d_0) = \emptyset, \quad f(d_1) = \{\emptyset\}, \quad f(d_2) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, \quad \operatorname{typ}(D, U) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}.$$

Ještě dodejme, v jaké formě jsme použili transfinitní rekurzi. Rekurzivní předpis je třídové zobrazení definované na všech množinových funkcích, jejichž definičním oborem je $D \leftarrow x$ pro nějaké $x \in D$. Výsledná funkce pak je opět množinová. Jelikož někdy neumíme předem omezit třídu všech možných částečných množinových funkcí množinou, není tvrzení o existenci funkce dané transfinitní rekurzí tvrzením popsatelným formulí, ale metatvrzením, do kterého teprve můžeme dosazovat různé rekurzivní předpisy.

Cvičení 12. Projdi důkaz existence funkce dané transfinitní rekurzí (z minulého dílu) a rozmysli si, které axiomy jsou potřeba pro tvrzení, že každá DUM má typ.

Nyní si uvědomíme, jak vypadají typy DUM. Každý z postupně přidávaných prvků $f(x) = \{f(d) : d < x\}$ obsahuje všechny prvky $f(d)$ pro $d < x$. A také naopak žádný z těchto prvků $f(d)$ prvek $f(x)$ neobsahuje – to plyne z axiomu fundovanosti.[18] Celkově dostáváme, že funkce f zobrazila nosnou množinu DUMy (D, U) na $\alpha = \operatorname{typ}(D, U)$ takovým způsobem, že

$$(d_0 < d_1) \Leftrightarrow (f(d_0) \in f(d_1)).$$

Pokud se budeme dívat na náležítko coby na znaménko uspořádání, vidíme, že f je rostoucí bijekcí mezi DUMami (D, U) a $(\alpha, \in)$, platí tedy $(D, U) \simeq (\alpha, \in)$.

Ano, používání náležítka k porovnávání zprvu vypadá jako nehorázná zhůvěřilost, k tomu přeci vůbec nebylo stavěné. Na druhou stranu je náležítko to nejjednodušší, co v jazyce teorie množin máme, a ukáže se být zcela postačujícím a dokonce praktickým. Na prvcích ordinálního čísla bude proto náležítko plnit roli menšítka $<$.

Další věc, které si můžeme všimnout rovnou z definice funkce typ, je $f(x) = \operatorname{typ}(D \leftarrow x, U)$. Prvky ordinálního čísla jsou tedy opět ordinály – typy všech menších DUM. Tato skutečnost usnadňuje jejich porovnávání. Konkrétně pro ordinály α, β platí

(i) $(\alpha, \in) \simeq (\beta, \in)$ právě tehdy, když $\alpha = \beta$,
(ii) $(\alpha, \in) < (\beta, \in)$ právě tehdy, když $\alpha \in \beta$,
(iii) $(\alpha, \in) \leq (\beta, \in)$ právě tehdy, když $\alpha \subset \beta$.

Definice. Označme $\mathbb{O}n$ třídu všech ordinálních čísel.

Později ukážeme, že třída $\mathbb{O}n$ nemůže být množinou. Chová se však jako „největší ordinál“, konkrétně:

(i) $(\forall \alpha \in \mathbb{O}n)(\alpha \subset \mathbb{O}n)$.
(ii) $\mathbb{O}n$ je dobře uspořádaná náležítkem. Dokonce v tom smyslu, že kdykoli popíšeme neprázdnou podtřídu $T \subset \mathbb{O}n$, tak tato podtřída má nejmenší prvek. Proč? Uvažme libovolný ordinál $\alpha \in T$. Jedná-li se o nejmenší prvek T, jsme hotovi. V opačném případě je množina $\alpha \cap T$ neprázdná a najdeme nejmenší prvek tohoto průniku díky dobrému uspořádání na α.
(iii) Na $\mathbb{O}n$ lze definovat třídová zobrazení pomocí transfinitní rekurze. Rekurzivní předpis v takovém případě musí být třídové zobrazení, které je definované na všech množinových funkcích f s definičním oborem $\alpha \in \mathbb{O}n$. Transfinitní rekurze pak určuje třídovou funkci F definovanou na všech ordinálech. Formálně napsané Ti to možná zní děsivě, ale jak uvidíš na příkladu ω_α na konci seriálu, samotné použití je docela přirozené.

[18] Případně to lze ukázat i bez něj volbou nejmenšího x, pro které se tato vlastnost porušila.

Zatím jsme si ukázali, že každé ordinální číslo je množina všech menších ordinálů. Následující tvrzení říká, že to platí i obráceně.

Tvrzení. *Nechť $X \subset \mathbb{O}n$ je množina taková, že kdykoli obsahuje ordinální číslo α, tak obsahuje i všechna ordinální čísla $\beta < \alpha$. Pak X je ordinál.*

Důkaz. Z dobrého uspořádání třídy $\mathbb{O}n$ (bod (ii)) plyne, že i X je dobře uspořádaná náležítkem. Navíc dle zadání splňuje pro každý prvek $\alpha \in X$ podmínku $\alpha = \{\beta \in X : \beta < \alpha\}$. To znamená, že funkce $f(\alpha) = \alpha$ splňuje rekurzivní předpis pro definici typu DUMy $(X, \in)$, takže $\operatorname{typ}(X, \in) = X$, čili X je ordinální číslo. □

Důsledek. *Pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{O}n$ je $\bigcup X$ ordinální číslo.*

Důsledek. *$\mathbb{O}n$ je vlastní třída.*

Důkaz. Kdyby $\mathbb{O}n$ byla množina, tak by byla ordinálem. To by ale znamenalo $\mathbb{O}n \in \mathbb{O}n$, což je sporu s fundovaností.[19] □

Cvičení 13. Ukaž, že množina X je ordinální číslo právě tehdy, když platí následující dvě podmínky.

(i) Pro každé dva různé prvky $x, y \in X$ platí $x \in y$ nebo $y \in x$.
(ii) Každý prvek $x \in X$ je podmnožinou X.

Definice. Ordinály dělíme na *nulový, izolované* a *limitní* podle toho, jaké prvky reprezentují v uspořádané třídě $\mathbb{O}n$. Konkrétně:

(i) *Nulový* ordinál je jen prázdná množina $\emptyset$.
(ii) *Izolovaný* ordinál α je takový, který má největší prvek $\beta \in \alpha$ v uspořádání náležítkem.
(iii) *Limitní* ordinály jsou ty, které nejsou nulové ani izolované.

Přirozená a reálná čísla

Nyní definujeme přirozená čísla coby množiny. Přirozená čísla jsou od toho, aby udávala velikosti konečných množin. Je proto vhodné, aby každé přirozené číslo mělo tolik prvků, kolik je ono samo. Tedy 0 bude prázdná množina, 1 bude jednoprvková množina, 2 bude dvouprvková, a tak dále. Prázdná množina je určena jednoznačně $0 = \emptyset$, ale které prvky dát do dalších přirozených čísel? Musí se jednat o již dříve definované množiny, tak dává smysl, aby to byla přímo předchozí přirozená čísla:

$$1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}, \ldots$$

Přesně takto se ale staví i ordinální čísla. Přirozená čísla jsou tedy jen počátečními ordinálními čísly – těmi konečnými. Formálně popíšeme, které ordinály považujeme za *konečné.*

Definice. *Konečné* ordinální číslo (nebo též *přirozené číslo*) α je takové, které není limitní a ani žádný menší ordinál není limitní. Symbolem ω značíme množinu všech konečných ordinálních čísel.

Z toho snadno plyne, že kdykoli je ordinál n konečný, jsou i všechny ordinály $k < n$ konečné. Množina ω je tak současně ordinálem, a to nejmenším nekonečným – všechny menší jsou konečné a ω nemůže obsahovat samu sebe.

Musíme ale dokázat, že ω existuje (tedy že se nejedná o vlastní třídu). Zvolme libovolnou množinu m z axiomu nekonečna a vydělme z ní množinu $\omega' = \{n \in m : n \text{ je konečný ordinál}\}$. Dokážeme, že ω' obsahuje všechny konečné ordinály, a je tak hledanou ω. Zvolme pro spor nejmenší konečný ordinál $n \notin \omega'$. Nulový ordinál v ω' leží, takže je n izolovaný a existuje jeho předchůdce $n' \in \omega'$. Jenže $n = n' \cup \{n'\}$, a tak $n \in m$ z podmínky pro m. Proto i $n \in \omega'$.

[19] Kdybychom nechtěli použít axiom fundovanosti (který se občas vypouští), mohli bychom argumentovat i tím, že pro DUMu nemůže nastat $\mathbb{O}n < \mathbb{O}n$.

Na ordinálech, a tudíž i na přirozených číslech, zavedeme operace sčítání a násobení pomocí sčítání a násobení na DUMách. Pouze s tím rozdílem, že na výsledek aplikujeme zobrazení typ, abychom získali opět ordinální číslo, tedy $\alpha \cdot \beta = \mathrm{typ}\big((\alpha, \in) \cdot (\beta, \in)\big)$.

Cvičení. Rozmysli si, že součet i součin přirozených čísel je opět přirozené číslo.

Na základě přirozených čísel definujeme celá čísla. Množinou celých čísel $\mathbb{Z}$ bude $(\{0,1\} \times \omega) \setminus \{(1,0)\}$. Celé číslo pak je vždy dvojice (z, n), kde n je přirozené číslo určující absolutní hodnotu celého čísla a $z \in \{0,1\}$ určuje jeho znaménko (0 znamená plus). Z množiny celých čísel vyjímáme dvojici $(1,0)$, která by reprezentovala číslo „-0“.

Dále definujeme racionální čísla (zlomky) coby dvojice (a, b), kde a je celé číslo a b je nenulové přirozené číslo nesoudělné s a. Tuto dvojici interpretujeme jako zlomek $\frac{a}{b}$. Operace na celých a racionálních číslech se definují klasicky, ale bylo by nudné to zde rozepisovat.

Poznámka. Při takto definovaném rozšiřování čísel je 42 coby přirozené číslo jiné než 42 coby celé číslo, a to je jiné než 42 coby racionální číslo. Tento formalistický problém ale matematiky nikdy příliš nevzrušoval a běžně jsou přirozená čísla chápána jako podmnožina celých a ta zase jako podmnožina racionálních, ačkoli tomu tak formálně vzato zcela není.

Předvedeme ještě elegantní definici nezáporných reálných čísel, kterou lze snadno rozšířit na definici všech reálných čísel. Bylo by možné je definovat pomocí nekonečného desetinného (či binárního) rozvoje, avšak v takovém případě by bylo nesnadné například definovat násobení, proto to uděláme jinak.

Definice. Nechť $\mathbb{Q}_0^+$ značí množinu nezáporných racionálních čísel. O množině $R \subset \mathbb{Q}_0^+$ řekneme, že to je nezáporné reálné číslo, pokud

(1) s každým prvkem obsahuje všechny menší, tedy $(\forall r \in R)(\forall s \in \mathbb{Q}_0^+)(s < r \Rightarrow s \in R)$,
(2) nemá největší prvek,
(3) $R \neq \mathbb{Q}_0^+$.

Nezáporné reálné číslo tedy charakterizujeme výčtem všech racionálních čísel, která jsou menší. Racionální číslo $q \in \mathbb{Q}_0^+$ odpovídá reálnému číslu $\{r \in \mathbb{Q}_0^+ : r < q\}$. Operace v reálných číslech definujeme následovně:

(i) pro nezáporná reálná čísla R, S definujeme $R + S = \{s + t : r \in R, s \in S\}$,
(ii) pro nezáporná reálná čísla R, S definujeme $R \cdot S = \{r \cdot s : r \in R, s \in S\}$,
(iii) pro nezáporná reálná čísla R, S definujeme $R \leq S$ jako $R \subset S$.

Množinu nezáporných reálných čísel značíme $\mathbb{R}_0^+$.

Poznámka. Tato konstrukce reálných čísel je nejbližší konstrukci pomocí Dedekindových řezů. Standardní konstrukce Dedekindovými řezy definuje rovnou všechna reálná čísla (nikoli jen nezáporná). V takovém případě je třeba ještě zakázat prázdnou množinu a věnovat větší péči násobení reálných čísel.

Cvičení 14. Dokaž, že množiny popsané v bodech (i), (ii), tedy součet a součin dvou nezáporných čísel, odpovídají definici nezáporného reálného čísla.

Cvičení 15. Najdi nespočetnou množinu $X \subset \mathcal{P}(\omega)$ tak, aby pro libovolné dva prvky $x, y \in X$ platilo $x \subset y$ nebo $y \subset x$.

Z takto definovaných nezáporných reálných čísel plynou klíčové vlastnosti reálných čísel, které popisují jejich vztah k číslům racionálním:

(i) Pro každá dvě různá nezáporná reálná čísla existuje racionální číslo, které leží mezi nimi. (hustota racionálních čísel)
(ii) Uvažme neprázdnou množinu čísel $X \subset \mathbb{R}_0^+$. Řekneme, že X je omezená číslem $r \in \mathbb{R}_0^+$, pokud $(\forall x \in X)(x \leq r)$. Pokud nějaké číslo $r \in \mathbb{R}_0^+$ omezuje X, tak lze najít jedno nejmenší možné číslo, které omezuje X (tímto číslem je $\bigcup X$). (existence suprema)

Nezáporná reálná čísla lze rozšířit na všechna reálná čísla obdobně jako přirozená čísla na celá. Vlastnost hustoty racionálních čísel i existence suprema v nich zůstane zachována.

Příklad. O množině $X \subset \mathbb{R}$ řekneme, že je *diskrétní*, pokud pro každé $x \in X$ existuje otevřený interval[20] I, který splňuje $I \cap X = \{x\}$. Platí, že každá diskrétní množina je spočetná.

Důkaz. Uvažme $x \in X$ a otevřený interval $I = (a, b)$, který splňuje $I \cap X = \{x\}$. Pak je možné najít racionální číslo p uvnitř intervalu (a, x) a racionální číslo q uvnitř intervalu (x, b). Možných dvojic racionálních čísel (p, q) je jenom spočetně mnoho, protože $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \omega$. Na druhou stranu lze zpětně z dvojice (p, q) rekonstruovat číslo x tím, že najdeme průnik intervalu (p, q) a množiny X. Proto je v množině X jenom spočetně mnoho čísel. □

Cvičení 16. Najdi funkci $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \omega$ takovou, že $f(x, y) = f(y, z)$ nastává jedině pro $x = y = z$.

Nespočetný ordinál

Rozšíření přirozených čísel směrem k reálným byla odbočka demonstrující, že pomocí teorie množin lze stavět i známé matematické objekty. Nyní se vrátíme k výpravě do nekonečna a ještě dál a sestrojíme nespočetné ordinální číslo.

Nechť ω_1 značí množinu všech spočetných ordinálních čísel. Určitě nemůže být ω_1 spočetná – to plyne ze stejného argumentu, z jakého $\mathbb{O}n$ není množina a ω je nekonečná; musela by obsahovat sama sebe, což je ve sporu s fundovaností. Rovněž analogicky je ω_1 nejmenší nespočetný ordinál. Nemusí ale být jasné, proč tato množina existuje, neboli proč není vlastní třídou.

To plyne z axiomu nahrazení pro funkci typ. Začneme s množinou $\{\omega\} \times \mathcal{P}(\omega \times \omega)$, čili množinou všech dvojic (ω, U), kde $U \subset \omega \times \omega$. V některých případech určuje U dobré uspořádání na ω, v takovém případě můžeme najít $\mathrm{typ}(\omega, U)$. Množinu ω_1 sestrojíme jako množinu těchto typů (existuje díky axiomu nahrazení), kterou nakonec ještě sjednotíme s ω (abychom tam dostali i konečné ordinály).

Příklad. Neexistuje rostoucí funkce $f\colon \omega_1 \to \mathbb{R}$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme takovou funkci f. Pak pro každé $\alpha \in \omega_1$ najdeme racionální číslo $g(\alpha)$ v otevřeném intervalu $(f(\alpha), f(\alpha + 1))$. Funkce g je rostoucí, tedy prostá, a dostáváme tak $|\omega_1| \le |\mathbb{Q}|$, což je spor. □

Dále ω_1 vykazuje řadu analogií s množinou přirozených čísel ω:

ω : Každý prvek $n \in \omega$ dělí ω na konečně mnoho menších a nekonečno větších prvků.
ω_1 : Každý prvek ω_1 dělí ω_1 na spočetně mnoho menších a nespočetně mnoho větších prvků.
Proč? Menších prvků je spočetně, protože to jsou prvky spočetného ordinálu, a větších (ostatních) prvků je nespočetně mnoho, protože ω_1 sama je nespočetná.

ω : Každá množina $X \subset \omega$ je konečná nebo má stejný typ jako ω.
ω_1 : Každá množina $X \subset \omega_1$ je spočetná nebo má stejný typ jako ω_1.
Proč? Plyne z věty o porovnání typů z minulého dílu – buď $\mathrm{typ}(X) \in \omega_1$, a tak je X spočetná, nebo $\mathrm{typ}(X) = \omega_1$.

ω : Množina $X \subset \omega$ je konečná právě tehdy, když $\bigcup X \in \omega$.
ω_1 : Množina $X \subset \omega_1$ je spočetná právě tehdy, když $\bigcup X \in \omega_1$.
Proč? Když je X spočetná a každý prvek $x \in X$ je spočetný ordinál, tak množina $\bigcup X$ je spočetná, a tedy prvek ω_1. Pro opačnou implikaci si stačí uvědomit $X \subset (\bigcup X) + 1 \in \omega_1$.

[20] Otevřený interval (a, b) je množina daná předpisem $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ pro dané $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Aby to ale nevypadalo, že se ω_1 chová úplně stejně jako přirozená čísla, nabízíme opět ilustrační pohádku.

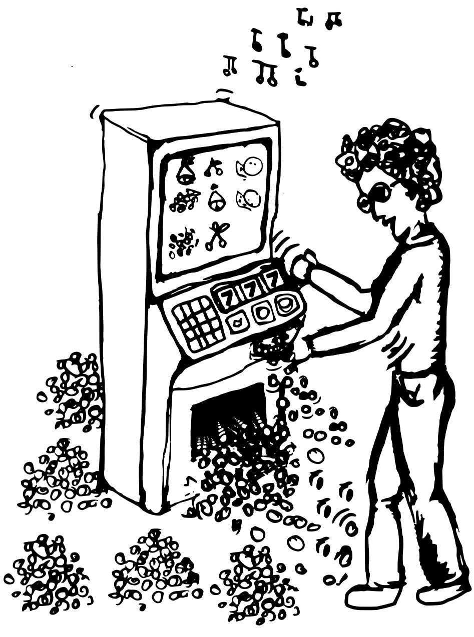
Pohádka o nespočetném gamblerovi

Ve světě teorie množin, kde čas běží po ordinálních číslech, se jistý pan Loudal neustále hádal se svou ženou. Sice před časem nalezl poklad, ale v teorii množin je času nekonečně (a ještě víc), a tak už stihl skoro všechen majetek prosázet v loterii, za což ho Loudalka právě napomínala: „Měl bys s tím sázením skončit v konečným čase a čím dřív, tím líp. Nekonečně mincí se vyhrát nedá, to je dokázaný! Važ si tý jedný mince, co ti zbyla!“ „Ale na mne se jednou usměje štěstí a budeme mít nekonečně peněz,“ snil si Loudal svou.

Navíc tou dobou do vesnice přivezli výherní automat. A nebyl to jen tak kdejaký hrací automat, jaké možná znáte z obyčejného světa. Obyčejné automaty většinou sežerou minci a nic z toho. Kdykoli tento automat obdržel minci, vypadly z něho dvě nové mince stejné hodnoty. Od něčeho tak lákavého Loudalka Loudala zadržet nedokázala. Hodil do něj minci m_0, vypadly dvě další mince m_1, m_2, hodil do něj minci m_1, vypadly další dvě mince m_3, m_4, vhodil mince m_2, vypadly mince m_5, m_6. A takto Loudal pokračoval až do ω, kdy do automatu naházel všechny mince a žádná mu nezbyla.

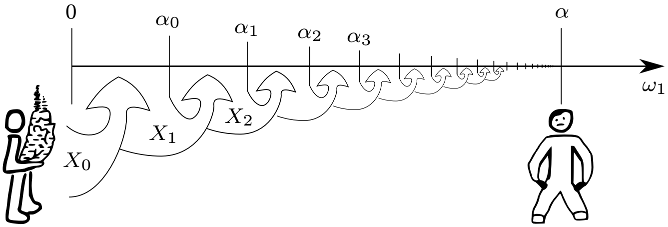
To nebylo to pravé ořechové, pomyslel si Loudal s jednou kapsou prázdnou a druhou vysypanou. Loudalka ho přivítala zčásti vítězoslavně, zčásti pekelně naštvaně, ale unavený Loudal ji ani moc neposlouchal a šel spát. V noci dostal nápad. Hned vyskočil z postele a šel ještě za tmy na ryby, aby si vydělal nějakou tu kačku do automatu. Jakmile se mu to povedlo, vydělanou minci m_0 hodil do automatu a vypadly opět mince m_1, m_2. Minci m_1 si nechal a do automatu hodil až druhou vydělanou minci m_2. Minci m_3 si opět nechal a hodil do automatu m_4, … Takto měl v čase ω od vhození první mince nekonečně mnoho mincí. „No vidíš,“ povídá ráno Loudalce, „já věděl, že se to musí podařit.“

Dalšího dne pak automat vyměnili za nový. Nový automat, kdykoli dostane minci, vyhodí zpátky ω mincí. „No teda,“ pomyslí si Loudal, „teď někomu stačí hodit do automatu jednu minci a bude stejně bohatý jako já, jaká nespravedlnost!“ A hned se mu v hlavě zrodil plán, že kdyby na automatu hrál až do kroku ω_1, mohl by vyhrát nespočetně mnoho mincí. Marně ho Loudalka napomínala, že v tom bude zase nějaká čertovina, akorát se ohradil: „Že dostanu nekonečně mnoho mincí, tos mi taky nevěřila, a jakej jsem byl!“ Loudal vzal svých ω mincí a začal je házet do automatu. Opět se pokoušel si vybírat mince šikovně do zásoby, ale ať se snažil, jak se snažil, ještě dříve, než se dostal do kroku ω_1, byl opět bez peněz. Nespočetně mnoho mincí pomocí takového automatu totiž získat nelze. O tom, jak mu pak Loudalka vyhubovala, raději taktně pomlčíme.



A proč z automatu nelze získat nespočetně mnoho mincí? Dokážeme, že už v některém spočetném kroku Loudal nebude mít do automatu co hodit. Můžeme tedy pro jednoduchost předpokládat, že se Loudal nerozhodl žádnou minci ušetřit do kroku ω_1 (když chceme dokázat, že se do toho kroku stejně nedostane).

Označme X_0 množinu všech kroků, při nichž vhodil do automatu některou z mincí, které měl na začátku. To je spočetná podmnožina ω_1, tedy existuje ordinál $\alpha_0 \in \omega_1$, který je ostře větší než všechny prvky X_0 (například můžeme zvolit $\alpha_0 = \bigcup X_0 + 1$). Před α_0 proběhlo spočetně mnoho kroků a v každém z automatu vypadlo spočetně mnoho mincí. Celkem to je opět spočetně mnoho vypadlých mincí. Označme X_1 množinu všech kroků, během kterých Loudal hodil do automatu některou z nich. Opět najdeme α_1, které je větší než všechny prvky X_1, a opakováním postupu sestrojíme X_n a α_n pro každé přirozené číslo n. Nakonec definujeme spočetný ordinál $\alpha = \bigcup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. V kroku α už Loudalovi žádná mince nezbyla. Každou minci, kterou vydělal před krokem α, totiž vydělal před některým krokem α_n. Jenže to znamená, že ji hodil do automatu před krokem α_{n+1}.



Poznámka. Nepohádková verze tohoto tvrzení se nazývá Pressing down lemma a zní: „Nechť f je funkce $\omega_1 \to \omega_1$. Předpokládejme, že pro všechny nenulové $\alpha \in \omega_1$ platí $f(\alpha) < \alpha$. Pak se nemůže stát, že by všechny množiny $X_\beta = \{\alpha \in \omega_1 : f(\alpha) = \beta\}$ byly spočetné.“ Jak toto tvrzení souvisí s pohádkou? Z Pressing down lemmatu lze přímočaře dokázat nemožnost výhry ω_1 mincí a naopak.

Nejprve ukážeme, že kdyby se Loudal dostal až do kroku ω_1, nemůže platit Pressing down lemma. V každém kroku α si Loudal musí vzít minci z některého předchozího kroku, označíme jej $f(\alpha)$. Množina X_β pro takto definovanou f pak obsahuje všechny kroky, ve kterých hodil do automatu některou minci vydělanou v kroku β. Je tedy spočetná, protože vydělaných mincí z každého kroku je spočetně.

Nyní naopak mějme funkci f, pro kterou jsou všechna X_β spočetná, a ukažme, že se Loudal může dostat do kroku ω_1. V kroku α vezme Loudal minci z kroku $f(\alpha)$. Navíc mějme zafixované očíslování množiny $X_{f(\alpha)}$ a Loudal si vezme tolikátou minci z kroku $f(\alpha)$, kolikátý je prvek $\alpha \in X_{f(\alpha)}$ v tomto očíslování. Tím nebude potřebovat žádnou minci hodit do automatu vícekrát a vždy bude mít minci, kterou do automatu hodí. Dostane se tedy až do kroku ω_1.

A ještě dál

Postup pro sestrojení ω_1 coby množiny všech spočetných ordinálů lze zobecnit a definovat ω_α pro obecný ordinál α rekurzivním předpisem:

(i) $\omega_0 = \omega$,
(ii) $\omega_{\alpha+1}$ je množina všech ordinálů β splňujících $|\beta| \le |\omega_\alpha|$,
(iii) $\omega_\alpha = \bigcup\{\omega_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$ pro α limitní.

Takto definované ordinály ω_α mají všechny různou mohutnost, což dává odpověď na otázku, kolik je různě velkých nekonečen. Různě velká nekonečna tvoří vlastní třídu, tedy je jich tolik, že se ani nevejdou do množiny.

Příklad. Pokud bychom chtěli sestrojit hodně velké nespočetné ordinální číslo (resp. DUMu), můžeme uvážit ordinály

$$\omega_0, \quad \omega_{\omega_0}, \quad \omega_{\omega_{\omega_0}}, \quad \omega_{\omega_{\omega_{\omega_0}}}, \quad \dots$$

a nakonec vzít jejich sjednocení.

Čokoládová výzva

Za následující čokoládovou úlohu na řešitele čeká geometrická **nekonečná posloupnost čokolád**. Ten, kdo ji vyřeší nejrychleji, dostane čokoládu. Ten, kdo ji vyřeší po něm, dostane půlku čokolády, další čtvrtku čokolády, atd. Tak s chutí do řešení! Úloha se týká toho, jak lze mohutnost ω_n charakterizovat i bez použití rekurze či dobrých uspořádání.

Úloha. Nechť α je ordinál a n přirozené číslo. Označme $[\alpha]^n$ množinu všech n-prvkových podmnožin α a $[\alpha]^{<\omega}$ množinu všech konečných podmnožin α. O zobrazení $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$ řekneme, že je *čokoládové*, pokud existuje $(n+1)$-prvková množina $X \subset \alpha$ taková, že

$$(\forall x \in X)(x \notin f(X \setminus \{x\})).$$

Dokaž, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Všechna zobrazení $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$ jsou čokoládová.
(ii) $\alpha \geq \omega_n$.

Minulou čokoládovou výzvu vyhrál *Danil Koževnikov* s následující konstrukcí: Pro DUMy A, B definujeme mocninu A^B jako množinu všech funkcí $B \to A$, které jsou pouze na konečně mnoha místech nenulové. Dvě takové funkce f, g porovnáme tak, že se podíváme na nejvyšší prvek $b \in B$, pro který $f(b) \neq g(b)$, a hodnota v tomto bodě rozhodne, která funkce je větší. Danil takto vymyslel mocnění DUM, které se běžně používá, a s přehledem by vyhrál už jen s DUMou $\omega^{(\omega^\omega)}$.

On však šel dál a zbytek byl mírně zamlžený, tak jej popíšeme pomocí ordinálních čísel a standardní notace ε_α. Stejně jako u sčítání a násobení rozšíříme mocnění na ordinální čísla. Pak transfinitní rekurzí definujeme ε_α předpisem:

(i) $\varepsilon_0 = \omega \cup \omega^\omega \cup \omega^{(\omega^\omega)} \cup \ldots$,
(ii) $\varepsilon_{\alpha+1} = \varepsilon_\alpha \cup \varepsilon_\alpha^{\varepsilon_\alpha} \cup \varepsilon_\alpha^{(\varepsilon_\alpha^{\varepsilon_\alpha})} \cup \ldots$,
(iii) $\varepsilon_\alpha = \bigcup\{\varepsilon_\beta : \beta < \alpha\}$ pro α limitní.

DUMou, kterou Danil vsadil, je $\varepsilon_{(\omega^\omega)}$. Ještě poznamenejme, že v zadání předchozí čokoládové úlohy bylo cílem popsat co možná největší spočetnou DUMu, takže i Danilova DUM je spočetná. Oproti tomu DUM popsaná v předchozí kapitole je nespočetná vzhledem k tomu, že už ω_1 je nespočetná.

Seznam symbolů a pojmů

Na této stránce jsou stručně uvedeny všechny důležité pojmy druhého dílu seriálu. U každého pojmu z tohoto dílu je uvedeno, na které stránce byl definován.

Důležité pojmy z minulého dílu: zobrazení (funkce), spočetno, nespočetno, porovnávání mohutností $|A| \leq |B|$, $|A| = |B|$, DUM (dobře uspořádaná množina), operace na DUMách $A + B$, $A \cdot B$, porovnávání DUM $A < B$, $A \simeq B$.

Návody

1. $(\exists y)\Big(\big(\neg(y \in x)\big) \wedge (\forall z)\big(z \in x' \Leftrightarrow (z = y \vee z \in x)\big)\Big)$.

2. Zvol $z = \{x\}$.

3. $a \setminus b = \{z \in a : z \notin b\}$. Stačí tedy volit $\varphi(z)$ jako $z \notin b$.

4. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \Leftrightarrow (\forall u)(u \in z \Rightarrow u \in x)\big)$.

5. (i) Existence množiny $\{a\}$ je ve sporu s axiomem fundovanosti. (ii) Stejný argument s $\{a, b\}$.

6. (Zatím není rozepsané kompletně)

$$(\exists m)(\exists e)\Bigg(\big(\forall z\big)\big(z \notin e\big) \wedge (e \in m) \wedge (\forall x)\Big(x \in m \Rightarrow (\exists y \in m)\big(\forall z\big)\big((z \in y) \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)\big)\Big)\Bigg).$$

7. (i) Axiom nekonečna vyžaduje existenci množiny, jejímž prvkem je prázdná množina. Tedy prázdná množina sama o sobě musí existovat. (ii) $\psi(x, y)$ definujeme jako $\varphi(x) \wedge (x = y)$. (iii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ je dvouprvková množina $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Pak definujeme $\psi(x, y)$ jako $(x = \emptyset \wedge y = s) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = t)$ a dostaneme množinu $\{s, t\}$.

8. Postupné kroky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$, $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$,
(ii) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ z (i),
(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ z (i) a (ii),
(iv) $(\emptyset, \{\emptyset\}) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$ z (ii) a (iii).

9. Dvojice (a, b) je jednoprvková množina právě tehdy, když $a = b$. V takovém případě je $\{a\}$ jednoznačně určený prvek této množiny. Pokud je (a, b) dvouprvková, obsahuje jednu jednoprvkovou a jednu dvouprvkovou množinu. Prvek té jednoprvkové musí být a. Současně a musí být jedním z prvků dvouprvkové množiny, ten druhý pak musí být b.

10. Je třeba si vzpomenout na definici uspořádané dvojice. Součin $A \times B$ pak lze dostat vydělením z množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

11. Sporem: Kdyby to byla množina, tak z axiomu sjednocení existuje množina všech množin. Alternativa: Nechť množina A obsahuje všechny jednoprvkové množiny. Pak obsahuje i množinu $\{A\}$, což je sporu s fundovaností.

12. To, že je rekurzivní předpis jednoznačně definován pro každou částečnou funkci, zaručují axiom nahrazení a extensionality. Pro využívání vlastnosti dobrého uspořádání vždy potřebujeme axiom vydělení: Existuje prvek, který splňuje podmínku, vydělíme tedy množinu všech prvků, které ji splňují, a v té najdeme nejmenší. Dále rozlišíme tři možnosti z důkazu v minulém dílu:

(i) Když x je nulový, stačí axiom existence.
(ii) Když x je izolovaný, používáme axiomy dvojice a sjednocení pro rozšíření f o jeden prvek. Alternativně by stačilo popsat toto rozšířené zobrazení třídově a použít axiom nahrazení stejně jako v bodě (iii).
(iii) Když x je limitní, umíme (jednoznačně) popsat hodnotu pro všechna $y < x$. Stačí tedy použít axiom nahrazení k tomu, že třídové zobrazení, jehož definiční obor je množina, lze reprezentovat množinou.

13. Dopředná implikace byla dokázaná v textu. Předpokládejme (i) a (ii) a dokažme, že X je ordinál. Z (i) vyplyne přímočarou aplikací axiomu fundovanosti (zde se bez jeho využití neobejdeme), že X je dobře uspořádaná náležítkem. Důkaz se dokončí postupem z důkazu předchozího tvrzení.

14. (i) Když $x < r + s$, tak $x = r' + s$, kde $r' = x - s < r$. Z toho snadno odvodíme potřebné vlastnosti. (ii) Analogicky k (i).

15. Přejmenuj prvky nezáporných reálných čísel (coby množin) pomocí bijekce mezi $\mathbb{Q}_0^+$ a ω.

16. Uvaž bijekci $g\colon \mathbb{Q} \to \omega$. Pak lze volit $f(x, x) = 0$. Pro $x < y$ pak $f(x, y) = 2g(q) + 1$, $f(y, x) = 2g(q) + 2$, kde q leží v intervalu (x, y).

2. podzimní série – Poměry

Výsledková listina

1.–6.	*Filip*	*Bialas*	3	GOpatovPH	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*František*	*Couf*	3	EKO GPraha	3 – 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Jakub*	*Löwit*	4	GČeskoliPH	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Jáchym*	*Solecký*	3	PORG PH	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Lucien*	*Šíma*	4	PORG PH	3 3 – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–6.	*Pavel*	*Turek*	3	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
7.	*Danil*	*Koževnikov*	2	GKepleraPH	3 – – 5 5 5 5 4	$24 + i$	**24,50**
8.–9.	*Eleonora*	*Krůtová*	1	GJarošeBO	3 3 3 5 5 0 5 0	21	**23,42**
8.–9.	*Minh Duc*	*Pham*	1	NPorg	3 3 3 5 5 2 5 –	21	**23,42**
10.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	0	GJHroncaBA	3 3 3 5 5 – – –	19	**23,11**
11.	*Lenka*	*Kopfová*	1	MendelG OP	3 2 3 5 5 5 – –	21	**22,96**
12.	*Filip*	*Čermák*	2	MendelG OP	3 3 3 5 5 0 5 –	21	**22,77**
13.–17.	*Daniel*	*Borák*	1	GŠpitálsPH	3 3 3 5 5 0 – –	19	**22,43**
13.–17.	*Viktória*	*Brezinová*	1	GAlejKošic	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
13.–17.	*Matthew*	*Dupraz*	1	NPorg	3 3 3 5 5 0 – 1	19	**22,43**
13.–17.	*Ondřej*	*Krabec*	1	G KomHavíř	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
13.–17.	*Samuel*	*Krajči*	1	GAlejKošic	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
18.	*Pavel*	*Hudec*	2	GJarkovPH	3 2 3 2 5 5 5 –	21	**22,39**
19.	*Vendula*	*Kuchyňová*	2	GMLerchaBO	3 3 3 – 5 4 5 –	$20 + i$	**22,34**
20.	*Hedvika*	*Ranošová*	2	GBudějovPH	3 3 3 5 5 – 5 –	21	**22,23**
21.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	2	GZborovPH	3 3 3 5 3 5 5 –	21	**22,18**
22.–23.	*Alexandr*	*Jankov*	2	MatičníGOS	3 3 3 5 5 4 2 0	20	**22,17**
22.–23.	*Ondřej*	*Motlíček*	3	G Šumperk	3 3 3 5 5 0 5 0	21	**22,17**
24.	*Radek*	*Olšák*	1	GMensaPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,95**
25.–26.	*Pavel*	*Havlín*	1	NPorg	3 3 3 4 5 – – –	18	**21,88**
25.–26.	*Lucie*	*Kundratová*	1	G TGM Zlín	3 3 3 – – 0 5 4	18	**21,88**
27.	*Petr*	*Gebauer*	2	G Mělník	3 2 – 5 5 5 – –	20	**21,63**
28.	*Václav*	*Steinhauser*	2	G Dačice	3 3 3 5 5 5 – 3	21	**21,57**
29.–32.	*Ondřej*	*Buček*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 0 – –	19	**21,52**
29.–32.	*Matúš*	*Komora*	2	GLettMart	3 3 3 5 5 0 1 –	19	**21,52**
29.–32.	*Vojtěch*	*Lengál*	2	GZborovPH	3 3 3 5 5 – – 1	19	**21,52**
29.–32.	*Lenka*	*Vincenová*	2	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,52**
33.	*Filip*	*Matějka*	2	GZborovPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**21,49**
34.	*Veronika*	*Hladíková*	3	GMikul23PL	3 3 3 5 5 5 – –	21	**21,48**
35.	*Matěj*	*Doležálek*	1	G Humpolec	3 3 3 – – 4 – 4	$17 - i$	**21,13**
36.	*Kamila*	*Kyzlíková*	2	GZborovPH	3 3 3 5 5 0 – –	19	**21,08**
37.	*David*	*Królikowski*	2	G Karviná	3 3 3 4 5 0 1 0	18	**20,84**
38.	*Tomáš*	*Konečný*	3	GJirsíkaČB	3 3 3 5 5 – 5 –	$21 + i$	**20,73**
39.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 3 3 – 5 0 – 2	16	**20,70**
40.	*Matěj*	*Kraft*	1	GMikul23PL	3 3 3 5 2 – 1 –	16	**20,67**

41.–42.	*Jan*	*Petr*	3	GKepleraPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
41.–42.	*Daniele*	*Venier*	3	LSciARoiti	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
43.	*Denisa*	*Chytilová*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 3 4 3 – 5 –	18	**20,38**
44.	*Vojtěch*	*Lanz*	2	GZborovPH	3 3 3 5 5 1 – 1	19	**20,36**
45.	*Richard*	*Hladík*	3	GaOA MarLáz	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,27**
46.	*Ondřej*	*Svoboda*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,22**
47.–49.	*Martina*	*Kalašová*	1	GJHroncaBA	3 3 3 – 5 – 1 –	15	**20,00**
47.–49.	*Erik*	*Kočandrle*	1	GMikul23PL	3 3 3 5 – – 1 –	15	**20,00**
47.–49.	*Jana*	*Pallová*	1		3 3 3 3 3 – 1 –	15	**20,00**
50.	*Daniel*	*Kopf*	4	SlezkéG OP	3 3 3 5 5 5 – –	21	**19,97**
51.	*Adéla*	*Kostelecká*	4	GLesníZlín	3 3 3 5 5 2 5 –	21	**19,91**
52.	*Tomáš*	*Domes*	3	MendelG OP	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,61**
53.	*Tomáš*	*Čelko*	2	GPBystrica	3 3 – 5 3 0 – 2	16	**19,37**
54.–56.	*Jakub*	*Domes*	1	MendelG OP	3 3 3 – 5 – – –	14	**19,28**
54.–56.	*Tomáš*	*Drobil*	1	G Dačice	3 3 3 3 2 – – –	14	**19,28**
54.–56.	*Monika*	*Machalová*	1	GJHroncaBA	3 3 3 – 5 – – –	14	**19,28**
57.	*Martin*	*Bakoš*	2	GPBystrica	3 – – 5 5 0 – 3	16 – *i*	**19,17**
58.–59.	*Kateřina*	*Nová*	3	G Vimperk	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,14**
58.–59.	*Kristína*	*Szabová*	2	GVarŽilina	3 – 3 5 5 – – –	16	**19,14**
60.	*Marian*	*Poljak*	4	GJŠkodyPŘ	3 3 – 5 5 – 5 –	21	**19,13**
61.–62.	*Samuel*	*Baran*	2	GRaymanaPV	3 3 3 – 5 – 1 –	15	**18,59**
61.–62.	*Marie*	*Dohnalová*	3	GNadKavaPH	3 3 3 5 4 – – –	18	**18,59**
63.	*Zuzana*	*Svobodová*	4	G FrýdlNOs	3 – 3 5 5 5 – –	21	**18,49**
64.	*Alžběta*	*Neubauerová*	2	GNadKavaPH	3 3 3 – 5 – 1 –	15	**18,32**
65.	*Peter*	*Súkeník*	4	GOkrŽilina	3 3 3 4 5 – – –	18	**18,00**
66.–73.	*Klára*	*Cihlářová*	2	G Klatovy	3 3 3 5 – – – 0	14	**17,77**
66.–73.	*Ondřej*	*Dušek*	2	PORG PH	3 3 3 – 5 – – –	14	**17,77**
66.–73.	*Petr*	*Ježek*	2	GBNěmcovHK	3 3 3 – 5 – – 0	14	**17,77**
66.–73.	*Adéla*	*Seidelmannová*	2	VOŠRychnovKn	3 3 3 5 – – – 0	14	**17,77**
66.–73.	*Martin*	*Spišák*	2	GAlejKošic	3 3 3 0 5 – – 0	14	**17,77**
66.–73.	*Martin*	*Strnad*	2	G Dobříš	3 3 3 – 5 – – –	14	**17,77**
66.–73.	*Anna*	*Šírová*	2	GJilemnice	3 3 3 5 – – – –	14	**17,77**
66.–73.	*Dominika*	*Zumrová*	2	SPŠ PansPH	3 3 3 5 – 0 – –	14	**17,77**
74.–76.	*Kateřina*	*Charvátová*	1	GBNěmcovHK	3 3 3 – 2 – 1 –	12	**17,70**
74.–76.	*Šárka*	*Míchalová*	1	G Kralupy	3 3 1 – 5 – – 0	12	**17,70**
74.–76.	*Zdeněk*	*Vostřel*	1		3 3 3 – 2 – 1 –	12	**17,70**
77.	*Marco*	*Souza de Joode*	0		3 3 3 – – – 1 0	10	**17,36**
78.	*Marek*	*Pospíšil*	3	GJatečníÚL	3 3 3 – 5 – 1 0	15	**17,27**
79.	*Michal*	*Töpfer*	3	GJPekařeMB	3 3 3 – 5 2 – 0	16	**17,05**
80.	*Anh Minh*	*Tran*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 3 – – –	17	**17,00**
81.–83.	*David*	*Krajíček*	2	BG Ostrava	3 2 3 – 5 – – –	13	**16,90**
81.–83.	*Veronika*	*Roubínová*	2	G Kadaň	3 2 3 – 5 0 – –	13	**16,90**
81.–83.	*Tereza*	*Vlčková*	2	GJarošeBO	3 2 3 – 5 – – –	13	**16,90**
84.	*Jaroslav*	*Paidar*	2	SPŠMasarLI	3 3 1 5 2 – – –	14 – *i*	**16,88**
85.–86.	*Ondřej*	*Bursa*	1	GTNovákBO	3 3 0 – 5 – – 0	11	**16,83**
85.–86.	*Michal*	*Chudoba*	1	GLitoměřPH	3 3 3 – 2 – – –	11	**16,83**
87.	*Jaromír*	*Mielec*	3	GVolgogrOS	3 3 3 5 5 – – –	19 – *i*	**16,73**
88.	*Jan*	*Šorm*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 5 4 – –	20	**16,60**
89.–91.	*Jan*	*Hrůza*	3	G Kadaň	3 3 3 – 5 0 – –	14	**16,36**
89.–91.	*Martin*	*Pašen*	3	GRaymanaPV	3 3 3 – 5 – 0 0	14	**16,36**
89.–91.	*Filip*	*Strakoš*	3	G TGM Zlín	3 3 3 – – – 5 –	14	**16,36**
92.–93.	*Slavomír*	*Hanzely*	4	GRaymanaPV	3 3 3 – 5 2 – –	16	**16,00**

92.–93.	*Matej*	*Kvorka*	2	GŠkolDubni	3 3 3 3 – 0 – –	12	**16,00**
94.–98.	*Anna*	*Jandová*	1	G Leg PB	3 3 3 – – – 1 –	10	**15,89**
94.–98.	*Jaroslav*	*Konečný*	1	G Čelákov	3 3 3 – 1 – 0 –	10	**15,89**
94.–98.	*Jaroslav*	*Kortus*	1	GMikul23PL	3 3 3 – 1 – – –	10	**15,89**
94.–98.	*Timur*	*Sibgatullin*	1	PČGKarVary	3 3 3 – – – 1 0	10	**15,89**
94.–98.	*Andrej*	*Židek*	1	GJKTyla HK	3 3 3 – – – 1 0	10	**15,89**
99.	*Daniel*	*Pišťák*	4	GZborovPH	3 – – 2 5 5 5 –	20	**15,87**
100.	*Vladimír*	*Lukačko*	2	GVarŽilina	3 2 3 4 – – – –	12	**15,60**
101.	*Filip*	*Oplt*	3	GBudějovPH	3 3 3 – – – 1 3	13	**15,43**
102.	*Aleš*	*Krčil*	3	G Humpolec	3 3 3 5 – 0 – 0	14	**15,13**
103.	*Nikola*	*Kalábová*	2	FSG Pirna	3 2 0 0 5 – 1 0	11	**15,05**
104.–111.	*Alexander*	*Csizmár*	1	GMikul23PL	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
104.–111.	*Pavel*	*Čácha*	1	GMikul23PL	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
104.–111.	*Josef*	*Král*	1	MendelG OP	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
104.–111.	*Anna*	*Mírková*	1	G LPika PL	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
104.–111.	*Dominika*	*Mokroszová*	1	G FrýdČTěš	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
104.–111.	*Michal*	*Poft*	1	G Teplice	3 2 3 – – 0 1 0	9	**14,89**
104.–111.	*Antonín*	*Štrpka*	1	G Šumperk	3 3 3 – – – – 0	9	**14,89**
104.–111.	*Linh Giang*	*Tran*	1	GMikul23PL	3 3 3 – – – – –	9	**14,89**
112.–113.	*Petra*	*Šnoblová*	2	GJatečníÚL	3 3 3 – – – 1 –	10	**14,05**
112.–113.	*Evžen*	*Wybitul*	2		3 3 3 0 – – 1 0	10	**14,05**
114.–116.	*Kristýna*	*Lhoťanová*	1	G RožnRadh	3 3 1 – – 0 1 0	8	**13,81**
114.–116.	*Lubomír*	*Smrček*	1		3 – – 0 4 – 1 0	8	**13,81**
114.–116.	*Kamila*	*Ženatá*	1	GNeumannŽR	3 – 3 – 1 – 1 –	8	**13,81**
117.	*Nodari*	*Gogatishvili*	2	GZborovPH	3 3 3 – – 0 1 –	10	**13,57**
118.	*Filip*	*Chudoba*	2	PORG PH	3 3 3 – 1 – – 0	10	**13,54**
119.	*Johana*	*Dvořáková*	1	G Trutnov	3 3 2 – – – – –	8 – *i*	**13,51**
120.–122.	*Matěj*	*Coufal*	3	G HavlBrod	3 3 3 – 1 – 1 0	11	**13,47**
120.–122.	*Jiří*	*Češka*	3	CMGProstěj	3 3 3 – 2 0 – 0	11	**13,47**
120.–122.	*Jan*	*Klásek*	3	SlovanG OL	3 3 3 – 1 – 1 –	11	**13,47**
123.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	3 3 – – – – 1 –	7	**13,34**
124.	*Zuzana*	*Tréglová*	3	G Žatec	3 1 3 – 5 – – –	12	**13,06**
125.–126.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
125.–126.	*Anna*	*Musilová*	0	PORG PH	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
127.–129.	*Jáchym*	*Bareš*	2	GTomkovaOL	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
127.–129.	*Daniel*	*Ridzoň*	2	GKepleraPH	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
127.–129.	*John Richard*	*Ritter*	2	G MasNámTŘ	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
130.	*Vít*	*Kalisz*	4	FSG Pirna	3 3 2 2 5 0 – –	15	**12,87**
131.–135.	*Šimon*	*Chvátil*	1	GBNěmcovHK	3 3 1 0 – – – –	7	**12,64**
131.–135.	*Alžběta*	*Manová*	1	G UherBrod	3 3 – – – – 1 –	7	**12,64**
131.–135.	*Filip*	*Müller*	1	GMikul23PL	3 3 1 – – – – –	7	**12,64**
131.–135.	*Karel*	*Müller*	1	GMikul23PL	3 3 1 – – – – –	7	**12,64**
131.–135.	*Petr*	*Zahradník*	1	GŠmejkalÚL	3 3 1 – – – – –	7	**12,64**
136.	*Marek*	*Malý*	3	G Neratov	3 3 – – 5 – – –	11	**12,57**
137.–139.	*Barbora*	*Lišková*	3	GJPekařeMB	3 3 3 – – – 1 –	10	**12,45**
137.–139.	*Jana*	*Menšíková*	3		3 3 3 – – – 1 –	10	**12,45**
137.–139.	*David*	*Neugebauer*	3	SlezkéG OP	3 3 – – – 0 – 4	10	**12,45**
140.	*Martina*	*Šmehylová*	2	GHlinŽilina	3 3 2 – – – – –	8	**11,89**
141.–145.	*Tomáš*	*Hampl*	3	GDukelBR	3 3 3 – – – – 0	9	**11,39**
141.–145.	*Samuel*	*Hrubý*	3	GFraŽilina	3 3 2 – – – 1 0	9	**11,39**
141.–145.	*Vojtěch*	*Jílek*	3	VOŠKutHora	3 3 3 – – – – 0	9	**11,39**
141.–145.	*Oldřich*	*Kos*	3	GKepleraPH	3 3 3 – – – – –	9	**11,39**

141.–145.	*Dan*	*Raffl*	3	GVoděraPH	3 3 3 – – – – 0	9	**11,39**
146.–151.	*Denisa*	*Jandová*	1	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
146.–151.	*Tereza*	*Lukášová*	1	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
146.–151.	*Ondřej*	*Meduna*	1	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
146.–151.	*Magdaléna*	*Sejkorová*	1	GUKlafárŽR	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
146.–151.	*Monika*	*Suchá*	1	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
146.–151.	*Martin*	*Zimen*	1	GJMasar JI	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
152.	*Valerie*	*Skopalová*	4	G VysMýto	3 3 1 3 1 0 1 0	11	**11,00**
153.	*Anh*	*Le Hoang*	4	GJarošeBO	– – 3 – 5 0 5 0	13	**10,81**
154.–157.	*Barbora*	*Hálková*	2	SPŠStav LI	3 3 1 – – – – –	7	**10,72**
154.–157.	*Andrej*	*Horník*	2	GAnMeTr	3 3 – – – 0 1 0	7	**10,72**
154.–157.	*Hana*	*Jirovská*	2	NPorg	3 1 3 0 – – – –	7	**10,72**
154.–157.	*Jakub*	*Zápotocký*	2	GOpatovPH	3 3 0 – – – 1 –	7	**10,72**
158.–159.	*Karolína*	*Slaběňáková*	0	ZŠ ValKlob	3 – 1 – – 0 0 –	4	**10,11**
158.–159.	*Jakub*	*Ucháč*	0	ZŠVranéNVl	3 0 – – – – 1 –	4	**10,11**
160.–162.	*Magdaléna*	*Bártová*	1	GDašickáPA	3 – – – 1 – 1 –	5	**10,00**
160.–162.	*Jakub*	*Čurda*	1	PORG PH	3 2 – – – – – –	5	**10,00**
160.–162.	*Kateřina*	*Vaňková*	4	GJarošeBO	3 3 3 – – – 1 0	10	**10,00**
163.–166.	*Kateřina*	*Čížková*	2	G Rokycany	3 3 – – – 0 – –	6	**9,48**
163.–166.	*Aneta*	*Němcová*	2	GBoskovice	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
163.–166.	*Krystyna*	*Waniová*	2	G HavlČTěš	3 3 – – – – – 0	6	**9,48**
163.–166.	*Radek*	*Wágner*	2	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
167.	*Barbora*	*Mouleová*	2	G Plasy	3 – 3 – – – – –	6	**9,22**
168.–170.	*Vojtěch*	*Janků*	4	CMGPgBrno	3 3 3 0 – – – 0	9	**9,00**
168.–170.	*Přemysl*	*Kopečný*	4	ČRG ČesBuď	3 3 1 0 1 0 1 0	9	**9,00**
168.–170.	*Peter*	*Macko*	4	GJHroncaBA	3 3 3 – – – – –	9	**9,00**
171.–172.	*Karolína*	*Tulingerová*	1	AkademG PH	3 – – – 1 – – –	4	**8,48**
171.–172.	*Kateřina*	*Žáková*	1	SlovanG OL	3 – – – – – 1 –	4	**8,48**
173.	*Marek*	*Murin*	4	GJHroncaBA	3 3 3 – – – – –	9	**8,45**
174.	*Jan Antonín*	*Musil*	0	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**8,34**
175.–180.	*Adam*	*Dobrovič*	3	GTajBanBys	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
175.–180.	*Jan*	*Dopita*	3	GBudějovPH	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
175.–180.	*Ľubica*	*Hladká*	3	GTajBanBys	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
175.–180.	*Leoš*	*Smetana*	3	G Jaroměř	3 3 0 – – – – –	6	**8,00**
175.–180.	*Kateřina*	*Škorvánková*	3	G Rokycany	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
175.–180.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GUBalvanJN	3 3 – – – – – –	6	**8,00**
181.	*Jana*	*Řežábková*	4	PORG PH	3 3 3 – – – – –	9	**7,73**
182.–187.	*Monika*	*Berková*	1	GKepleraPH	3 – – – – – – –	3	**6,79**
182.–187.	*Jan*	*Česnek*	1	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**6,79**
182.–187.	*Vít*	*Gaďurek*	1	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**6,79**
182.–187.	*Šimon*	*Hutař*	1	PORG PH	3 – – – – – – 0	3	**6,79**
182.–187.	*Radim*	*Novotný*	1	GMikul23PL	3 – – – – – – –	3	**6,79**
182.–187.	*Kateřina*	*Šauerová*	1	GPSJazykHK	3 – – – – – – –	3	**6,79**
188.	*Adam*	*Španěl*	4		3 3 – – – – – –	6	**6,00**
189.	*Jana*	*Řičicová*	3	GCoubTábor	3 – – – – – 1 0	4	**5,53**
190.	*Matúš*	*Varhaník*	2	G Bytča	3 – – – – – – 0	3	**5,27**
191.	*Jan*	*Dittrich*	4	GJarošeBO	3 3 – – – – – –	6	**5,24**
192.	*Marie*	*Freibergová*	3	G Děčín	0 3 – – – – – –	3	**4,23**
193.	*Klára*	*Stefanová*	4	GBNěmcovHK	– 3 – – – – – –	3	**3,00**
194.	*Jakub*	*Ševčík*	4	GKukučPopr	3 – – – – – – –	3	**2,55**
195.	*Filip*	*Pastierovič*	3	G ĽŠtúraZV	0 1 – – – – – –	1	**1,47**

3. podzimní série – Úlohy na šachovnici

Výsledková listina

1.–2.	*Filip*	*Bialas*	3	GOpatovPH	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–2.	*Pavel*	*Turek*	3	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 5	25	**25,00**
3.	*Samuel*	*Krajči*	1	GAlejKošic	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**24,27**
4.	*Lenka*	*Kopfová*	1	MendelG OP	– – 3 5 5 5 5 –	23	**24,04**
5.	*Slavomír*	*Hanzely*	4	GRaymanaPV	– – – 5 5 5 5 4	24	**24,00**
6.	*Jan*	*Petr*	3	GKepleraPH	3 – 3 5 5 5 5 –	23 + i	**23,82**
7.	*Pavel*	*Hudec*	2	GJarkovPH	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**23,74**
8.	*Petr*	*Gebauer*	2	G Mělník	3 3 – 5 5 5 5 –	23	**23,72**
9.	*Richard*	*Hladík*	3	GaOA MarLáz	3 3 3 5 5 5 5 –	23 + i	**23,70**
10.–12.	*Ondřej*	*Motlíček*	3	G Šumperk	3 3 3 5 5 5 5 3	23	**23,63**
10.–12.	*Jáchym*	*Solecký*	3	PORG PH	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**23,63**
10.–12.	*Václav*	*Volhejn*	3	GKepleraPH	3 3 3 1 5 5 5 5	23	**23,63**
13.	*Danil*	*Koževnikov*	2	GKepleraPH	3 – – 1 5 5 5 5	23	**23,61**
14.	*Václav*	*Steinhauser*	2	G Dačice	3 3 0 4 5 5 5 4	23	**23,31**
15.	*Veronika*	*Hladíková*	3	GMikul23PL	3 – 3 5 5 5 5 –	23	**23,26**
16.	*Tomáš*	*Domes*	3	MendelG OP	3 3 3 5 5 5 5 –	23	**23,24**
17.	*Radek*	*Olšák*	1	GMensaPH	3 3 – – 5 5 5 –	21 + i	**23,23**
18.	*Filip*	*Čermák*	2	MendelG OP	3 2 3 5 5 5 – –	21	**22,77**
19.	*Tomáš*	*Konečný*	3	GJirsíkaČB	3 – 3 5 5 5 5 –	23	**22,69**
20.	*Ondřej*	*Krabec*	1	G KomHavíř	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
21.	*Marian*	*Poljak*	4	GJŠkodyPŘ	3 – 3 5 5 5 5 –	23 + i	**22,31**
22.	*Lucien*	*Šíma*	4	PORG PH	3 – 3 5 5 5 5 –	23	**22,29**
23.	*František*	*Couf*	3	EKO GPraha	3 – 3 5 5 2 5 5	23 + i	**22,24**
24.–27.	*Šimon*	*Chvátil*	1	GBNěmcovHK	3 2 3 3 5 0 4 –	18	**21,88**
24.–27.	*Lucie*	*Kundratová*	1	G TGM Zlín	3 3 3 1 – 5 4 –	18	**21,88**
24.–27.	*Jana*	*Pallová*	1		3 3 3 – 5 4 – –	18	**21,88**
24.–27.	*Minh Duc*	*Pham*	1	NPorg	1 3 3 2 5 5 – –	18	**21,88**
28.	*Jan*	*Šorm*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 5 5 5 –	23 + i	**21,67**
29.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	0	GJHroncaBA	3 – 3 3 5 2 – –	16	**21,64**
30.	*Michal*	*Töpfer*	3	GJPekařeMB	3 2 3 5 5 5 – –	21	**21,59**
31.	*Vojtěch*	*Lengál*	2	GZborovPH	3 3 3 5 5 1 – –	19	**21,52**
32.–33.	*Matouš*	*Trnka*	3	GJarošeBO	3 3 – 5 5 4 3 –	20	**21,41**
32.–33.	*Daniele*	*Venier*	3	LSciARoiti	3 3 3 4 – 5 5 3	20	**21,41**
34.–35.	*Jakub*	*Domes*	1	MendelG OP	3 – 3 3 5 – – 3	17	**21,30**
34.–35.	*Timur*	*Sibgatullin*	1	PČGKarVary	3 3 3 2 0 1 5 3	17	**21,30**
36.	*Adam*	*Španěl*	4		3 2 3 – 5 5 5 –	21 + i	**21,27**
37.	*Daniel*	*Pišťák*	4	GZborovPH	3 – – 5 5 5 5 –	23	**20,73**
38.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 – 3 – 5 5 – –	16	**20,70**
39.–41.	*Matěj*	*Doležálek*	1	G Humpolec	3 – 3 – – 5 5 –	16	**20,67**

39.–41.	*Pavel*	*Havlín*	1	NPorg	3 2 3 3 – 5 – –	16	**20,67**
39.–41.	*Dominika*	*Mokroszová*	1	G FrýdČTěš	3 2 3 3 5 1 1 –	16	**20,67**
42.	*Jakub*	*Löwit*	4	GČeskoliPH	3 2 3 5 5 5 5 –	23	**20,42**
43.	*Ondřej*	*Svoboda*	3	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,22**
44.–46.	*Alexandr*	*Jankov*	2	MatičníGOS	3 – 0 3 5 1 3 3	17	**20,12**
44.–46.	*Petr*	*Ježek*	2	GBNěmcovHK	3 3 3 – 5 1 – 3	17	**20,12**
44.–46.	*Matúš*	*Komora*	2	GLettMart	3 2 3 5 4 2 – 0	17	**20,12**
47.	*Daniel*	*Kopf*	4	SlezkéG OP	3 – 3 5 5 – 5 –	21	**19,97**
48.	*Adéla*	*Kostelecká*	4	GLesníZlín	3 2 – 5 5 3 5 –	21	**19,91**
49.	*Alžběta*	*Neubauerová*	2	GNadKavaPH	3 2 3 4 – 5 – –	17	**19,90**
50.	*David*	*Neugebauer*	3	SlezkéG OP	3 3 3 3 5 2 4 –	18	**19,83**
51.	*Ondřej*	*Dušek*	2	PORG PH	3 3 3 1 5 2 – –	16	**19,37**
52.–54.	*Daniel*	*Borák*	1	GŠpitálsPH	0 – 3 – 5 1 2 3	14	**19,28**
52.–54.	*Viktória*	*Brezinová*	1	GAlejKošic	3 3 3 5 – – – –	14	**19,28**
52.–54.	*Matěj*	*Kraft*	1	GMikul23PL	3 2 3 2 4 – 1 –	14	**19,28**
55.	*Kateřina*	*Nová*	3	G Vimperk	3 – 3 4 5 4 – –	19	**19,14**
56.	*Veronika*	*Roubínová*	2	G Kadaň	3 2 3 2 5 – – –	15 + *i*	**18,80**
57.	*Vojtěch*	*Lanz*	2	GZborovPH	3 3 3 3 5 3 – –	17	**18,66**
58.–61.	*Ondřej*	*Buček*	2	GJarošeBO	3 3 3 – 5 1 – –	15	**18,59**
58.–61.	*Marie*	*Dohnalová*	3	GNadKavaPH	3 3 3 4 – 5 – –	18	**18,59**
58.–61.	*David*	*Królikowski*	2	G Karviná	3 2 3 2 5 2 0 –	15	**18,59**
58.–61.	*Anna*	*Šírová*	2	GJilemnice	3 – 3 3 5 – 1 –	15	**18,59**
62.	*Marco*	*Souza de Joode*	0		3 3 3 2 – – – –	11 + *i*	**18,45**
63.	*Hedvika*	*Ranošová*	2	GBudějovPH	3 3 0 5 5 – – –	16	**18,27**
64.	*Jaromír*	*Mielec*	3	GVolgogrOS	3 2 3 5 5 4 – –	20	**18,25**
65.	*Filip*	*Chudoba*	2	PORG PH	3 2 3 2 5 – – –	15	**18,18**
66.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	2	GZborovPH	3 2 3 3 5 2 1 –	16	**18,15**
67.	*Kateřina*	*Charvátová*	1	GBNěmcovHK	3 2 3 3 0 1 1 0	12	**17,70**
68.	*Vít*	*Kalisz*	4	FSG Pirna	3 3 3 3 4 5 4 –	19	**17,28**
69.	*Lenka*	*Vincenová*	2	GTomkovaOL	3 3 0 2 4 – 1 –	13 + *i*	**17,14**
70.–72.	*Jáchym*	*Bareš*	2	GTomkovaOL	3 1 3 3 – – 3 –	13	**16,90**
70.–72.	*Tomáš*	*Čelko*	2	GPBystrica	3 – 3 0 4 – 3 –	13	**16,90**
70.–72.	*Vendula*	*Kuchyňová*	2	GMLerchaBO	3 2 3 – 5 – – –	13	**16,90**
73.–76.	*Ondřej*	*Bursa*	1	GTNovákBO	3 2 3 3 – – – –	11	**16,83**
73.–76.	*Martina*	*Kalašová*	1	GJHroncaBA	3 1 3 3 – – 1 –	11	**16,83**
73.–76.	*Josef*	*Král*	1	MendelG OP	3 3 3 2 – – 0 –	11	**16,83**
73.–76.	*Kristýna*	*Lhoťanová*	1	G RožnRadh	3 2 3 2 1 1 – 0	11	**16,83**
77.	*Denisa*	*Chytilová*	2	GJŠkodyPŘ	1 2 0 2 – 5 – 3	13	**16,23**
78.	*Tomáš*	*Drobil*	1	G Dačice	3 2 3 2 – – – –	10	**15,89**
79.	*Marek*	*Pospíšil*	3	GJatečníÚL	3 2 3 3 – 2 1 –	13 + *i*	**15,68**
80.	*Martin*	*Pašen*	3	GRaymanaPV	3 2 3 – – 1 4 –	13	**15,43**
81.	*Kamila*	*Kyzlíková*	2	GZborovPH	3 2 3 3 0 1 – –	12	**15,23**
82.	*Aleš*	*Krčil*	3	G Humpolec	3 3 3 4 – – 1 –	14	**15,13**
83.–85.	*Vojtech*	*Filipi*	1	GDašickáPA	3 2 3 0 – – 1 –	9	**14,89**
83.–85.	*Martin*	*Simet*	1	GMikul23PL	3 0 3 – 1 1 1 –	9	**14,89**
83.–85.	*Martin*	*Zimen*	1	GJMasar JI	– 3 3 3 – – – –	9	**14,89**
86.	*Zuzana*	*Tréglová*	3	G Žatec	3 3 0 1 4 – 1 –	12 – *i*	**14,20**
87.	*Dominika*	*Zumrová*	2	SPŠ PansPH	3 2 3 – – 1 1 –	10	**14,05**
88.	*Zuzana*	*Šraierová*	1	GČeskoliPH	3 0 3 2 – – – 0	8	**13,81**
89.	*Marek*	*Malý*	3	G Neratov	3 2 3 4 – – – –	12	**13,58**
90.–91.	*Vojtěch*	*Jílek*	3	VOŠKutHora	3 1 3 – 4 – – –	11	**13,47**
90.–91.	*Dan*	*Raffl*	3	GVoděraPH	3 1 3 3 1 – – –	11	**13,47**

92.–93.	*Anna*	*Musilová*	0	PORG PH	3 – 3 – – – – –	6	**13,03**
92.–93.	*Jakub*	*Ucháč*	0	ZŠVranéNVl	3 2 0 – – 1 – –	6	**13,03**
94.–95.	*Nikola*	*Kalábová*	2	FSG Pirna	3 – 3 2 – 1 – –	9	**13,00**
94.–95.	*Martin*	*Spišák*	2	GAlejKošic	3 2 0 – – – 4 –	9	**13,00**
96.	*Kristína*	*Szabová*	2	GVarŽilina	3 – 3 3 – – – –	9	**12,69**
97.–103.	*Michal*	*Chudoba*	1	GLitoměřPH	3 1 3 – – – – –	7	**12,64**
97.–103.	*Duc Long*	*Hoang*	1	GMikul23PL	3 0 3 – 0 – 1 –	7	**12,64**
97.–103.	*Eleonora*	*Krůtová*	1	GJarošeBO	3 1 3 – – – – –	7	**12,64**
97.–103.	*Ondřej*	*Meduna*	1	GMikul23PL	3 1 3 – – – – –	7	**12,64**
97.–103.	*Anna*	*Mírková*	1	G LPika PL	1 1 3 2 – – – 0	7	**12,64**
97.–103.	*David*	*Šnajdr*	1	GMikul23PL	3 1 3 – 0 0 0 0	7	**12,64**
97.–103.	*Kateřina*	*Žáková*	1	SlovanG OL	3 – 3 – – – 1 –	7	**12,64**
104.	*Jiří*	*Češka*	3	CMGProstěj	3 2 3 – – 2 – –	10	**12,45**
105.	*Jaroslav*	*Paidar*	2	SPŠMasarLI	3 3 3 – – – 0 –	9	**12,23**
106.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	3 3 – – – – – –	6	**12,09**
107.	*Andrej*	*Horník*	2	GAnMeTr	3 – 3 2 – – – –	8	**11,89**
108.	*Filip*	*Matějka*	2	GZborovPH	3 2 3 – – – – –	8	**11,84**
109.	*Barbora*	*Lišková*	3	GJPekařeMB	3 – 3 3 – – – –	9	**11,39**
110.–112.	*Alexander*	*Csizmár*	1	GMikul23PL	3 0 3 – 0 – – –	6	**11,38**
110.–112.	*Pavel*	*Čácha*	1	GMikul23PL	3 0 3 – – – – –	6	**11,38**
110.–112.	*Zdeněk*	*Vostřel*	1		3 – 0 – – 2 1 –	6	**11,38**
113.–115.	*Adéla*	*Seidelmannová*	2	VOŠRychnovKn	3 0 3 1 – – – 0	7	**10,72**
113.–115.	*Martina*	*Šmehylová*	2	GHlinŽilina	3 – 3 – 0 – 1 –	7	**10,72**
113.–115.	*Krystyna*	*Waniová*	2	G HavlČTěš	3 1 3 – – – – –	7	**10,72**
116.	*Barbora*	*Mouleová*	2	G Plasy	3 – 3 – – – 1 –	7	**10,45**
117.	*Samuel*	*Hrubý*	3	GFraŽilina	3 2 3 – – – – –	8	**10,30**
118.	*Kateřina*	*Pařízková*	1	MatičníGOS	3 2 – – – – – –	5	**10,00**
119.	*Matej*	*Kvorka*	2	GŠkolDubni	3 0 3 – – – – –	6	**9,48**
120.–121.	*Jan*	*Klásek*	3	SlovanG OL	3 1 0 2 – 1 0 –	7	**9,17**
120.–121.	*Jana*	*Menšíková*	3		3 – 3 – – – 1 –	7	**9,17**
122.–123.	*Vít*	*Gaďurek*	1	PORG PH	3 – 0 – 1 – – –	4	**8,48**
122.–123.	*Alžběta*	*Manová*	1	G UherBrod	– 2 – 2 – – – –	4	**8,48**
124.	*Jan Antonín*	*Musil*	0	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**8,34**
125.–128.	*Michael*	*Borák*	3	GKepleraPH	3 – 3 – – – – –	6	**8,00**
125.–128.	*Jan*	*Hrůza*	3	G Kadaň	3 – 3 – – – – –	6	**8,00**
125.–128.	*Michaela*	*Macáková*	4	GOhradníPH	3 2 3 – – – – –	8	**8,00**
125.–128.	*Valerie*	*Skopalová*	4	G VysMýto	3 2 3 – – – – –	8	**8,00**
129.	*Lucie*	*Hronová*	3	GJarošeBO	3 1 0 2 – – – –	6	**7,38**
130.	*Natálie*	*Mikolajová*	4	G HavlBrod	3 – 0 2 – – 1 1	7	**7,00**
131.–139.	*Magdaléna*	*Bártová*	1	GDašickáPA	3 – – – – – – –	3	**6,79**
131.–139.	*Jan*	*Česnek*	1	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**6,79**
131.–139.	*Erik*	*Kočandrle*	1	GMikul23PL	3 0 0 – – – – –	3	**6,79**
131.–139.	*Tereza*	*Lukášová*	1	GMikul23PL	3 – 0 – – – – –	3	**6,79**
131.–139.	*Filip*	*Müller*	1	GMikul23PL	3 – 0 – – – – –	3	**6,79**
131.–139.	*Filip*	*Oplt*	3	GBudějovPH	3 2 0 – – – – –	5	**6,79**
131.–139.	*Anna*	*Šebestíková*	1	GCON ČesBuď	3 – – – – – – –	3	**6,79**
131.–139.	*Samuel*	*Štrunc*	1	GMikul23PL	3 – 0 – – – – –	3	**6,79**
131.–139.	*Linh Giang*	*Tran*	1	GMikul23PL	3 – – – – – – –	3	**6,79**
140.–141.	*David*	*Krajíček*	2	BG Ostrava	3 – 0 – – – – –	3	**5,27**
140.–141.	*Jakub*	*Zápotocký*	2	GOpatovPH	3 – 0 – – – – –	3	**5,27**
142.	*Jan*	*Dittrich*	4	GJarošeBO	3 – 3 – – – – –	6	**5,24**
143.–144.	*Filip*	*Strakoš*	3	G TGM Zlín	3 – 0 – – – – –	3	**4,23**

143.–144.	*Kateřina*	*Škorvánková*	3	G Rokycany	3 – – – – – – –	3	**4,23**
145.	*Hana*	*Jirovská*	2	NPorg	– – 1 – – – 1 –	2	**3,65**
146.	*Filip*	*Pastierovič*	3	G ĽŠtúraZV	– – – 1 0 1 – –	2	**2,88**
147.	*Denisa*	*Jandová*	1	GMikul23PL	– 1 – – – – – –	1	**2,67**
148.	*Kateřina*	*Vaňková*	4	GJarošeBO	1 – 0 – – – – –	1	**1,00**
149.–152.	*Vojtěch*	*Kantor*	0	GNerudCheb	0 0 0 – 0 – – –	0	**0,00**
149.–152.	*Vladimír*	*Lukačko*	2	GVarŽilina	– – 0 – – – – –	0	**0,00**
149.–152.	*Aneta*	*Němcová*	2	GBoskovice	– – 0 – – – – 0	0	**0,00**
149.–152.	*Evžen*	*Wybitul*	2		– – 0 – – – – –	0	**0,00**

1. seriálová série – Do nekonečna a ještě dál

Výsledková listina

1.–2.	*Filip*	*Bialas*	3	GOpatovPH	5 5 5	$15+i$	**15,00**
1.–2.	*Pavel*	*Turek*	3	GTomkovaOL	5 5 5	$15+i$	**15,00**
3.	*Danil*	*Koževnikov*	2	GKepleraPH	5 5 4	$14+i$	**14,50**
4.	*Radek*	*Olšák*	1	GMensaPH	5 5 0	10	**12,27**
5.	*Petr*	*Gebauer*	2	G Mělník	5 5 –	$10+i$	**11,65**
6.	*Lenka*	*Kopfová*	1	MendelG OP	4 5 –	$9+i$	**11,58**
7.	*Richard*	*Hladík*	3	GaOA MarLáz	5 5 –	$10+i$	**11,19**
8.	*Jáchym*	*Solecký*	3	PORG PH	4 5 –	$9+i$	**10,60**
9.	*Hedvika*	*Ranošová*	2	GBudějovPH	5 3 –	8	**9,53**
10.	*Lucien*	*Šíma*	4	PORG PH	5 5 –	$10+i$	**9,13**
11.–12.	*Matěj*	*Doležálek*	1	G Humpolec	5 – –	5	**8,51**
11.–12.	*Jakub*	*Domes*	1	MendelG OP	5 – –	5	**8,51**
13.	*Filip*	*Čermák*	2	MendelG OP	5 1 –	6	**8,40**
14.	*Marian*	*Poljak*	4	GJŠkodyPŘ	5 5 –	10	**8,32**
15.	*Jakub*	*Löwit*	4	GČeskoliPH	5 5 1	$11+i$	**8,26**
16.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	2	GZborovPH	1 5 –	$6+i$	**7,75**
17.	*Slavomír*	*Hanzely*	4	GRaymanaPV	5 2 0	7	**7,00**
18.	*Daniel*	*Kopf*	4	SlezkéG OP	5 3 –	8	**6,96**
19.	*Pavel*	*Hudec*	2	GJarkovPH	5 – –	5	**6,72**
20.	*Václav*	*Volhejn*	3	GKepleraPH	– 5 –	$5+i$	**6,69**
21.	*Václav*	*Steinhauser*	2	G Dačice	1 5 0	6	**6,66**
22.	*Tomáš*	*Domes*	3	MendelG OP	5 1 –	6	**6,51**
23.	*Matouš*	*Trnka*	3	GJarošeBO	5 – –	5	**6,40**
24.	*Tomáš*	*Konečný*	3	GJirsíkaČB	– 5 –	$5+i$	**4,74**
25.	*Ondřej*	*Krabec*	1	G KomHavíř	– 2 –	2	**4,43**
26.	*Denisa*	*Chytilová*	2	GJŠkodyPŘ	2 – –	2	**3,14**
27.	*Daniel*	*Pišťák*	4	GZborovPH	5 – –	5	**2,67**
28.–30.	*Viktória*	*Brezinová*	1	GAlejKošic	0 1 –	1	**2,51**
28.–30.	*Kateřina*	*Charvátová*	1	GBNěmcovHK	– 1 –	1	**2,51**
28.–30.	*Lucie*	*Kundratová*	1	G TGM Zlín	– 1 –	1	**2,51**
31.	*Jaromír*	*Mielec*	3	GVolgogrOS	3 – –	3	**2,17**
32.	*Alexandr*	*Jankov*	2	MatičníGOS	– 1 –	1	**1,85**
33.–35.	*Ondřej*	*Motlíček*	3	G Šumperk	– 1 0	1	**1,45**
33.–35.	*Filip*	*Pastierovič*	3	G ĽŠtúraZV	0 1 0	1	**1,45**
33.–35.	*Daniele*	*Venier*	3	LSciARoiti	– 1 0	1	**1,45**
36.	*Michal*	*Töpfer*	3	GJPekařeMB	1 – 0	1	**1,19**
37.	*Veronika*	*Hladíková*	3	GMikul23PL	1 0 –	1	**1,15**
38.	*Adéla*	*Kostelecká*	4	GLesníZlín	– 1 –	1	**0,76**
39.–44.	*Marie*	*Dohnalová*	3	GNadKavaPH	– – 0	0	**0,00**
39.–44.	*Vojtech*	*Filipi*	1	GDašickáPA	0 – –	0	**0,00**
39.–44.	*Samuel*	*Krajči*	1	GAlejKošic	0 – –	0	**0,00**
39.–44.	*Aleš*	*Krčil*	3	G Humpolec	0 – –	0	**0,00**
39.–44.	*Kateřina*	*Vaňková*	4	GJarošeBO	0 0 –	0	**0,00**
39.–44.	*Martin*	*Zimen*	1	GJMasar JI	– 0 –	0	**0,00**

Výsledky po 3. podzimní sérii

1.	*Filip*	*Bialas*	3	GOpatovPH	25	25	25	15	**90,00**	540
2.	*Pavel*	*Turek*	3	GTomkovaOL	23	25	25	15	**88,20**	715
3.	*Danil*	*Koževnikov*	2	GKepleraPH	24	25	24	15	**86,93**	320
4.	*Petr*	*Gebauer*	2	G Mělník	24	22	24	12	**80,90**	248
5.	*Lenka*	*Kopfová*	1	MendelG OP	22	23	24	12	**80,51**	240
6.	*Jáchym*	*Solecký*	3	PORG PH	21	25	24	11	**79,86**	80
7.	*Jakub*	*Löwit*	4	GČeskoliPH	25	25	20	8	**78,68**	713
8.	*Richard*	*Hladík*	3	GaOA MarLáz	22	20	24	11	**77,08**	148
9.	*Lucien*	*Šíma*	4	PORG PH	20	25	22	9	**76,16**	253
10.	*Radek*	*Olšák*	1	GMensaPH	18	22	23	12	**75,92**	187
11.	*Pavel*	*Hudec*	2	GJarkovPH	23	22	24	7	**75,43**	229
12.	*Filip*	*Čermák*	2	MendelG OP	20	23	23	8	**74,03**	81
13.	*Václav*	*Steinhauser*	2	G Dačice	20	22	23	7	**71,81**	441
14.	*Ondřej*	*Krabec*	1	G KomHavíř	21	22	22	4	**70,13**	70
15.	*Samuel*	*Krajči*	1	GAlejKošic	23	22	24	0	**69,27**	69
16.	*Tomáš*	*Domes*	3	MendelG OP	20	20	23	7	**68,97**	234
17.	*Marian*	*Poljak*	4	GJŠkodyPŘ	19	19	22	8	**68,89**	356
18.	*Matěj*	*Doležálek*	1	G Humpolec	19	21	21	9	**68,83**	69
19.	*Lucie*	*Kundratová*	1	G TGM Zlín	22	22	22	3	**68,70**	69
20.	*Jakub*	*Domes*	1	MendelG OP	19	19	21	9	**68,37**	68
21.	*Slavomír*	*Hanzely*	4	GRaymanaPV	21	16	24	7	**68,00**	68
22.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	2	GZborovPH	20	22	18	8	**67,91**	292
23.	*František*	*Couf*	3	EKO GPraha	20	25	22	–	**67,62**	605
24.	*Minh Duc*	*Pham*	1	NPorg	22	23	22	–	**67,18**	67
25.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	0	GJHroncaBA	22	23	22	–	**66,92**	67
26.	*Veronika*	*Hladíková*	3	GMikul23PL	21	21	23	1	**66,47**	225
27.	*Ondřej*	*Motlíček*	3	G Šumperk	19	22	24	1	**66,25**	66
28.	*Jan*	*Petr*	3	GKepleraPH	21	21	24	–	**65,86**	66
29.	*Hedvika*	*Ranošová*	2	GBudějovPH	16	22	18	10	**65,60**	272
30.	*Viktória*	*Brezinová*	1	GAlejKošic	21	22	19	3	**64,89**	65
31.	*Tomáš*	*Konečný*	3	GJirsíkaČB	16	21	23	5	**64,55**	360
32.	*Alexandr*	*Jankov*	2	MatičníGOS	17	22	20	2	**61,04**	61
33.	*Jana*	*Pallová*	1		19	20	22	–	**60,96**	61
34.	*Daniele*	*Venier*	3	LSciARoiti	17	21	21	1	**60,10**	60
35.	*Vojtěch*	*Lanz*	2	GZborovPH	20	20	19	–	**59,38**	338
36.	*Daniel*	*Kopf*	4	SlezkéG OP	12	20	20	7	**59,17**	198
37.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	18	21	21	–	**59,15**	167
38.	*Marie*	*Dohnalová*	3	GNadKavaPH	22	19	19	0	**58,82**	233
39.	*Denisa*	*Chytilová*	2	GJŠkodyPŘ	19	20	16	3	**58,78**	167
40.–41.	*Matúš*	*Komora*	2	GLettMart	17	22	20	–	**58,54**	59
40.–41.	*Daniel*	*Borák*	1	GŠpitálsPH	17	22	19	–	**58,54**	59
42.	*Pavel*	*Havlín*	1	NPorg	16	22	21	–	**58,44**	58
43.	*Adéla*	*Kostelecká*	4	GLesníZlín	18	20	20	1	**58,14**	207
44.	*Vojtěch*	*Lengál*	2	GZborovPH	15	22	22	–	**58,09**	58
45.	*Kateřina*	*Nová*	3	G Vimperk	19	19	19	–	**57,68**	271

46.	*Kamila*	*Kyzlíková*	2	GZborovPH	20	21	15	–	–	**56,65**	175
47.	*Martina*	*Kalašová*	1	GJHroncaBA	19	20	17	–	–	**56,31**	56
48.	*Jan*	*Šorm*	4	GJarošeBO	18	17	22	–	–	**56,30**	541
49.	*Vendula*	*Kuchyňová*	2	GMLerchaBO	17	22	17	–	–	**56,14**	56
50.	*Tomáš*	*Čelko*	2	GPBystrica	19	19	17	–	–	**55,64**	56
51.	*Ondřej*	*Buček*	2	GJarošeBO	15	22	19	–	–	**55,16**	55
52.	*Eleonora*	*Krůtová*	1	GJarošeBO	19	23	13	–	–	**54,58**	55
53.	*Jaromír*	*Mielec*	3	GVolgogrOS	17	17	18	–	2	**54,19**	498
54.	*Michal*	*Töpfer*	3	GJPekařeMB	14	17	22	–	1	**53,99**	194
55.	*Daniel*	*Pišťák*	4	GZborovPH	15	16	21	–	3	**53,78**	638
56.	*Matěj*	*Kraft*	1	GMikul23PL	14	21	19	–	–	**53,76**	54
57.	*Veronika*	*Roubínová*	2	G Kadaň	18	17	19	–	–	**53,47**	53
58.	*Petr*	*Ježek*	2	GBNěmcovHK	15	18	20	–	–	**52,94**	53
59.	*Kateřina*	*Charvátová*	1	GBNěmcovHK	15	18	18	–	3	**52,80**	53
60.	*Václav*	*Volhejn*	3	GKepleraPH	22	–	24	–	7	**52,49**	52
61.	*Kristína*	*Szabová*	2	GVarŽilina	20	19	13	–	–	**51,74**	97
62.	*Lenka*	*Vincenová*	2	GTomkovaOL	13	22	17	–	–	**51,66**	52
63.	*Martin*	*Pašen*	3	GRaymanaPV	20	16	15	–	–	**51,62**	52
64.	*Ondřej*	*Dušek*	2	PORG PH	14	18	19	–	–	**51,19**	51
65.	*Alžběta*	*Neubauerová*	2	GNadKavaPH	13	18	20	–	–	**51,17**	99
66.–67.	*Šimon*	*Chvátil*	1	GBNěmcovHK	16	13	22	–	–	**50,41**	50
66.–67.	*Anna*	*Šírová*	2	GJilemnice	14	18	19	–	–	**50,41**	50
68.	*Filip*	*Matějka*	2	GZborovPH	17	21	12	–	–	**50,18**	58
69.	*Ondřej*	*Svoboda*	3	GJarošeBO	10	20	20	–	–	**50,08**	130
70.	*Jaroslav*	*Paidar*	2	SPŠMasarLI	20	17	12	–	–	**48,72**	159
71.	*Ondřej*	*Bursa*	1	GTNovákBO	15	17	17	–	–	**48,55**	49
72.	*Dominika*	*Mokroszová*	1	G FrýdČTěš	13	15	21	–	–	**48,20**	48
73.	*Dominika*	*Zumrová*	2	SPŠ PansPH	16	18	14	–	–	**47,82**	48
74.	*Martin*	*Spišák*	2	GAlejKošic	17	18	13	–	–	**47,67**	48
75.	*Vít*	*Kalisz*	4	FSG Pirna	17	13	17	–	–	**47,43**	233
76.	*Marek*	*Pospíšil*	3	GJatečníÚL	14	17	16	–	–	**47,42**	47
77.	*Tomáš*	*Drobil*	1	G Dačice	11	19	16	–	–	**46,55**	47
78.	*Marco*	*Souza de Joode*	0		11	17	18	–	–	**46,35**	46
79.	*Adam*	*Španěl*	4		18	6	21	–	–	**45,27**	45
80.	*Jáchym*	*Bareš*	2	GTomkovaOL	15	13	17	–	–	**44,95**	45
81.	*David*	*Neugebauer*	3	SlezkéG OP	12	12	20	–	–	**44,73**	45
82.	*Timur*	*Sibgatullin*	1	PČGKarVary	7	16	21	–	–	**43,98**	44
83.	*Aleš*	*Krčil*	3	G Humpolec	13	15	15	–	0	**43,42**	184
84.	*Kristýna*	*Lhoťanová*	1	G RožnRadh	13	14	17	–	–	**43,28**	43
85.	*Matouš*	*Trnka*	3	GJarošeBO	15	–	21	–	6	**43,24**	43
86.	*Zdeněk*	*Vostřel*	1		14	18	11	–	–	**42,89**	43
87.	*Matej*	*Kvorka*	2	GŠkolDubni	16	16	9	–	–	**41,48**	41
88.	*Nikola*	*Kalábová*	2	FSG Pirna	13	15	13	–	–	**41,05**	41
89.	*Michal*	*Chudoba*	1	GLitoměřPH	11	17	13	–	–	**40,85**	41
90.	*Filip*	*Chudoba*	2	PORG PH	9	14	18	–	–	**40,71**	115
91.	*Adéla*	*Seidelmannová*	2	VOŠRychnovKn	12	18	11	–	–	**40,38**	40
92.–93.	*Pavel*	*Čácha*	1	GMikul23PL	14	15	11	–	–	**40,08**	40
92.–93.	*Martin*	*Zimen*	1	GJMasar JI	14	11	15	–	0	**40,08**	40
94.	*David*	*Królikowski*	2	G Karviná	–	21	19	–	–	**39,43**	39
95.	*Jiří*	*Češka*	3	CMGProstěj	13	13	12	–	–	**39,39**	39
96.	*Anna*	*Musilová*	0	PORG PH	13	13	13	–	–	**39,09**	39
97.	*Peter*	*Súkeník*	4	GOkrŽilina	21	18	–	–	–	**39,00**	39
98.	*Tereza*	*Vlčková*	2	GJarošeBO	22	17	–	–	–	**38,42**	38
99.	*Erik*	*Kočandrle*	1	GMikul23PL	11	20	7	–	–	**38,17**	38
100.	*Martin*	*Bakoš*	2	GPBystrica	19	19	–	–	–	**37,76**	38
101.	*Filip*	*Oplt*	3	GBudějovPH	15	15	7	–	–	**37,65**	38
102.	*Adam*	*Doubrava*	0	GMasarykKM	12	13	12	–	–	**37,52**	95

103.	*Andrej*	*Horník*	2	GAnMeTr	14	11	12	–	–	**36,66**	37
104.	*Marek*	*Malý*	3	G Neratov	11	13	14	–	–	**36,65**	139
105.	*Dan*	*Raffl*	3	GVoděraPH	11	11	13	–	–	**36,25**	36
106.	*David*	*Krajíček*	2	BG Ostrava	14	17	5	–	–	**36,22**	36
107.	*Jakub*	*Ucháč*	0	ZŠVranéNVl	13	10	13	–	–	**36,17**	36
108.	*Vojtěch*	*Jílek*	3	VOŠKutHora	10	11	13	–	–	**35,16**	35
109.	*Anna*	*Mírková*	1	G LPika PL	7	15	13	–	–	**34,32**	34
110.	*Monika*	*Machalová*	1	GJHroncaBA	15	19	–	–	–	**34,17**	34
111.	*Barbora*	*Lišková*	3	GJPekařeMB	10	12	11	–	–	**34,14**	34
112.	*Alžběta*	*Manová*	1	G UherBrod	13	13	8	–	–	**33,76**	34
113.	*Alexander*	*Csizmár*	1	GMikul23PL	7	15	11	–	–	**33,06**	33
114.	*Jan*	*Klásek*	3	SlovanG OL	10	13	9	–	–	**32,94**	33
115.	*Šárka*	*Míchalová*	1	G Kralupy	15	18	–	–	–	**32,59**	33
116.	*Kateřina*	*Žáková*	1	SlovanG OL	11	8	13	–	–	**32,50**	33
117.	*Jan*	*Hrůza*	3	G Kadaň	8	16	8	–	–	**32,36**	32
118.	*Samuel*	*Hrubý*	3	GFraŽilina	10	11	10	–	–	**31,99**	32
119.	*Evžen*	*Wybitul*	2		18	14	0	–	–	**31,82**	32
120.	*Josef*	*Král*	1	MendelG OP	–	15	17	–	–	**31,72**	32
121.	*Linh Giang*	*Tran*	1	GMikul23PL	10	15	7	–	–	**31,68**	32
122.	*Valerie*	*Skopalová*	4	G VysMýto	12	11	8	–	–	**31,00**	31
123.	*Filip*	*Müller*	1	GMikul23PL	11	13	7	–	–	**30,81**	31
124.	*John Richard*	*Ritter*	2	G MasNámTŘ	18	13	–	–	–	**30,77**	31
125.	*Zuzana*	*Tréglová*	3	G Žatec	17	13	–	–	–	**30,01**	180
126.	*Tereza*	*Lukášová*	1	GMikul23PL	11	11	7	–	–	**29,55**	30
127.	*Hana*	*Jirovská*	2	NPorg	15	11	4	–	–	**29,42**	29
128.	*Martina*	*Šmehylová*	2	GHlinŽilina	7	12	11	–	–	**29,37**	29
129.	*Vladimír*	*Lukačko*	2	GVarŽilina	14	16	0	–	–	**29,23**	90
130.	*Filip*	*Strakoš*	3	G TGM Zlín	8	16	4	–	–	**28,59**	29
131.	*Anh Minh*	*Tran*	4	GJarošeBO	10	17	–	–	–	**27,27**	27
132.	*Daniel*	*Ridzoň*	2	GKepleraPH	14	13	–	–	–	**27,05**	27
133.	*Krystyna*	*Waniová*	2	G HavlČTěš	7	9	11	–	–	**26,96**	27
134.	*Vít*	*Gaďurek*	1	PORG PH	11	7	8	–	–	**26,65**	27
135.	*Antonín*	*Štrpka*	1	G Šumperk	11	15	–	–	–	**26,27**	26
136.	*Zuzana*	*Urbanová*	3	GUBalvanJN	18	8	–	–	–	**26,15**	26
137.	*Jana*	*Menšíková*	3		4	12	9	–	–	**25,85**	26
138.	*Kateřina*	*Čížková*	2	G Rokycany	16	9	–	–	–	**25,48**	25
139.	*Jakub*	*Zápotocký*	2	GOpatovPH	9	11	5	–	–	**25,47**	25
140.	*Denisa*	*Jandová*	1	GMikul23PL	11	11	3	–	–	**25,43**	25
141.	*Lubomír*	*Smrček*	1		11	14	–	–	–	**25,19**	25
142.	*Marek*	*Murin*	4	GJHroncaBA	16	8	–	–	–	**24,91**	65
143.	*Matěj*	*Coufal*	3	G HavlBrod	11	13	–	–	–	**24,86**	25
144.	*Barbora*	*Mouleová*	2	G Plasy	5	9	10	–	–	**24,74**	65
145.	*Jana*	*Řežábková*	4	PORG PH	17	8	–	–	–	**24,52**	133
146.	*Adam*	*Dobrovič*	3	GTajBanBys	16	8	–	–	–	**24,36**	24
147.	*Ondřej*	*Meduna*	1	GMikul23PL	–	11	13	–	–	**24,02**	24
148.	*Monika*	*Suchá*	1	GMikul23PL	11	11	–	–	–	**22,76**	23
149.	*Andrej*	*Židek*	1	GJKTyla HK	7	16	–	–	–	**22,68**	23
150.	*Petr*	*Zahradník*	1	GŠmejkalÚL	10	13	–	–	–	**22,64**	23
151.	*Peter*	*Macko*	4	GJHroncaBA	13	9	–	–	–	**22,46**	22
152.	*Matthew*	*Dupraz*	1	NPorg	–	22	–	–	–	**22,43**	22
153.	*Zuzana*	*Svobodová*	4	G FrýdlNOs	4	18	–	–	–	**22,13**	428
154.	*Jan*	*Česnek*	1	GJarošeBO	8	7	7	–	–	**22,06**	22
155.	*Vojtěch*	*Janků*	4	CMGPgBrno	13	9	–	–	–	**22,00**	22
156.	*Tomáš*	*Hampl*	3	GDukelBR	10	11	–	–	–	**21,69**	22
157.	*Ľubica*	*Hladká*	3	GTajBanBys	13	8	–	–	–	**21,47**	21
158.–159.	*Jakub*	*Čurda*	1	PORG PH	11	10	–	–	–	**21,38**	21
158.–159.	*Kateřina*	*Pařízková*	1	MatičníGOS	11	–	10	–	–	**21,38**	21

160.	*Radek*	*Wágner*	2	GMikul23PL	12	9	–	–	–	**21,37**	21
161.	*Matúš*	*Varhaník*	2	G Bytča	15	5	–	–	–	**20,32**	20
162.	*Barbora*	*Hálková*	2	SPŠStav LI	9	11	–	–	–	**20,20**	20
163.	*David*	*Šnajdr*	1	GMikul23PL	7	–	13	–	–	**19,43**	19
164.	*Tomáš*	*Jurčo*	1	G Prachati	19	–	–	–	–	**19,28**	19
165.	*Samuel*	*Baran*	2	GRaymanaPV	–	19	–	–	–	**18,59**	19
166.	*Nodari*	*Gogatishvili*	2	GZborovPH	5	14	–	–	–	**18,50**	89
167.	*Radim*	*Novotný*	1	GMikul23PL	11	7	–	–	–	**18,17**	18
168.–169.	*Klára*	*Cihlářová*	2	G Klatovy	–	18	–	–	–	**17,77**	18
168.–169.	*Martin*	*Strnad*	2	G Dobříš	–	18	–	–	–	**17,77**	18
170.	*Soňa*	*Burešová*	2	GHeyrovPH	17	–	–	–	–	**16,90**	17
171.	*David*	*Vojáček*	1	GSOŠ FrMýs	17	–	–	–	–	**16,83**	17
172.	*Magdaléna*	*Bártová*	1	GDašickáPA	–	10	7	–	–	**16,79**	17
173.	*Jan Antonín*	*Musil*	0	PORG PH	–	8	8	–	–	**16,68**	17
174.	*Kateřina*	*Škorvánková*	3	G Rokycany	4	8	4	–	–	**16,46**	16
175.	*David*	*Žáček*	3	GZborovPH	16	–	–	–	–	**16,36**	16
176.–177.	*Jan*	*Dopita*	3	GBudějovPH	8	8	–	–	–	**16,00**	16
176.–177.	*Leoš*	*Smetana*	3	G Jaroměř	8	8	–	–	–	**16,00**	16
178.–181.	*Anna*	*Jandová*	1	G Leg PB	–	16	–	–	–	**15,89**	16
178.–181.	*Jaroslav*	*Konečný*	1	G Čelákov	–	16	–	–	–	**15,89**	16
178.–181.	*Jaroslav*	*Kortus*	1	GMikul23PL	–	16	–	–	–	**15,89**	16
178.–181.	*Radovan*	*Picek*	1	GBalbínaHK	16	–	–	–	–	**15,89**	16
182.	*Marie*	*Freibergová*	3	G Děčín	11	4	–	–	–	**15,62**	16
183.–184.	*Jan*	*Lindauer*	2	PČGKarVary	15	–	–	–	–	**15,05**	15
183.–184.	*Pavel*	*Nedělník*	2	GJarošeBO	15	–	–	–	–	**15,05**	15
185.	*Jan*	*Sedlák*	4	GOPavla PH	15	–	–	–	–	**15,00**	15
186.–188.	*Vojtech*	*Filipi*	1	GDašickáPA	–	–	15	–	0	**14,89**	15
186.–188.	*Michal*	*Poft*	1	G Teplice	–	15	–	–	–	**14,89**	15
186.–188.	*Martin*	*Simet*	1	GMikul23PL	–	–	15	–	–	**14,89**	15
189.	*Marián*	*Okál*	2	SŠNvh	15	–	–	–	–	**14,87**	41
190.	*Anh*	*Le Hoang*	4	GJarošeBO	4	11	–	–	–	**14,54**	205
191.	*Zuzana*	*Tréglová*	3	G Žatec	–	–	14	–	–	**14,20**	14
192.–193.	*Veronika*	*Blovská*	2	GMikul23PL	14	–	–	–	–	**14,05**	14
192.–193.	*Petra*	*Šnoblová*	2	GJatečníÚL	–	14	–	–	–	**14,05**	14
194.	*Henrieta*	*Micheľová*	4	GAlejKošic	14	–	–	–	–	**14,00**	14
195.–196.	*Zuzana*	*Šraierová*	1	GČeskoliPH	–	–	14	–	–	**13,81**	14
195.–196.	*Kamila*	*Ženatá*	1	GNeumannŽR	–	14	–	–	–	**13,81**	14
197.–198.	*Šimon*	*Hutař*	1	PORG PH	7	7	–	–	–	**13,58**	14
197.–198.	*Kateřina*	*Šauerová*	1	GPSJazykHK	7	7	–	–	–	**13,58**	14
199.	*Dominik*	*Krasula*	3	G Krnov	14	–	–	–	–	**13,57**	469
200.	*Johana*	*Dvořáková*	1	G Trutnov	–	14	–	–	–	**13,51**	14
201.	*Jan*	*Šuta*	3	GJŠkodyPŘ	13	–	–	–	–	**13,47**	13
202.	*Jan*	*Dittrich*	4	GJarošeBO	3	5	5	–	–	**13,05**	91
203.	*Martin*	*Hubata*	0	GMikul23PL	–	13	–	–	–	**13,03**	13
204.	*Ákos*	*Záhorský*	2	G VJM Šahy	13	–	–	–	–	**13,00**	13
205.–206.	*Duc Long*	*Hoang*	1	GMikul23PL	–	–	13	–	–	**12,64**	13
205.–206.	*Karel*	*Müller*	1	GMikul23PL	–	13	–	–	–	**12,64**	13
207.	*Filip*	*Pastierovič*	3	G ĽŠtúraZV	7	1	3	–	1	**12,59**	13
208.	*Matěj*	*Žídek*	4	G FrýdlNOs	12	–	–	–	–	**12,00**	12
209.	*Štefan*	*Hollán*	2	G Bytča	12	–	–	–	–	**11,54**	63
210.	*Oldřich*	*Kos*	3	GKepleraPH	–	11	–	–	–	**11,39**	11
211.–218.	*Vítek*	*Dragoun*	1	GMikul23PL	11	–	–	–	–	**11,38**	11
211.–218.	*Adam*	*Hlas*	1	GMikul23PL	11	–	–	–	–	**11,38**	11
211.–218.	*Klára*	*Holešovská*	1	GJNerudyPH	11	–	–	–	–	**11,38**	11
211.–218.	*Dominika*	*Jurčová*	1	G Prachati	11	–	–	–	–	**11,38**	11
211.–218.	*Jakub*	*Kropš*	1		11	–	–	–	–	**11,38**	11
211.–218.	*Tomáš*	*Pishovaký*	1	RGZS Prost	11	–	–	–	–	**11,38**	11

211.–218.	*Magdaléna*	*Sejkorová*	1	GUKlafárŽR	–	11	–	–	–	**11,38**	11
211.–218.	*Veronika*	*Straková*	1	G Benešov	11	–	–	–	–	**11,38**	11
219.	*Samuel*	*Karaba*	2	SŠNvh	11	–	–	–	–	**11,31**	95
220.	*Kateřina*	*Vaňková*	4	GJarošeBO	–	10	1	–	0	**11,00**	11
221.	*Karolína*	*Slaběňáková*	0	ZŠ ValKlob	–	10	–	–	–	**10,11**	10
222.–223.	*Přemysl*	*Kopečný*	4	ČRG ČesBuď	1	9	–	–	–	**10,00**	10
222.–223.	*Hana*	*Kučerová*	1	GKřenováBO	10	–	–	–	–	**10,00**	10
224.–225.	*Šárka*	*Altmanová*	2	G Rokycany	9	–	–	–	–	**9,48**	9
224.–225.	*Aneta*	*Němcová*	2	GBoskovice	–	9	0	–	–	**9,48**	9
226.	*Jakub*	*Novotný*	3	GTNovákBO	9	–	–	–	–	**9,17**	9
227.–228.	*Michaela*	*Brabcová*	4	G Jírov ČB	9	–	–	–	–	**9,00**	9
227.–228.	*Adam*	*Kutnar*	4	NPorg	9	–	–	–	–	**9,00**	9
229.–232.	*Ha Mi*	*Dao*	1	GŠmejkalÚL	8	–	–	–	–	**8,48**	8
229.–232.	*Vadim*	*Kablukov*	1	GBNěmcovHK	8	–	–	–	–	**8,48**	8
229.–232.	*Veronika*	*Řehulková*	1	MendelG OP	8	–	–	–	–	**8,48**	8
229.–232.	*Karolína*	*Tulingerová*	1	AkademG PH	–	8	–	–	–	**8,48**	8
233.	*Jana*	*Řičicová*	3	GCoubTábor	3	6	–	–	–	**8,41**	8
234.	*Tomáš*	*Flídr*	0	GMasarykKM	8	–	–	–	–	**8,34**	8
235.	*Marie*	*Kaiserová*	2	CírkGPlzeň	8	–	–	–	–	**8,17**	8
236.–237.	*Michael*	*Borák*	3	GKepleraPH	–	–	8	–	–	**8,00**	8
236.–237.	*Michaela*	*Macáková*	4	GOhradníPH	–	–	8	–	–	**8,00**	8
238.	*Jakub*	*Ševčík*	4	GKukučPopr	5	3	–	–	–	**7,77**	89
239.	*Lucie*	*Hronová*	3	GJarošeBO	–	–	7	–	–	**7,38**	91
240.–241.	*Lukáš*	*Belza*	4		7	–	–	–	–	**7,00**	7
240.–241.	*Natálie*	*Mikolajová*	4	G HavlBrod	–	–	7	–	–	**7,00**	7
242.–245.	*Monika*	*Berková*	1	GKepleraPH	–	7	–	–	–	**6,79**	7
242.–245.	*Tereza*	*Prokopová*	1	GJHroncaBA	7	–	–	–	–	**6,79**	7
242.–245.	*Anna*	*Šebestíková*	1	GCON ČesBuď	–	–	7	–	–	**6,79**	7
242.–245.	*Samuel*	*Štrunc*	1	GMikul23PL	–	–	7	–	–	**6,79**	7
246.	*Anežka*	*Soukupová*	2	SPŠchemBrno	7	–	–	–	–	**6,59**	37
247.–249.	*Agáta*	*Brozová*	4		6	–	–	–	–	**6,00**	6
247.–249.	*Haštal*	*Hapka*	4	GBudějovPH	6	–	–	–	–	**6,00**	6
247.–249.	*Lukáš*	*Vik*	4		6	–	–	–	–	**6,00**	6
250.	*Tomáš*	*Faikl*	2	GDašickáPA	5	–	–	–	–	**5,27**	5
251.	*Matěj*	*Šarboch*	3	GKepleraPH	4	–	–	–	–	**4,23**	4
252.	*Eva*	*Klimentová*	3	GJarošeBO	4	–	–	–	–	**4,16**	19
253.	*Kateřina*	*Jakubíková*	4	G Vítkov	4	–	–	–	–	**4,00**	4
254.–256.	*Zsófia*	*Kálosi*	4	GHSelyhoKM	3	–	–	–	–	**3,00**	3
254.–256.	*Michal*	*Porubsky*	4	GCyMeNitra	3	–	–	–	–	**3,00**	3
254.–256.	*Klára*	*Stefanová*	4	GBNěmcovHK	–	3	–	–	–	**3,00**	3
257.	*Veronika*	*Úlovcová*	3	CírkGPlzeň	1	–	–	–	–	**1,47**	1
258.–259.	*Vojtěch*	*Kantor*	0	GNerudCheb	–	–	0	–	–	**0,00**	0
258.–259.	*Oliver*	*Šmakal*	0	BGJirsíkČB	0	–	–	–	–	**0,00**	0

adresa: Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*