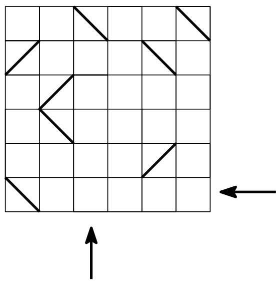
Cestování a bloudění

1. jarní série | Termín odeslání: 8. února 2016

Úloha 1. (3 body)

Hloupý Honza bloudil světem, když tu náhle našel podivnou čtvercovou šachovnici. K několika políčkům byla po úhlopříčce připevněna oboustranná zrcátka. Navíc z boku svítily do šachovnice dva lasery. Opodál se válelo další oboustranné zrcátko a Honza se jej rozhodl na šachovnici umístit podobně jako ostatní tak, aby po připevnění zrcátka první paprsek vycházel z šachovnice v políčku, kterým předtím vycházel druhý, a naopak. Kolika způsoby to mohl udělat?

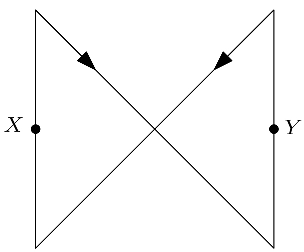


Úloha 2. (3 body)

V Dračím království je patnáct měst. Mezi některými z nich létá přímá obousměrná dračí linka. Z každého města vede alespoň sedm takových linek. Dokažte, že je možné se s jejich pomocí přemístit mezi každými dvěma městy v království.

Úloha 3. (3 body)

Bára a Kuba chodí dokola po trase, která je tvořena dvojicí rovnoběžných stran čtverce a jeho úhlopříčkami (jako na obrázku). Bára začíná uprostřed levé strany čtverce v bodě X a Kuba uprostřed pravé v bodě Y. Bára obejde celou trasu rovnoměrnou chůzí za 2015 vteřin, Kuba za 2016. Oba zároveň vyrazí po trase směrem nahoru a zastaví se za $2015 \cdot 2016$ vteřin. Spočítejte, kolikrát se mezitím na trase potkají.



Úloha 4. (5 bodů)

V bludišti je 2016 místností a k chodeb. Každá chodba spojuje právě dvě místnosti a každá dvojice místností je spojená nejvýše jednou chodbou. Tom do jedné místnosti vhodí Jerryho a do jiné umístí kus sýra. Jerry se snaží dostat k sýru. Pokaždé, když Jerry projde nějakou chodbou, uzamkne Tom chodbu, kterou si sám vybere, a Jerry jí už nikdy nemůže projít. Určete největší k takové, aby se pro jakékoliv bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit Jerrymu v získání sýra.

Úloha 5. (5 bodů)

Labyrint sestává z několika místností spojených chodbami tak, že se z každé místnosti dá dojít do kterékoliv jiné.[1] Během dlouhého pobytu v labyrintu Vašek z nudy napsal do každé místnosti délku nejkratší trasy, která začíná v této místnosti a navštíví všechny ostatní místnosti. Ukažte, že poměr čísel z libovolných dvou místností je maximálně 1,5.

Úloha 6. (5 bodů)

V království jsou čtyři vesnice A, B, C a D, které v tomto pořadí tvoří konvexní čtyřúhelník. Štěpán v poledne vyrazí ze vsi A do vsi C, Filip v jednu hodinu vyrazí ze vsi B do vsi D. Viki prochází všechny obce postupně v pořadí A, B, C, D. V poledne vyjde z A, v jednu projde B, do C dorazí ve stejnou dobu jako Štěpán a do D ve stejnou dobu jako Filip. Viki se v žádné vesnici nezdržuje a vždy hned vyrazí do další. Každý z cestovatelů se pohybuje stálou rychlostí a mezi dvěma vesnicemi jde vždy po přímce. Je možné, aby se Štěpán s Filipem po cestě potkali?

Úloha 7. (5 bodů)

Skupinka organizátorů vyrazila na jarní PraSečí výlet. Po cestě se občas ke skupince nějaký další org přidal nebo se odpojil. Kdo se od skupinky odpojil, už se znova nepřidal. Ve skupince šel vždy alespoň jeden člověk. Ukažte, že existuje množina orgů taková, že dohromady ušli alespoň polovinu cesty a přitom žádní dva z nich spolu nešli zároveň.

Úloha 8. (5 bodů)

David a Honza jedou autem. Neshodli se, kdo bude řídit, a tak si zvolili nesoudělná čísla d a h. David po každých d kilometrech zahne o 90 stupňů doprava a Honza každých h kilometrů zahne o 90 stupňů doleva. Pokud by měli oba zahnout najednou, tak budou pokračovat rovně. Na začátku míří ke svému cíli. Dokažte, že se k němu dostanou nezávisle na jeho vzdálenosti od startu, právě když d a h dávají stejný zbytek po dělení čtyřmi.[2]

[1] Chodby spojují vždy právě dvě místnosti a mohou mít různé délky.

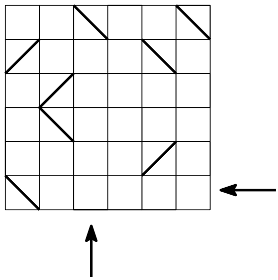
[2] Počáteční vzdálenost do cíle může být i neceločíselná.

Cestování a bloudění

1. jarní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

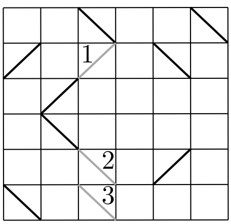
Hloupý Honza bloudil světem, když tu náhle našel podivnou čtvercovou šachovnici. K několika políčkům byla po úhlopříčce připevněna oboustranná zrcátka. Navíc z boku svítily do šachovnice dva lasery. Opodál se válelo další oboustranné zrcátko a Honza se jej rozhodl na šachovnici umístit podobně jako ostatní tak, aby po připevnění zrcátka první paprsek vycházel z šachovnice v políčku, kterým předtím vycházel druhý, a naopak. Kolika způsoby to mohl udělat?



(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:

Nejprve se podíváme, jak paprsky procházejí šachovnicí bez přidání zrcátka. Protože máme k dispozici pouze jedno zrcátko a potřebujeme změnit trasu obou paprsků, musíme zrcátko umístit na pole, kterým procházejí oba paprsky. Taková pole jsou na šachovnici tři a u každého máme dvě možnosti, jak na něj zrcadlo umístit. Když projdeme všech šest možností, tak snadno zjistíme, že na každém ze tří polí existuje právě jedno vhodné natočení zrcátka (zakreslené na obrázku dole), při kterém si paprsky vymění výstupní pole. Opačné natočení zrcátka způsobí, že jeden paprsek bude vycházet tam, kde druhý paprsek vchází. Honza tak má tři způsoby, jak zrcátko na šachovnici umístit.



Poznámky:
Téměř třetina řešitelů si zadání trochu „poupravila“ a zrcátka umísťovala tak, aby jeden paprsek vycházel tam, kde druhý původně vcházel, a nikoli vycházel. Jelikož si touto změnou úlohu nijak nezjednodušili a nalezli totéž rozestavení zrcátek, pouze opačně natočených, žádné body jsem za tuto drobnou nepozornost nestrhávala. Pochvalu zasluhují všichni ti, kteří krom nalezení správného umístění zrcátek také odůvodnili, že více možností již neexistuje. *(Kája Kuchyňová)*

Úloha 2.

V Dračím království je patnáct měst. Mezi některými z nich létá přímá obousměrná dračí linka. Z každého města vede alespoň sedm takových linek. Dokažte, že je možné se s jejich pomocí přemístit mezi každými dvěma městy v království.

(David Hruška)

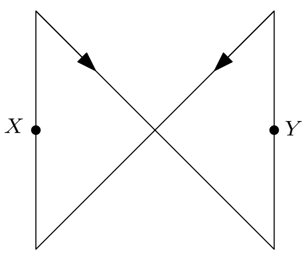
Řešení:
Postupujme sporem. Předpokládejme, že existuje dvojice měst a, b, mezi kterými se nelze s pomocí dračích linek přepravit. Skupinu měst, do kterých se lze dostat z a, označme A (samotné město a do ní také počítáme), skupinu měst B definujeme analogicky. Kdyby nějaké město leželo zároveň v A i B, dalo by se s jeho pomocí zřejmě přepravit mezi a a b, čili žádné takové není. Dále A obsahuje alespoň osm měst – a a dalších alespoň sedm měst. Podobně je na tom B. V obou skupinách dohromady jsme tedy napočítali alespoň šestnáct měst, což je ovšem spor se zadáním. Náš předpoklad vede ke sporu, takže dokazované tvrzení skutečně platí.

Poznámky:
S úlohou nebyly velké problémy, většina řešitelů si s ní poradila na plný počet bodů. Pozor na správné obrácení (negaci) dokazovaného tvrzení při důkazu sporem – někteří řešitelé měli tendenci psát: „Aby tvrzení neplatilo, *stačilo by*, aby existovaly alespoň dvě oddělené skupiny měst ...“, což je sice pravda, ale pro nás je podstatné, že je to (za předpokladu neplatnosti dokazovaného tvrzení) dokonce *nutné*. Jedině tak lze z nalezeného sporu oprávněně usoudit, že původní tvrzení skutečně platí. Většinou mě však tito řešitelé přesvědčili, že tentokrát šlo spíš o nešikovné vyjádření, než o logickou chybu.

Nejčastější chybou, za kterou se už body strhávaly, bylo uvedení jednoho příkladu rozmístění dračích linek, ve kterém dokazované tvrzení platí. To ovšem není *důkaz*, o který nám šlo. Přestože se správná řešení výrazněji nelišila, rozhodl jsem se dávat kladný imaginární bod za zcela správná řešení, která nějakým způsobem zobecnila zadání nebo si všimla, že se mezi každými dvěma městy dá přepravit s použitím nejvýše dvou dračích linek. *(David Hruška)*

Úloha 3.

Bára a Kuba chodí dokola po trase, která je tvořena dvojicí rovnoběžných stran čtverce a jeho úhlopříčkami (jako na obrázku). Bára začíná uprostřed levé strany čtverce v bodě X a Kuba uprostřed pravé v bodě Y. Bára obejde celou trasu rovnoměrnou chůzí za 2015 vteřin, Kuba za 2016. Oba zároveň vyrazí po trase směrem nahoru a zastaví se za $2015 \cdot 2016$ vteřin. Spočítejte, kolikrát se mezitím na trase potkají.



(Matěj Konečný)

Řešení:
Bára jde stejným směrem a o něco větší rychlostí než Kuba. Můžeme si tedy představit, že Bára začíná na trase za Kubou a postupně ho dohání. Potkat se pak mohou dvěma různými způsoby: buď Bára Kubu dojde, nebo na sebe narazí „na křižovatce“ v průsečíku úhlopříček.

Snadno vypočítáme, že Bára za $2015 \cdot 2016$ vteřin obejde trasu přesně $2015 \cdot 2016/2015 = 2016$-krát a Kuba $2015 \cdot 2016/2016 = 2015$-krát. Bára se tedy za celou dobu posune vůči Kubovi přesně o jednu délku trasy vpřed. Protože začíná polovinu trasy za Kubou, na konci bude polovinu trasy před ním, a předejde ho tedy právě jednou.

Nyní už jen nahlédneme, že na křižovatce se nikdy nepotkají. Stačí se zřejmě zabývat případem, kdy každý z nich přijde po jiné úhlopříčce. V takovém případě by mezi sebou museli mít přesně polovinu trasy, takže rozdíl jejich uražených drah by musel být lichým násobkem poloviny délky trasy. Jak jsme ale viděli, toto nastane pouze na začátku a na konci, kdy jsou oba chodci na svých výchozích pozicích. Kuba s Bárou se tedy potkají právě jednou.

Poznámky:
Většina řešitelů měla o úloze dobrou představu a řešení uviděla, ale řada z nich měla problém ho správně zdůvodnit. Sešlo se relativně dost různých přístupů. Často se objevovaly formulace jako „v každém kole získá Bára náskok jednu vteřinu“, ze kterých nebylo jasné, co přesně mají znamenat. (Ve svém, nebo Kubově kole? Bářinu, nebo Kubovu vteřinu?) Většinou se mi ale nakonec podařilo je rozluštit a body jsem za ně strhávat nemusel. Nejvíce bodů asi dohromady ztratili řešitelé, kteří zapomněli vyřešit jeden nebo druhý způsob, jak se Bára s Kubou mohou potkat. *(Ondra Cífka)*

Úloha 4.

V bludišti je 2016 místností a k chodeb. Každá chodba spojuje právě dvě místnosti a každá dvojice místností je spojená nejvýše jednou chodbou. Tom do jedné místnosti vhodí Jerryho a do jiné umístí kus sýra. Jerry se snaží dostat k sýru. Pokaždé, když Jerry projde nějakou chodbou, uzamkne Tom chodbu, kterou si sám vybere, a Jerry jí už nikdy nemůže projít. Určete největší k takové, aby se pro jakékoliv bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit Jerrymu v získání sýra.

(Matěj Konečný)

Řešení:
Uvažme nejprve bludiště, ve kterém je každá dvojice místností spojená právě jednou chodbou. Pak počet chodeb v bludišti je roven počtu všech různých dvojic, které můžeme utvořit z 2016 místností, tj. $\binom{2016}{2} = 1008 \cdot 2015$. V tomto bludišti je ale každá z místností spojená s každou jinou, tudíž ať Tom umístí kus sýra a Jerryho jakkoli, Jerry prvním pohybem získá sýr.

Pro $K = 1008 \cdot 2015 - 1$ platí, že pro jakékoli bludiště s 2016 místnostmi a K chodbami Tom zabrání Jerrymu v získání sýra následujícím postupem. Na začátku umístí Tom Jerryho a sýr do dvou různých místností nespojených chodbou. Kdykoli Jerry dojde do místnosti, ze které vede neuzamčená chodba k sýru, Tom tuto chodbu uzamkne. Jinak Tom uzamkne jakoukoli jinou chodbu. Proto Jerry nezíská sýr. Tedy největší k takové, aby se pro jakékoli bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit v získání sýra, je $K = 2\,031\,119$.

Poznámky:
Chceme-li ukázat, že Tom má vyhrávající strategii, pak je třeba popsat, jak má Tom reagovat na libovolný pohyb Jerryho. Tedy nestačí říci, že Tom vždy uzamkne chodbu spojující Jerryho a sýr, neboť Jerry mohl navštívit místnost, kde se právě nachází, již dříve, a chodba k sýru tak již mohla být uzamknuta.

Pokud chceme dokázat, že $2\,031\,119$ je největší k takové, aby se pro jakékoli bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit v získání sýra, je podstatnou (a přitom snadnou) částí správného řešení vysvětlit, proč pro větší k Jerry vyhraje. Pokud zdůvodnění tohoto v řešení chybělo, nehodnotila jsem je plným počtem bodů. *(Míša Hubatová)*

Úloha 5.

Labyrint sestává z několika místností spojených chodbami tak, že se z každé místnosti dá dojít do kterékoliv jiné.[1] *Během dlouhého pobytu v labyrintu Vašek z nudy napsal do každé místnosti délku nejkratší trasy, která začíná v této místnosti a navštíví všechny ostatní místnosti. Ukažte, že poměr čísel z libovolných dvou místností je maximálně* 1,5.

(Rado Švarc)

Řešení:

Úlohu dokážeme sporem. Nechť existují dvě místnosti A, B s čísly a, b takové, že $a/b > 1{,}5$. Uvažme trasu X délky b, která vychází z bodu B, prochází všechny místnosti a končí v bodu C (podle zadání taková trasa existuje). Bod A se na této trase zřejmě alespoň jednou (ale možná vícekrát) vyskytuje. Označme BA část X od začátku do prvního výskytu bodu A na trase. Dále označme AC zbytek trasy X, čili část od prvního výskytu A až do konce trasy (uvědomme si, že AC může být prázdná). Potom zřejmě $|BA| + |AC| = b$.

Opačné trasy budeme značit $^{-1}$. Uvažme trasu BA^{-1} spojenou s X (její délka je tedy $|BA|+b$) a trasu AC spojenou s X^{-1} (její délka je tedy $|AC| + b$). Obě začínají v A a zřejmě projdou všechny místnosti (obsahují totiž X nebo X^{-1}), tudíž a musí být menší nebo rovno délkám těchto tras (uvědomme si, že a může popisovat nějakou úplně jinou trasu, jen s kratší délkou). Proto

$$a \le |BA| + b,$$
$$a \le |AC| + b.$$

Po sečtení nerovností dostaneme

$$2a \le |BA| + b + |AC| + b.$$

Protože platí $|BA| + |AC| = b$, po úpravě máme $a \le 1{,}5b$. Tímto dostáváme spor, a proto je poměr čísel z libovolných dvou místností maximálně 1,5.

Poznámky:

Na úlohu šla většina lidí uvedeným způsobem, ať už důkazem sporem, nebo přímým. Druhá možnost byla využít úplně nejkratší trasu procházející všechny místnosti, nicméně hlavní myšlenka důkazu zůstává pořád stejná. Většina řešení byla správná, ale některá řešila pouze speciální bludiště, typicky bludiště v přímce, a ta tedy nemohla dostat plný počet bodů. *(Honza Soukup)*

Úloha 6.

V království jsou čtyři vesnice A, B, C a D, které v tomto pořadí tvoří konvexní čtyřúhelník. Štěpán v poledne vyrazí ze vsi A do vsi C, Filip v jednu hodinu vyrazí ze vsi B do vsi D. Viki prochází všechny obce postupně v pořadí A, B, C, D. V poledne vyjde z A, v jednu projde B, do C dorazí ve stejnou dobu jako Štěpán a do D ve stejnou dobu jako Filip. Viki se v žádné vesnici nezdržuje a vždy hned vyrazí do další. Každý z cestovatelů se pohybuje stálou rychlostí a mezi dvěma vesnicemi jde vždy po přímce. Je možné, aby se Štěpán s Filipem po cestě potkali?

(Rado Švarc)

Řešení:

Setkat se nemohou. Pro spor předpokládejme opak. Je jen jedno místo, kde mají možnost se setkat, a to v průsečíku X úseček AC a BD. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|AB|+|BC| > |AC|$. Štěpán i Viki vyrážejí z A ve stejnou dobu, oba přicházejí do C ve stejnou dobu a Viki má delší cestu než Štěpán; z toho plyne, že Viki je rychlejší než Štěpán. Analogicky ukážeme, že Viki je rychlejší než Filip.

[1] Chodby spojují vždy právě dvě místnosti a mohou mít různé délky.

Představme si, že místo aby Viki šel v jednu hodinu z B přímo do C, půjde nejprve z B do X a odtud teprve do C. Z B vyráží ve stejnou dobu jako Filip a protože je rychlejší, bude v X dříve než Filip. Protože Filip a Štěpán procházejí X ve stejnou chvíli, bude Viki v X také dříve než Štěpán. Protože je rychlejší než Štěpán a je blíže C než Štěpán, dojde do C dříve než Štěpán. Protože ale původně přicházel do C ve stejnou dobu jako Štěpán, musel jít kratší trasu. Ovšem z trojúhelníkové nerovnosti je $|BX| + |XC| > |BC|$, takže naopak šel delší trasu, což je spor.

Poznámky:
Úloha šla vyřešit více způsoby. Pěkná řešení, která nepoužívala algebru, jsem odměňoval imaginárním bodem. Pravděpodobně nejčastější chyba, které se řešitelé dopouštěli, bylo používání ženského rodu pro Vikiho. Jedná se o našeho organizátora a je to vskutku muž. *(Rado Švarc)*

Úloha 7.

Skupinka organizátorů vyrazila na jarní PraSečí výlet. Po cestě se občas ke skupince nějaký další org přidal nebo se odpojil. Kdo se od skupinky odpojil, už se znova nepřidal. Ve skupince šel vždy alespoň jeden člověk. Ukažte, že existuje množina orgů taková, že dohromady ušli alespoň polovinu cesty a přitom žádní dva z nich spolu nešli zároveň.

(Rado Švarc)

Řešení:
Předpokládejme, že organizátoři nesou zlaté PraSe. Nést zlaté PraSe je velká čest; ten, kdo PraSe dostane, jej potom nese do té doby, než se musí z výletu odpojit. Když se z výletu odpojuje, předá PraSe jinému organizátorovi – takovému, který v daný okamžik je ve skupince a přitom dojde nejdál (pokud je jich více, tak libovolného z nich).

Nejprve si rozmyslíme, že zlaté PraSe přejde celou cestu. To je jasné, jelikož v každém okamžiku jde ve skupince alespoň jeden organizátor, takže má PraSe vždy kdo nést. Každý lichý nosič předá PraSe sudému, a ten ho nese nejdál, kam až to jde. Když PraSe už musí předávat, není ve skupince nikdo z těch, kdo v ní byli v té době, když PraSe dostal. Proto se nemůže stát, že by ho předal někomu, kdo šel s předchozím lichým organizátorem. Žádní liší nosiči proto nikdy nejdou spolu. Totéž platí pro sudé.

PraSe ušlo délku celého výletu, přičemž část cesty ho nesli sudí a zbytek cesty liší orgové. Když tedy vybereme větší z délek těchto dvou částí, dostaneme alespoň polovinu délky výletu.

Poznámky:
S úlohou nebyly větší problémy. *Pavlu Turkovi* děkuji za nápad se zlatým PraSetem.

(Kuba Svoboda)

Úloha 8.

David a Honza jedou autem. Neshodli se, kdo bude řídit, a tak si zvolili nesoudělná čísla d a h. David po každých d kilometrech zahne o 90 stupňů doprava a Honza každých h kilometrů zahne o 90 stupňů doleva. Pokud by měli oba zahnout najednou, tak budou pokračovat rovně. Na začátku míří ke svému cíli. Dokažte, že se k němu dostanou nezávisle na jeho vzdálenosti od startu, právě když d a h dávají stejný zbytek po dělení čtyřmi.[2]

(Rado Švarc)

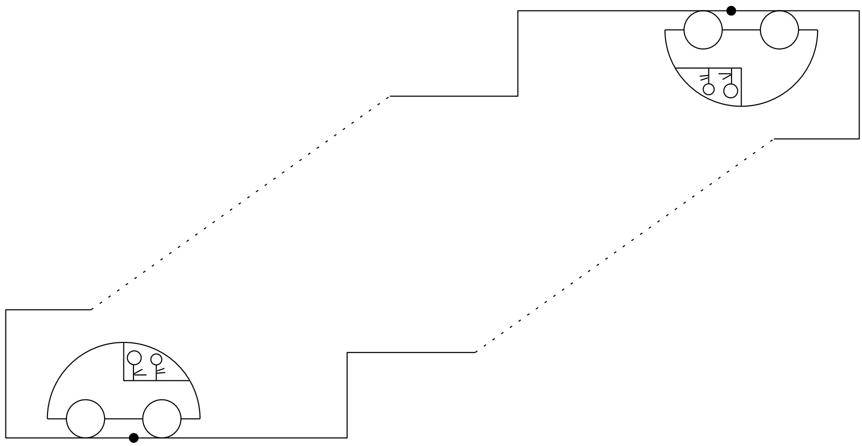
Řešení:
Představíme si kartézskou soustavu souřadnic takovou, že auto vyráží z počátku po kladné části osy x, tj. v prvním kroku jede z $(0, 0)$ do $(1, 0)$. V podstatě tedy zkoumáme, kdy projede celou kladnou část osy. V řešení budeme předpokládat, že $d \geq h$. V opačném případě postupujeme obdobně.

[2] Počáteční vzdálenost do cíle může být i neceločíselná.

Prvně ukážeme, že pokud d a h dávají různé zbytky modulo 4, pak bude pohyb auta periodický s periodou $4dh$. To znamená, že po $4dh$ kilometrech se auto znovu ocitne na startu. Nikdy se proto od počátku nevzdálí na více než $4dh$ kilometrů od počátku, a tak nemůže projet celou kladnou část osy x. Všimněme si, že změny pohybu auta jsou periodické s periodou dh, protože $d \mid k$, právě když $d \mid k + dh$, a analogicky pro h.

Nejprve nechť $d - h$ je liché. Během prvních $2dh$ kilometrů se auto otočilo $2h$-krát doprava a $2d$-krát doleva. Protože čtyřnásobné otočení stejným směrem se vynuluje a otáčení nezávisí na pořadí, pak $2h$ otočení doprava a $2d$ otočení doleva je ve výsledku stejné jako $2(d - h)$ otočení doleva, což je stejné jako jedno otočení o 180° (protože $2(d - h) \equiv 2 \pmod 4$). Proto je po $2dh$ kilometrech auto otočené opačně než na začátku. Nechť auto po ujetí $2dh$ kilometrů skončilo na souřadnicích (a, b). To znamená, že vystoupalo o b kilometrů nahoru a posunulo se o a kilometrů doprava. Protože zatáčení se opakuje s periodou dh a auto je natočené obráceně než na začátku, přesune se během dalších $2dh$ kilometrů o a kilometrů doleva a o b kilometrů dolů, takže bude opět v počátku. Celkem ujede $4dh$ kilometrů. Otočí se $4d$-krát doleva a $4h$-krát doprava, takže bude natočené stejně jako na začátku. A protože zatáčení je periodické s periodou dh, bude nyní auto zatáčet stejným způsobem jako na začátku. Takže se skutečně zacyklí.

Pro $d-h$ dávající zbytek 2 modulo 4 je postup analogický, pouze namísto prvních $2dh$ kilometrů zkoumáme prvních dh kilometrů. Úplně stejným přístupem dostaneme, že se zacyklí s periodou $2dh$ (a tudíž i $4dh$). Tím jsme dokázali jednu implikaci.



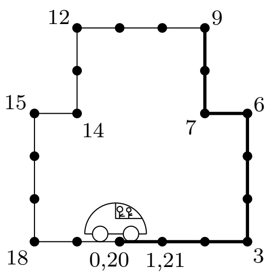
Nyní nechť d a h jsou nesoudělná přirozená čísla dávající stejný zbytek modulo 4. Ukážeme, že po dh kilometrech se bude auto nacházet v bodě $(1, 0)$ a bude natočené stejně jako na začátku. Protože je pohyb auta periodický po dh kilometrech a v následujícím kroku auto pojede do $(2, 0)$, plyne z toho (indukcí podle $\lfloor\lambda\rfloor$), že v bodě $(\lambda, 0)$, kde λ je kladné reálné číslo, bude auto po $\lfloor\lambda\rfloor \cdot dh + (\lambda - \lfloor\lambda\rfloor)$ kilometrech. Jinými slovy, auto se po $\lfloor\lambda\rfloor \cdot dh$ kilometrech posune do $(\lfloor\lambda\rfloor, 0)$ a následně bude přejíždět po ose x dopředu, během čehož narazí na cíl.

To, že auto bude po dh kilometrech natočeno původním směrem, ukážeme jednoduše: Po dh kilometrech se otočí d-krát doleva a h-krát doprava. To je to samé, jako by se otočilo $(h - d)$-krát doprava. Ovšem $4 \mid h - d$ a čtyřnásobné otočení stejným směrem nemá žádný účinek, takže po dh kilometrech bude skutečně nasměrované stejně jako na začátku.

Víme, že d a h jsou nesoudělná. To znamená, že po dělení čtyřmi nemohou dávat zbytek 0 ani 2, protože jinak by byla obě sudá, a proto by nebyla nesoudělná. Budeme předpokládat, že dávají zbytek 1, zbytek 3 se vyřeší obdobně.

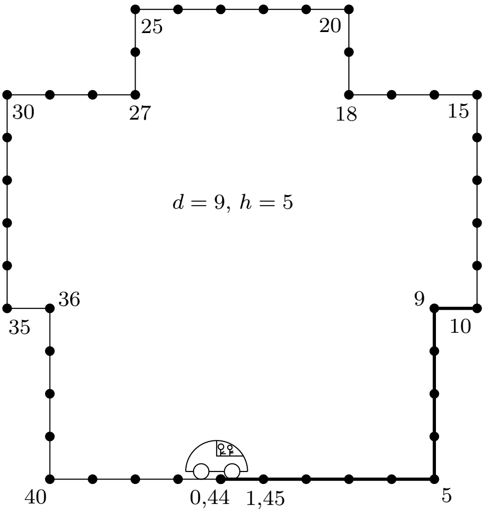
Uvažujme tabulku $h \times d$ vyplněnou šipkami mířícími doprava, doleva, nahoru a dolů tak, že v levém horním rohu je šipka ukazující doprava, v řádku se při průchodu zleva doprava šipky postupně otáčí proti směru hodinových ručiček a ve sloupci se při průchodu shora dolů otáčejí po směru hodinových ručiček. (Kdyby $d \equiv 3 \pmod 4$, otáčely by se šipky v řádku i ve sloupci opačným způsobem.) Nyní si představme, že auto řídíme následujícím způsobem: procházíme tabulku postupně z levého horního políčka směrem šikmo doprava dolů (s tím, že procházíme přes hrany tabulky na druhou stranu) a auto vždy posuneme podle šipky na aktuálním políčku. Jinými slovy se v i-tém kroku podíváme na políčko, jehož řádek a sloupec dávají po dělení h a d stejný zbytek jako i, a pohneme autem po směru šipky na tomto políčku.

$d = 7, h = 3$



→	↓	←	↑	→	↓	←
↑	→	↓	←	↑	→	↓
←	↑	→	↓	←	↑	→

$d = 9$, $h = 5$



→	↑	←	↓	→	↑	←	↓	→
↓	→	↑	←	↓	→	↑	←	↓
←	↓	→	↑	←	↓	→	↑	←
↑	←	↓	→	↑	←	↓	→	↑
→	↑	←	↓	→	↑	←	↓	→

Protože znaky se v řádku i sloupci opakují s periodou 4 a d i h dávají zbytek 1 po dělení čtyřmi, budou první řádek a sloupec splývat s posledními. (Kdyby $d \equiv h \equiv 3 \pmod 4$, byly by inverzní.) Všimněme si, že směr měníme jen při přechodu přes hranu tabulky: Pokud neprocházíme přes hranu, posunuli jsme se v tabulce dolů a doprava, což znamená otočení šipky jednou po a podruhé proti směru, takže se směr nezmění. Naopak, pokud přecházíme přes vodorovnou hranu, pak se v dalším kroku ocitneme na identickém řádku, jen posunutí o políčko doprava. Takže při přechodu přes vodorovnou hranu se šipka otočí doleva. (Při $d \equiv h \equiv 3 \pmod 4$ řádky nesplývají, ale jsou obrácené. To se ovšem vyrovná tím, že se šipky otáčejí na opačnou stranu.) Analogicky se při přechodu přes svislou hranu otočí doprava. A kdy přecházíme přes vodorovnou, resp. svislou, hranu? Právě v krocích, jejichž pořadí je dělitelné h, resp. d, protože se vždy pohybujeme doprava a dolů a tabulka má h řádků a d sloupců. To znamená, že tento pohyb je identický s pohybem, který vykonává auto za původního pravidla!

Nyní si už jen všimněme, že díky nesoudělnosti d a h navštívíme každé políčko tabulky v prvních dh krocích právě jednou. Je tomu tak proto, že díky Čínské zbytkové větě pro každou dvojici čísel a a b existuje právě jedno i mezi 1 a dh takové, že $i \equiv a \pmod{d}$ a $i \equiv b \pmod{h}$, a proto, že políčko, které navštívíme v i-tém kroku, je určeno zbytky po dělení i čísly d a h. Takže pozice po dh krocích je určená „součtem" všech šipek v tabulce. Protože v každých čtyřech po sobě jdoucích políčkách v jednom řádku i sloupci jsou všechny čtyři šipky, které se „vykrátí", zůstane „součet" všech šipek v tabulce stejný po smazání čtyř spodních řádků nebo čtyř pravých sloupců. Protože tabulka je tvaru $(4m + 1) \times (4n + 1)$, dostaneme jednoduchou indukcí, že „součet" je stejný jako v tabulce 1×1, která má „součet" roven jedné šipce mířící doprava. (V případě $d \equiv h \equiv 3 \pmod{4}$ bychom dostali, že „součet" je stejný jako v tabulce 3×3, kde je ovšem roven jedné šipce mířící doprava.) To znamená, že po dh krocích skutečně skončíme na pozici $(1, 0)$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Řešení přišlo nemnoho. Některá vyřešila jen první, jednodušší část. Kdo vyřešil druhou část, obvykle tak učinil „v principu stejným" způsobem jako vzorák. Nikdo ovšem nepoužil tabulku, ze které to bylo nejlépe vidět. Jeden z řešitelů ji dokonce zamaskoval komplexními čísly. *(Rado Švarc)*