Bylo nebylo

1. podzimní série Termín odeslání: 5. října 2015

Úloha 1. (3 body)

PraSátko Pepa hledalo další čtyři členy týmu na Náboj. Vydalo se do domečku, kde žilo pět PraSátek. S těmi bohužel bydlel v chaloupce i zlý vlk převlečený za další PraSátko, a toho Pepa do týmu nechtěl. Pepa si může vybrat dvojici obyvatel domečku a jednoho z nich se zeptat, zdali je ten druhý vlk. Toto může udělat dvakrát, přičemž druhou dvojici si může vybrat nezávisle na tom, jak zvolil tu první. PraSátka vždy mluví pravdu a vlk vždy lže. Jak se má Pepa zeptat, aby si mohl bez obav vybrat čtyři PraSátka do svého týmu a určitě v něm neměl vlka?

Úloha 2. (3 body)

Zlý Honza chtěl zničit celý PraSečí svět. Zašel proto za černokněžníkem, aby se s ním spolčil. Ten mu dal nekonečnou rovinu a pravil: „Nejprve obarvi tuto rovninu modrou a červenou barvou tak, aby na každé kružnici o poloměru jedna ležely právě dva modré body. Podaří-li se ti to, pomůžu ti zničit svět.“ Rozhodněte, zda Honza černokněžníkův úkol mohl splnit.

Úloha 3. (3 body)

Bylo nebylo, v daleké zemi žilo 2015 zapomnětlivých králů. Každý z nich obýval jeden hrad a těchto 2015 hradů tvořilo pravidelný 2015úhelník. Mezi každými dvěma hrady vedla cesta, a to buď dlážděná, nebo sypaná pískem. Jednou se všichni králové sjeli na Faerské ostrovy, aby společně pozorovali zatmění Slunce. Potom se chtěl každý vrátit do svého hradu. Během sjezdu ale zapomněli, ve kterém hradě kdo bydlí, a hrady si tedy rozdělili náhodně. Dokažte, že existují dva králové, mezi jejichž současnými hrady vede cesta stejného typu jako před výměnou.

Úloha 4. (5 bodů)

V každém patře nekonečně vysoké začarované věže se nachází magický portál, na kterém je napsáno přirozené číslo. Tato přirozená čísla tvoří nerostoucí posloupnost[1] a zároveň každé číslo udává, do kolikátého patra příslušný portál vede. Mezi patry věže lze cestovat pouze pomocí portálů a každý portál je pouze jednosměrný. V jednom z pater si malá myška usmyslela, že se vydá na výzvědy, a začala putovat skrze portály. Ukažte, že za nějakou dobu zůstane uvězněná ve dvojici pater, případně dokonce jen v jediném.

Úloha 5. (5 bodů)

Zlý černokněžník proměnil PraSátko v krásnou dívku. Navíc začaroval jeho oblíbené hodiny tak, že se čísla na ciferníku přeházela. Hodiny nyní odbíjejí každou celou hodinu, jenže napřeskáčku – přesně podle čísel na ciferníku. PraSátko bude vysvobozeno, pokud hodiny během tří po sobě jdoucích odbíjení vydají alespoň 21 úderů. Dokažte, že ať černokněžník začaroval hodiny jakkoliv, prokletí PraSátka bude za patnáct hodin určitě zlomeno.

[1] To znamená, že vybereme-li si kterékoliv patro a označíme-li číslo na portálu v tomto patře a, pak ve všech patrech nad tím vybraným jsou na portálech čísla menší či rovná a.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

V lese je 99 chaloupek. V každé chaloupce žije jedna až 99 ježibab. Přitom neexistuje žádná skupina chaloupek taková, aby celkový počet ježibab v nich žijících byl dělitelný stem. Dokažte, že v každé chaloupce žije stejný počet ježibab.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

V každé z n slují žije drak. Chodí je krmit 2^{n-1} trpaslíků, přičemž žádní dva z nich nekrmí přesně ty samé draky a pro každou trojici trpaslíků existuje drak, kterého chodí krmit všichni tři. Ukažte, že pokud jsou draci alespoň tři, existuje drak, kterého krmí všichni trpaslíci.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Je není jeden strom[2], na kterém Štěpán s Mirkem hrají hru. Štěpán začíná. Hráč na tahu vždy obarví dosud neobarvený vrchol jednou ze čtyř barev tak, aby dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Štěpán vyhraje, obarví-li se všechny vrcholy. V opačném případě vyhraje Mirek. Dokažte, že Štěpán má vyhrávající strategii[3].

[2] Definici stromu spolu se všemi ostatními potřebnými definicemi lze najít na tomto odkazu *mks.mff.cuni.cz/archive/34/uvod1s.pdf* .

[3] Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství, ať už protihráč hraje jakkoliv.

Bylo nebylo

1. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(213; 198; 2,79; 3,0)

PraSátko Pepa hledalo další čtyři členy týmu na Náboj. Vydalo se do domečku, kde žilo pět PraSátek. S těmi bohužel bydlel v chaloupce i zlý vlk převlečený za další PraSátko, a toho Pepa do týmu nechtěl. Pepa si může vybrat dvojici obyvatel domečku a jednoho z nich se zeptat, zdali je ten druhý vlk. Toto může udělat dvakrát, přičemž druhou dvojici si může vybrat nezávisle na tom, jak zvolil tu první. PraSátka vždy mluví pravdu a vlk vždy lže. Jak se má Pepa zeptat, aby si mohl bez obav vybrat čtyři PraSátka do svého týmu a určitě v něm neměl vlka?

(Anička Doležalová)

ŘEŠENÍ:

Pomocí jedné otázky dokážeme určit, zdali dvojice obsahuje vlka. Stačí se jednoho z této dvojice zeptat, zda je ten druhý vlk. Pokud se dozvíme, že prý ano, tak je ve dvojici určitě vlk (vlk lže o PraSátku nebo PraSátko mluví pravdu o vlku). Když bude odpověď záporná, tak víme, že ve dvojici jsou dvě PraSátka (PraSátka mluví pravdu).

Nyní stačí rozdělit zvířátka do tří dvojic a PraSátkům ze dvou dvojic položit otázku na druhé PraSátko z dvojice. Když uslyšíme dvakrát ne, tak si Pepa vybere do týmu PraSátka z těchto dvojic, jelikož tyto obsahují PraSátka. Pokud uslyšíme jednou ano, tak si Pepa vybere zbylé dvojice (ty, které neřekly ano).

POZNÁMKY:

Naprosté většině řešitelů se podařilo úspěšně vypořádat s úlohou. Pro toho, kdo si správně přečetl zadání, už zbytek nepředstavoval tvrdý oříšek. *(Marián Poppr)*

Úloha 2.

(183; 165; 2,72; 3,0)

Zlý Honza chtěl zničit celý PraSečí svět. Zašel proto za černokněžníkem, aby se s ním spolčil. Ten mu dal nekonečnou rovinu a pravil: „Nejprve obarvi tuto rovninu modrou a červenou barvou tak, aby na každé kružnici o poloměru jedna ležely právě dva modré body. Podaří-li se ti to, pomůžu ti zničit svět.“ Rozhodněte, zda Honza černokněžníkův úkol mohl splnit.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Vhodné obarvení roviny skutečně existuje a vypadá následovně: Rovinu obarvíme červeně a pak v ní modře nakreslíme nekonečně mnoho rovnoběžných přímek tak, že vzdálenost mezi dvěma sousedními je dva. Pro polohu středu libovolné kružnice nastává jeden ze dvou případů:

(1) Střed se nachází přesně mezi dvěma přímkami, neboli na ose jejich pásu. Pak je jeho vzdálenost od každé z přímek rovna jedné. Jsou tedy tečnami kružnice s daným středem a na každé takovéto kružnici nalezneme přesně dva modré body v místech jejích dotyků s rovnoběžkami.

(2) Střed se nachází blíže k jedné z rovnoběžek (nebo na ní leží). Pak vzdálenost středu od této přímky je menší než jedna a kružnice modrou přímku protne ve dvou bodech. Taková kružnice již žádnou další přímku protnout nemůže (vzdálenost od druhé z dvojice nejbližších přímek je větší než jedna).

Při zvoleném obarvení roviny tedy na každé kružnici s poloměrem jedna najdeme přesně dva modré body. To znamená, že Honza černokněžníkův úkol splnit může, ale než se mu podaří obarvit nekonečnou rovinu, máme snad dostatek času a není potřeba se znepokojovat, PraSečímu světu zatím nic nehrozí.

Poznámky:
Ke druhé úloze se nám sešla velká spousta řešení, z nichž drtivá většina byla správná. Jednotlivá řešení se od sebe téměř nelišila. Speciální pochvalu zasluhují všichni, kteří krom najití vhodného obarvení také dokázali jeho správnost. Pár řešitelů si spletlo poloměr kružnice s průměrem a kvůli tomu rovnoběžky rozmístilo dvakrát hustěji. Princip řešení však našli, a proto je tato maličkost nestála žádné body. Naprosté minimum řešitelů se nevyrovnalo s nekonečností roviny a prohlásilo, že jelikož je nekonečná, obarvit ji prostě nejde. *(Kája Kuchyňová)*

Úloha 3.

(124; 103; 2,48; 3,0)

Bylo nebylo, v daleké zemi žilo 2015 zapomnětlivých králů. Každý z nich obýval jeden hrad a těchto 2015 hradů tvořilo pravidelný 2015úhelník. Mezi každými dvěma hrady vedla cesta, a to buď dlážděná, nebo sypaná pískem. Jednou se všichni králové sjeli na Faerské ostrovy, aby společně pozorovali zatmění Slunce. Potom se chtěl každý vrátit do svého hradu. Během sjezdu ale zapomněli, ve kterém hradě kdo bydlí, a hrady si tedy rozdělili náhodně. Dokažte, že existují dva králové, mezi jejichž současnými hrady vede cesta stejného typu jako před výměnou.

(Honza Krejčí)

Řešení:
Z každého z 2015 hradů vede 2014 cest a každá cesta spojuje právě dva hrady. Proto je celkový počet cest roven $2015 \cdot 2014/2$, což je liché číslo. Proto je dlážděných cest jiný počet než těch sypaných pískem. Tudíž si po návratu z Faerských ostrovů králové nemohou rozdělit hrady tak, aby každá dvojice králů měla své nové hrady spojené cestou jiného druhu než před sjezdem. Dokázali jsme, že existují dva králové, mezi jejichž současnými hrady vede cesta stejného typu jako před výměnou.

Poznámky:
Řešitelé přišli hned na několik různých způsobů, jak určit celkový počet cest. Uvažme, že v daleké zemi bylo obecněji $n \in \mathbb{N}$ hradů. Pak tam bylo celkem $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$ cest, neboť z prvního hradu vede $n-1$ cest, z dalšího vede $n-2$ cest, které jsme ještě nezapočítali, atd., až z předposledního hradu vede jediná ještě nezapočítaná cesta. Uvedený součet je podle známého Gaussova vzorce pro součet prvních $n-1$ přirozených čísel roven $(n-1)n/2$. Další možností, jak určit počet cest, je sečíst počet hran a úhlopříček n-úhelníka. Takto dostáváme $n+n(n-3)/2 = (n^2-n)/2 = n(n-1)/2$. A konečně lze každou cestu chápat jako neuspořádanou dvojici hradů, které spojuje. Proto je celkový počet cest roven počtu neuspořádaných dvojic vybraných z n prvků, což je $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$. *(Míša Hubatová)*

Úloha 4.

(136; 112; 3,21; 3,0)

V každém patře nekonečně vysoké začarované věže se nachází magický portál, na kterém je napsáno přirozené číslo. Tato přirozená čísla tvoří nerostoucí posloupnost[1] *a zároveň každé číslo*

[1] To znamená, že vybereme-li si kterékoliv patro a označíme-li číslo na portálu v tomto patře a, pak ve všech patrech nad tím vybraným jsou na portálech čísla menší či rovná a.

udává, do kolikátého patra příslušný portál vede. Mezi patry věže lze cestovat pouze pomocí portálů a každý portál je pouze jednosměrný. V jednom z pater si malá myška usmyslela, že se vydá na výzvědy, a začala putovat skrze portály. Ukažte, že za nějakou dobu zůstane uvězněná ve dvojici pater, případně dokonce jen v jediném.

(Vejtek Musil)

Řešení:
Označme si a_i jako číslo portálu v i-tém patře. Posloupnost (a_i) je ze zadání nerostoucí, platí proto $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ V prvním patře je tedy největší číslo portálu ze všech, označme si jej c.

Ať myška začíná svou cestu kdekoliv, po prvním vstoupení do portálu určitě bude někde mezi patry 1 a c (včetně). Od té doby tento interval pater už nikdy neopustí, nejvýše po c dalších „teleportacích" se myška ocitne na patře, na kterém už někdy byla. Od té doby se bude pohybovat v cyklu. Naším úkolem je ukázat, že tento cyklus nebude mít délku větší než 2.

V každém cyklu musí z každého i do každého jeho patra vést právě jeden portál. Označme si tedy čísla pater tohoto cyklu jako $m_1, \dots, m_n$ (v libovolném pořadí), dále m nejnižší a M nejvyšší číslo jeho patra. Potom číslo a_m musí být nejvyšší číslo ze všech a_{m_i}, musí tedy platit $a_m = M$. Podobně a_M musí být nejnižší číslo portálu ze všech a_{m_i}, proto $a_M = m$. To ale znamená, že nejvyšší a nejnižší patro na sebe navzájem odkazují, neboli vzniká cyklus délky maximálně 2 (pokud $m = M$, pak máme cyklus délky 1).

Poznámky:
Řešení se sešlo opravdu hodně. Jelikož se jednalo o první sérii, a navíc se v úloze vyskytovalo nekonečno, se kterým není lehké pracovat, snažil jsem se být mírný a nestrhávat body za nedostatečné zdůvodnění – také proto, že v této úloze intuice poměrně dobře odpovídá tomu, co se skutečně děje.

První část řešitelů postupovala obdobně vzorovému řešení (z těch měla většina plný počet bodů). Druhá část nějak popisovala způsob, jakým se myška hýbe – buď, že se bude neustále přibližovat jednomu bodu a buď se zacyklí po cestě, nebo se dostane do intervalu délky 2 a nic jiného jí nezbude, nebo že se bude postupně čím dál víc „vzdalovat", až nakonec dojde do prvního patra a už se nebude mít kam jinam vrátit.

Z druhé skupiny měla většina 3–5 bodů, přičemž jsem nejčastěji strhával za to, že zapomněli na jeden ze způsobů pohybu myšky.

Dva body dostali ti, kteří si správně všimli, že se myška bude pohybovat stále blíže k nějakému patru, ale nijak to nezdůvodňovali, případně za jiné zajímavé pozorování. *(Martin Čech)*

Úloha 5.

(117; 80; 3,10; 5,0)

Zlý černokněžník proměnil PraSátko v krásnou dívku. Navíc začaroval jeho oblíbené hodiny tak, že se čísla na ciferníku přeházela. Hodiny nyní odbíjejí každou celou hodinu, jenže napřeskáčku – přesně podle čísel na ciferníku. PraSátko bude vysvobozeno, pokud hodiny během tří po sobě jdoucích odbíjení vydají alespoň 21 úderů. Dokažte, že ať černokněžník začaroval hodiny jakkoliv, prokletí PraSátka bude za patnáct hodin určitě zlomeno. *(Kuba Krásenský)*

Řešení (podle Vaška Steinhausera):
Úlohu vyřešíme sporem – předpokládejme, že existuje zpřeházení ciferníku, pro které platí, že součet tří po sobě jdoucích hodin je nejvýše 20. Pozice na ciferníku si postupně označme a až l tak, aby $l = 12$. Víme, že trojice, které obsahují 12, mají součet nejvýše 20, tudíž součet každé z dvojic $a + b$ a $j + k$ je nejvýše 8. Protože navíc víme, že $1 + 2 + \cdots + 12 = 78$, tak

$$c + d + \cdots + i \geq 78 - 12 - 2 \cdot 8 = 50.$$

Z čísel na pozicích c, f a i vybereme nejmenší, čímž dosáhneme toho, že bude rovné nejvýše 9. Zbylá čísla tvoří dvě disjunktní trojice po sobě na ciferníku následujících čísel, které mají dohromady součet alespoň 41, tedy jedna z dvojic má součet alespoň 21, což je spor.

Poznámky:

Mezi došlými řešeními se objevilo mnoho přístupů. Úloha se snadno vzdala skoro všem pokusům o „vysporování“, ať už se jednalo o součty cifer, nebo o opakování čísel. Také se objevilo mnoho rozebíracích řečení. K tomu bych rád řekl, že pokud se v řešení dostanete k přílišnému rozebírání, stojí za to se rozmyslet, jestli neexistuje jednodušší řešení (minimálně v PraSátku takové skoro určitě existuje). Jako další způsob řešení bych uvedl řešení typu „budu se snažit nevytvořit požadovaný ciferník“. V těchto postupech se často objevoval argument, že pro černokněžníka je výhodnější, pokud „součet cifer bude co nejvyváženější“ nebo „velké a malé cifry se budou párovat“. Toto rozhodně obecně neplatí. Každé takovéto netriviální pozorování je nutné v řešení pořádně zdůvodnit.

(Honza Krejčí)

Úloha 6.

(76; 29; 2,01; 1,0)

V lese je 99 chaloupek. V každé chaloupce žije jedna až 99 ježibab. Přitom neexistuje žádná skupina chaloupek taková, aby celkový počet ježibab v nich žijících byl dělitelný stem. Dokažte, že v každé chaloupce žije stejný počet ježibab.

(Marta Kossaczká)

Řešení:

Počet ježibab v i-té chaloupce budeme značit a_i. Pro spor předpokládejme, že existují dvě chaloupky s různým počtem ježibab. Nechť jsou to BÚNO[2] první a druhá chaloupka, tedy $a_1 \neq a_2$. Označme s_i součet počtů ježibab v první až i-té chaloupce modulo 100, tedy

$$s_i \equiv \sum_{j=1}^{i} a_i \pmod{100}.$$

Všimneme si, že podle zadání $s_i \neq 0$. Stejně tak $s_i \neq s_j$ pro $i > j$, protože v opačném případě by $s_i - s_j = 0$, neboli

$$a_{j+1} + \cdots + a_i \equiv 0 \pmod{100},$$

což podle zadání nemůže nastat.

Všechny součty s_i musejí být nenulové a po dvou různé, a tedy pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, 99\}$ existuje s_i takové, že $s_i = j$. Přitom a_2 nabývá hodnoty mezi 1 a 99, a protože z předpokladu víme, že $a_1 \neq a_2$, musí platit $a_2 = s_i$ pro nějaké $i \in \{2, 3, \ldots, 99\}$. Tudíž

$$0 = s_i - a_2 \equiv a_1 + a_3 + a_4 + \cdots + a_i \pmod{100},$$

což je ve sporu s předpokladem, že neexistuje skupina chaloupek, v nichž žije dohromady počet ježibab dělitelný stem.

Poznámky:

Sešlo se poměrně hodně řešení, z nichž většina pouze dokázala, že v chaloupce může žít stejný počet ježibab. Taková řešení si vysloužila 1 bod. Ostatní více či méně úspěšně dokazovala požadované tvrzení, ať už uvedenou cestou, nebo indukcí přes počet chaloupek. *(Honza Soukup)*

[2] Jde o běžnou matematickou zkratku značící „bez újmy na obecnosti“.

Úloha 7. (55; 9; 0,78; 0,0)

V každé z n slují žije drak. Chodí je krmit 2^{n-1} trpaslíků, přičemž žádní dva z nich nekrmí přesně ty samé draky a pro každou trojici trpaslíků existuje drak, kterého chodí krmit všichni tři. Ukažte, že pokud jsou draci alespoň tři, existuje drak, kterého krmí všichni trpaslíci.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

Nechť D je množina všech draků. K libovolnému trpaslíkovi t_i přiřadíme množinu $T_i \subset D$ obsahující právě ty draky, které t_i krmí. Pro spor předpokládejme, že existuje trpaslík t_j takový, že $T_j = D \setminus T_i$. Povšimněme si, že z $n \geq 3$ plyne, že trpaslíci jsou alespoň čtyři. Proto k t_i a t_j můžeme přidat třetího trpaslíka t_k a dle zadání musí existovat drak, kterého všichni tři krmí. Protože ale $T_i \cap T_j = \emptyset$, nemůže takový drak existovat. To je spor. Proto neexistují žádní dva trpaslíci t_i a t_j takoví, že T_i a T_j jsou navzájem doplňky do D.

Množina D má n prvků, z čehož plyne, že má 2^n podmnožin. Ty umíme rozdělit na 2^{n-1} dvojic takových, že množiny v dvojici jsou navzájem doplňky do D. Ukázali jsme, že z každé této dvojice můžeme vzít maximálně jednu množinu přiřazenou nějakému trpaslíkovi. Ale protože trpaslíků je 2^{n-1} a všechny jim přiřazené množiny jsou různé, znamená to, že z každé dvojice množin musí být právě jedna přiřazena nějakému trpaslíkovi. Řešení lze nyní dokončit více způsoby. My si ukážeme dva.

Standardní přístup:

Pro spor předpokládejme, že žádný drak není krmen všemi trpaslíky. Indukcí ukážeme, že pro libovolné $l \geq 1$ existují všichni trpaslíci, kteří krmí právě $n - l$ draků. Potom dosazením $l = 1$ a $l = n - 1$ dostaneme, že existují všichni trpaslíci, kteří krmí právě jednoho draka, a stejně tak ti, kteří krmí všechny draky až na jednoho. Z toho vyplývá, že někteří dva trpaslíci jistě budou krmit doplňkové množiny draků, což je spor.

Začneme důkazem pro $l = 1$. Kdyby pro nějakou $(n-1)$-prvkovou podmnožinu D neexistoval žádný trpaslík, který krmí právě draky z této množiny, pak existuje trpaslík, který krmí právě toho draka, který v této množině není. Nazvěme tohoto trpaslíka t_i a jeho draka A. Pak ovšem libovolní dva trpaslíci t_j a t_k musejí taktéž krmit A, aby platilo, že t_i, t_j a t_k krmí všichni alespoň jednoho společného draka. Kvůli tomu ovšem každý trpaslík krmí A, což je ve sporu s tím, že žádný drak není krmen všemi trpaslíky. Takže pro libovolnou $(n-1)$-prvkovou množinu draků existuje trpaslík, který krmí právě ji, čímž máme případ $l = 1$ pokrytý.

Nyní předpokládejme, že máme pomocné tvrzení dokázáno $l - 1 \geq 1$, a dokažme ho pro l. Kdyby pro nějakou $(n - l)$-prvkovou množinu draků neexistoval trpaslík, který krmí právě tyto draky, pak existuje trpaslík, který krmí právě těch l draků, kteří v této množině nejsou. Nazvěme tohoto trpaslíka t_i a jeho draky $A_1, A_2, \ldots, A_l$. Z indukčního předpokladu existuje trpaslík t_j, který krmí všechny draky až na $A_2, \ldots, A_l$. Navíc díky případu $l = 1$ existuje i trpaslík t_k, který krmí všechny draky až na A_1. Ovšem neexistuje žádný drak, kterého by krmil t_i, t_j i t_k. To je hledaný spor a tím jsme též hotovi.

Trikový přístup:

Uvažujme trpaslíka t_i, který krmí nejméně draků. Pokud je takových trpaslíků více, budeme uvažovat libovolného z nich. Nechť t_i krmí d draků, které budeme nazývat $A_1, \ldots, A_d$. Očividně $d > 0$, jinak by pro libovolné další dva trpaslíky t_j a t_k platilo, že neexistuje drak, který by byl krmen t_i, t_j i t_k , což je spor se zadáním. Kdyby existoval trpaslík, který krmí právě draky $A_1, \ldots, A_{d-1}$, pak dostáváme spor s tím, že t_i krmí nejméně draků. Proto musí existovat trpaslík t_l, který krmí všechny draky až na $A_1, \ldots, A_{d-1}$. Z toho plyne, že jediný drak, kterého krmí t_i i t_l, je A_d. Potom ale libovolný další trpaslík t_m musí krmit A_d, protože jinak by neexistoval drak, který by byl krmen t_i, t_l i t_m. Takže všichni trpaslíci krmí A_d, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Celkem se sešlo 55 řešení, z nichž nějaké body získalo deset. Mezi nejčastější chyby, které řešitelé dělali, patřilo ukázání, že počet trojic je vyšší než počet draků, dále konstrukce případu, kdy skutečně všichni trpaslíci jednoho společného draka krmí, nebo například pouhé rozebrání případu $n = 3$ (a ani to ne vždy správně). Většina řešitelů, kteří úlohu vyřešili, postupovala standardně. *Pavel Turek* a *Pavel Hudec* se pustili na obtížnou cestu s indukcí podle n, ale oba nakonec úlohu zdárně dokončili. Trikové řešení *Petra Gebauera* mne natolik ohromilo, že jsem se mu rozhodl udělit $+i$.

(Rado Švarc)

Úloha 8.

(33; 4; 0,58; 0,0)

Je není jeden strom[3]*, na kterém Štěpán s Mirkem hrají hru. Štěpán začíná. Hráč na tahu vždy obarví dosud neobarvený vrchol jednou ze čtyř barev tak, aby dva vrcholy spojené hranou neměly stejnou barvu. Štěpán vyhraje, obarví-li se všechny vrcholy. V opačném případě vyhraje Mirek. Dokažte, že Štěpán má vyhrávající strategii*[4]*.*

(Filip Hlásek)

Řešení:

Po každém tahu se podíváme na náš strom (říkejme mu nadále třeba strom S) a rozdělíme ho na podstromy $S_1, S_2, \ldots, S_n$ následujícím způsobem: vezmeme dosud nevyužitou hranu a všechny vrcholy, k nimž se z ní dá dostat po cestě bez obarvených vrcholů, a tyto vrcholy včetně koncových obarvených dáme do podstromu. Opakujeme postup, dokud nevyužijeme všechny hrany stromu S. Každý neobarvený vrchol tedy bude náležet do právě jednoho podstromu a každý obarvený do tolika různých podstromů, kolik z něj vede hran, přičemž v každém z nich to bude list.

Dále si uvědomíme, že žádný podstrom neovlivňuje nic, co se děje v jiném podstromu. Můžeme je tedy řešit odděleně. Nyní se pokusíme dokázat, že je Štěpán vždy schopen zajistit, aby po jeho tahu byly v každém podstromu obarvené nejvýše dva vrcholy. Takovýto stav nazveme *dobrý*. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle toho, o kolikátý Štěpánův tah se jedná:

Je-li to jeho první tah, může Štěpán hrát jakkoli. Ve všech podstromech, na které tak strom S rozdělí, bude právě jeden obarvený vrchol. Pokud byl před Mirkovým tahem S v dobrém stavu, je po jeho tahu buď stále v dobrém stavu (jestliže Mirek hrál do podstromu S_i, který měl původně právě jeden obarvený vrchol, nebo hrál na cestu spojující jeho dva obarvené vrcholy), nebo existuje i takové, že v S_i jsou tři obarvené vrcholy. To odpovídá situaci, kdy Mirek provedl tah někam do podstromu S_i, který měl již dříve obarvené dva vrcholy, a to mimo cestu mezi těmito dvěma vrcholy. Tím od S_i odpojil několik (klidně i nula) dalších podstromů a vytvořil z něj podstrom se třemi obarvenými vrcholy.

Je-li S po Mirkově tahu v dobrém stavu a ještě není obarvený, může Štěpán buď najít podstrom S_j, který má právě jeden obarvený vrchol, a obarvit například kterýkoli jeho list, nebo v jiném podstromu S_k, který má právě dva obarvené vrcholy, obarvit libovolný vrchol na cestě mezi nimi.

V opačném případě existuje právě jedno takové i, že ve stromu S_i jsou právě tři obarvené vrcholy. Nemůže jich být víc, protože Mirek mohl obarvit vrchol jen v jednom podstromu. V tomto případě S ještě plně obarvený není, neboť v plně obarveném S by každý podstrom měl jen dva vrcholy, a tedy by nemohl mít tři barvy.

Obarvené vrcholy pojmenujeme a, b, c a označíme si P_{ab} cestu mezi vrcholy a a b, obdobně označíme i P_{ac} a P_{bc}. Všimneme si, že z definice stromu vyplývá, že $P_{ab} \cap P_{bc} \cap P_{ca}$ obsahuje alespoň jeden vrchol. Je tomu tak proto, že kdyby byl průnik prázdný, tak by sjednocení těchto cest (které stále musí být podgrafem stromu) obsahovalo kružnici. Obarvíme-li takový vrchol (volnou barvu ještě určitě máme, protože v S_i jsou právě tři obarvené vrcholy), rozdělíme strom

[3] Definici stromu spolu se všemi ostatními potřebnými definicemi lze najít na tomto odkazu *mks.mff.cuni.cz/archive/34/uvod1s.pdf*.

[4] Vyhrávající strategie je strategie, která vede k vítězství, ať už protihráč hraje jakkoliv.

S_i na podstromy, z nichž každý bude obsahovat nejvýše dva obarvené vrcholy. Strom S je tedy evidentně opět v dobrém stavu.

Poznámky:
Na osmou úlohu se nám sešlo opravdu hodně řešení. Bohužel pouze *Filip Bialas* vyřešil úlohu tak, že jsem k tomu neměl vůbec žádné připomínky, a tím si vysloužil $+i$.Nejčastější chyby spočívaly v tom, že nebyla strategie dostatečně popsaná a obsahovala nekonkrétní formulace, jako třeba že si Štěpán musí dávat pozor a pak nemůže prohrát a podobně. Korektní popis strategie ke kombinatorické hře musí být napsán tak, aby se jím mohl řídit například i počítač. Někteří též řešili úlohu jen pro nějaké malé konkrétní stromy. V řešení, která už nějakou obecnou strategii představila, často chyběl důkaz, že vymyšlená strategie funguje. Chcete-li se podívat na více příkladů, jak může vypadat popis a důkaz strategie ke kombinatorické hře, můžete se podívat na vzoráky první série seriálu 32. ročníku[5], která se jim věnuje. *(Viki Němeček)*

[5] mks.mff.cuni.cz/archive/32/9.pdf