(Od)mocniny

2. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. BŘEZNA 2016

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Najděte největší přirozené číslo, pro které platí, že ať se podíváme na jakékoli dvě jeho po sobě jdoucí cifry, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Pro která prvočísla p platí, že výraz $2^p + p^2$ je také prvočíslo?

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Jsou dána kladná reálná čísla a, b, c splňující nerovnosti $a^b > b^a$ a $b^c > c^b$. Ukažte, že $a^c > c^a$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Dokažte, že

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \cdots + \sqrt[2016]{2016}}} < 2.$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Pepa má na kartičkách napsaná všechna přirozená čísla od jedné do 10^{2016}. Z dlouhé chvíle se rozhodl umocnit je na všechna na 2016 a následně sečíst. Určete posledních 1008 cifer čísla, které mu vyjde.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Dokažte, že $(\sqrt{2} - 1)^{2016}$ se dá zapsat jako rozdíl druhých odmocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Přirozené číslo n nazveme *třítuctové*, jestliže pro každé prvočíslo p, které dělí n, platí, že p^{36} dělí n a p^{37} už ne. Rado a Matěj mají každý konečnou množinu svých oblíbených třítuctových čísel. Zjistili, že oba mají ve svých množinách stejný počet čísel. Navíc se součin všech čísel v Radově množině rovná součinu všech čísel v Matějově množině, zatímco součty čísel v jednotlivých množinách jsou různé. Ukažte, že se součet čísel z Matějovy množiny liší od součtu čísel z Radovy množiny alespoň o milión.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Najděte všechna přirozená a taková, že pro každé přirozené n větší než 4 platí

$$2^n - n^2 \mid a^n - n^a.$$

(Od)mocniny

2. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Najděte největší přirozené číslo, pro které platí, že ať se podíváme na jakékoli dvě jeho po sobě jdoucí cifry, dostaneme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

(Pepa Svoboda)

ŘEŠENÍ:
Nejprve si vypíšeme všechny dvojciferné druhé mocniny přirozených čísel. Ty jsou 16, 25, 36, 49, 64 a 81. Nyní se podíváme, jak je možné je dát za sebe tak, aby vzniklo co největší číslo.

Číslo 25 můžeme rovnou vyloučit, protože na něj nelze ani z jedné strany nijak navázat, muselo by tedy být samotné, a například samotné číslo 81, které určitě splňuje zadání, je větší než 25. Obdobně můžeme vyloučit číslo 36. Kdyby totiž bylo v hledaném čísle, muselo by být hned na nejlevější pozici, protože na něj nelze nijak navázat zleva. V každém takovém čísle ale můžeme posloupnost číslic 36 nahradit posloupností 816 a dostaneme číslo větší též splňující podmínku ze zadání.

Všimneme si, že každé zbývající číslo má jak svého pravostranného, tak levostranného souseda (pokud ho vůbec má) definovaného jednoznačně (každá cifra se jak na místě desítek, tak na místě jednotek vyskytuje nejvýše jednou). Nyní pokud začneme od libovolného čísla ze zbývající čtveřice a budeme přidávat číslice jediným možným způsobem jak napravo, tak nalevo, dokud to půjde, vždy se dostaneme k číslu 81649, což je hledané nejvyšší možné číslo.

POZNÁMKY:
Téměř všichni řešitelé se dostali k hledanému číslu. Nejčastější z méně důležitých chyb bylo to, že mnozí považovali i čísla 1, 4 a 9 (mnohdy zapsaná jako 01, 04 a 09) za dvouciferná. Z podstatnějších chyb pak často chyběl jakýkoliv důkaz o tom, že nalezené číslo je největší s danou vlastností, nebo byl přítomen pouze jeho náznak. Z dobré třetiny řešení nebylo zřejmé, že takové číslo vůbec existuje (to jest že není možné, aby se čísla při přidávání nějak „zacyklila“, a tedy existovalo libovolně velké číslo hledaných vlastností).

(Viki Němeček)

Úloha 2.

Pro která prvočísla p platí, že výraz $2^p + p^2$ je také prvočíslo?

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:
Nejprve ošetříme zvlášť prvočísla 2 a 3. Spočítáme, že $2^2 + 2^2 = 8$, což není prvočíslo, zatímco $2^3 + 3^2 = 17$, což je prvočíslo. Dále budeme uvažovat prvočíslo $p > 3$.

VARIANTA BEZ KONGRUENCÍ:
Nechť p není dělitelné třemi. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $p = 3m + 1$ nebo $p = 3m - 1$. Výraz p^2 tedy můžeme zapsat jako $9m \pm 6m + 1$. Vidíme, že první dva členy jsou dělitelné třemi. Nyní indukcí dokážeme, že $3 \mid 2^n + 1$ pro každé liché n (a tedy i pro p).

Nejprve provedeme bázový krok pro $n = 1$:

$$3 \mid 2^1 + 1 = 3.$$

Předpokládejme dále, že pro n tvrzení platí. Rádi bychom dokázali, že pak platí i pro $n+2$.[1] Víme, že

$$2^{n+2} + 1 = 4 \cdot 2^n + 1 = 3 \cdot 2^n + 2^n + 1,$$

z indukčního předpokladu máme $3 \mid 2^n + 1$ a zřejmě platí $3 \mid 3 \cdot 2^n$, takže dohromady $3 \mid 2^{n+2} + 1$. Tím je indukce hotová.

Protože $p > 3$, je p liché, a tedy $3 \mid 2^p + 1$. Dostáváme

$$3 \mid 2^p + 1 + 9m^2 \pm 6m = 2^p + (3m \pm 1)^2 = 2^p + p^2.$$

Tedy výraz je dělitelný třemi a zároveň je větší než tři (pro všechna $p > 3$ platí $2^p > 8$), nemůže to tedy být prvočíslo. Jediným řešením je prvočíslo 3.

Varianta s kongruencemi:
Buď $p \equiv 1 \pmod 3$, pak $p^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$, nebo $p \equiv 2 \pmod 3$, pak $p^2 \equiv 2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$. Zároveň p musí být liché, takže $2^p \equiv (-1)^p = -1 \pmod 3$. Dostáváme

$$2^p + p^2 \equiv -1 + 1 = 0 \pmod 3.$$

Protože $2^p + p^2 > 3$ (pro všechna $p > 3$ platí $2^p > 8$), nemůže to být prvočíslo. Jediným řešením je tedy prvočíslo 3.

Poznámky:
Sešla se spousta řešení se správnou myšlenkou, často jste ale bojovali se zápisem. Nakonec jsem uznávala i nepříliš formální řešení. Těm, kteří si nerozumějí s indukcí nebo kongruencemi, vřele doporučuji podívat se na ně třeba do naší knihovny, jedná se o velmi užitečné nástroje. Zkušenějším řešitelům bych ráda připomněla, že čím lehčí úloha, tím víc je potřeba dokazovat i věci, které v osmičce stačí konstatovat. Úplně by stačilo odvolat se na kvadratické zbytky, ale nějaké zdůvodnění uvést musíte. *(Anička Doležalová)*

Úloha 3.

Jsou dána kladná reálná čísla a, b, c splňující nerovnosti $a^b > b^a$ a $b^c > c^b$. Ukažte, že $a^c > c^a$.
(Matěj Konečný)

Řešení:
Protože všechna tři čísla a, b, c jsou kladná, jsou kladné i všechny strany nerovností v zadání. Navíc je můžeme mocnit na libovolný kladný exponent a jejich platnost se nezmění. Umocněme tedy první nerovnost na c a druhou na a (abychom získali u b stejné exponenty a mohli pak dát obě nerovnosti dohromady). Dostaneme tak $a^{bc} > b^{ac}$ a $b^{ca} > c^{ba}$, celkem tedy máme $a^{bc} > b^{ac} > c^{ab}$. Všechna čísla v druhé nerovnosti jsou opět kladná, můžeme tedy obě strany umocnit na $1/b$, čímž dostaneme $a^c > c^a$, což jsme měli dokázat.

[1] Pozor, nedokazujeme z výroku pro n výrok pro $n + 1$, jako se obvykle u indukce dělá, protože se zajímáme pouze o lichá čísla.

Poznámky:
Protože úloha byla na trojku poměrně lehká a nejtěžší část byla rozmyslet si, že všechny úpravy opravdu zachovávají nerovnost, rozhodl jsem se být přísný a strhnout bod všem, kteří tyto úpravy nijak neokomentují – stačila poznámka, že všechna čísla jsou kladná a můžeme tedy úpravy provést. Za stránku popsanou výpočty bez jakéhokoliv komentáře obecně málokdy dostanete plný počet bodů.

Matěj Doležálek si vysloužil imaginární bod za to, že opravdu pořádně zdůvodnil, že uvedené úpravy lze provést – je tomu tak proto, že mocninná funkce $f(x) = x^n$ je rostoucí na kladných číslech.

Někteří nerovnosti logaritmovali a pak je násobili, což ale samozřejmě obecně nefunguje: i pro kladná čísla totiž logaritmus nabývá záporné hodnoty a při násobení nerovností je třeba vědět, zda násobíte kladným, či záporným číslem. Našlo se však i pár řešitelů, kteří logaritmovali a vyhnuli se diskutování znaménka tím, že nerovnosti násobili pouze čísly, která byla ze zadání kladná. Na závěr bych chtěl všechny řešitele pochválit, a sice proto, že všichni postupovali od známých nerovností k neznámé a nikoliv naopak. *(Martin Čech)*

Úloha 4.

Dokažte, že

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \cdots + \sqrt[2016]{2016}}} < 2.$$

(Matěj Konečný)

Řešení:
Nejprve si dokážeme zdánlivě nesouvisející pomocné tvrzení. Pro každé přirozené $n > 2$ platí $n + 2 < 2^n$. Důkaz provedeme pomocí matematické indukce. Pro $n = 3$ tvrzení platí, neboť $3 + 2 < 2^3$. V indukčním kroku předpokládejme, že uvedené tvrzení platí pro nějaké $n = k > 2$, dokážeme jej pro $n = k + 1$. Platí

$$(k + 1) + 2 = k + 2 + 1 < 2^k + 1 < 2^{k+1},$$

čímž je pomocné tvrzení dokázáno. Protože jsou obě strany pomocné nerovnosti nezáporné, můžeme ji odmocnit a pro každé přirozené $n > 2$ dostáváme ekvivalentně

$$\sqrt[n]{n + 2} < 2. \qquad [1]$$

Nyní označme $a_{2016} = \sqrt[2016]{2016}$. Dále definujme konečnou posloupnost $a_n = \sqrt[n]{n + a_{n+1}}$ pro $n = 2015, 2014, \ldots, 2$. Nyní indukcí dokážeme, že $a_n < 2$ pro každý člen této posloupnosti. Platí $a_{2016} = \sqrt[2016]{2016} < \sqrt[2016]{2^{2016}} = 2$, což považujeme za bázový krok pro $n = 2016$. V indukčním kroku ukážeme, že pokud tvrzení platí pro $n + 1 > 2$, tak platí i pro n. Máme totiž

$$a_n = \sqrt[n]{n + a_{n+1}} < \sqrt[n]{n + 2} \leq 2 \quad \text{dle [1]}.$$

Odtud dostáváme $a_2 < 2$, ale a_2 je vlastně levá strana kýžené nerovnosti, což jsme měli dokázat.

Poznámky:
Udělovala jsem plný počet bodů i řešitelům, kteří uvedené pomocné tvrzení nedokazovali, neboť jsem uvěřila, že je vidět, že exponenciální funkce roste rychleji než lineární.

Objevili se i řešitelé, kteří nalezli extrém funkce $\sqrt[n]{n}$ pomocí diferenciálního počtu. To je samozřejmě dovolená technika, chci jen poukázat na to, že v PraSeti zadáváme úlohy tak, aby derivovat nebylo nutné.

(Míša Hubatová)

Úloha 5.

Pepa má na kartičkách napsaná všechna přirozená čísla od jedné do 10^{2016}. Z dlouhé chvíle se rozhodl umocnit je na všechna na 2016 a následně sečíst. Určete posledních 1008 cifer čísla, které mu vyjde.

(Rado Švarc)

Řešení:
Posledních 1008 cifer nějakého čísla a je zbytek po dělení a číslem 10^{1008}, neboli $a \bmod 10^{1008}$. V našem případě tedy potřebujeme zjistit

$$\sum_{i=1}^{10^{2016}} i^{2016} \pmod{10^{1008}}.$$

Pokud si naši sumu rozdělíme na části po 10^{1008} členech, tak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{10^{2016}} i^{2016} = \sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} (j \cdot 10^{1008} + i)^{2016}.$$

Vlastnosti kongruencí zaručují, že součet ani součin modulo n nezměníme, pokud sčítance, respektive činitele vymodulíme n (jinak řečeno, pokud se díváme na posledních n cifer výsledku, můžeme se dívat jen na posledních n cifer členů), proto platí

$$\sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} (j \cdot 10^{1008} + i)^{2016} \equiv \sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} i^{2016} \pmod{10^{1008}},$$

a protože j se v této dvojsumě nevyskytuje, tak platí

$$\sum_{j=0}^{10^{1008}-1} \sum_{i=1}^{10^{1008}} i^{2016} \equiv 10^{1008} \cdot \sum_{i=1}^{10^{1008}} i^{2016} \pmod{10^{1008}}.$$

Takže vidíme, že posledních 1008 cifer našeho součtu jsou samé nuly.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná a používala stejnou myšlenku, několik málo jedinců navíc postupovalo po cifrách. Výhoda tohoto řešení je, že se dá lehce dokázat i silnější tvrzení, a to, že posledních 2015 cifer budou samé nuly. Špatná řešení se většinou starala jen o poslední cifry sčítanců, což samozřejmě nejde. *(Honza Soukup)*

Úloha 6.

Dokažte, že $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$ se dá zapsat jako rozdíl druhých odmocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel.

(Rado Švarc)

Řešení:
Indukciou ukážeme, že pre každé n prirodzené sa výraz $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}$ dá napísať ako $a_n - b_n\sqrt{2}$, kde a_n, b_n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $a_n^2 = 2b_n^2 + 1$. Potom budeme mať

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} = \sqrt{a_n^2} - \sqrt{2b_n^2} = \sqrt{a_n^2} - \sqrt{a_n^2 - 1}.$$

Z toho už okamžite dostaneme požadované tvrdenie pre $n = 1008$.

Pre $n = 1$ je
$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}.$$
Predpokladáme, že tvrdenie platí pre n, a dokážeme, že potom platí aj pre $n+1$.
$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n} &= a_n - b_n\sqrt{2} \\
\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n+2} &= \left(\sqrt{2}-1\right)^{2n}\left(\sqrt{2}-1\right)^{2} = \\
&= \left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right) = 3a_n + 4b_n - (2a_n + 3b_n)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$
Označíme $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ a $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Kedže a_n, b_n sú prirodzené, tak aj a_{n+1}, b_{n+1} sú prirodzené. Ostáva ukázať, že platí $a_{n+1}^2 = 2b_{n+1}^2 + 1$. Platí:
$$\begin{aligned}
a_n^2 &= 2b_n^2 + 1, \\
9a_n^2 + 24a_nb_n + 16b_n^2 &= 8a_n^2 + 24a_nb_n + 18b_n^2 + 1, \\
(3a_n + 4b_n)^2 &= 2\,(2a_n + 3b_n)^2 + 1, \\
a_{n+1}^2 &= 2b_{n+1}^2 + 1.
\end{aligned}$$
Tým je dôkaz hotový.

Jiné řešení:
Podľa binomickej vety rozvinieme $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$. Sčítame členy s párnou mocninou $\sqrt{2}$ a členy s nepárnou mocninou $\sqrt{2}$ a dostaneme
$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} = A - B\sqrt{2},$$
kde A, B sú prirodzené, pretože záporné členy sú práve tie, pri ktorých je $\sqrt{2}$ s nepárnou mocninou. Podľa binomickej vety rozvinieme i $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016}$. Sčítame členy s párnou mocninou $\sqrt{2}$ a členy s nepárnou mocninou $\sqrt{2}$ a dostaneme
$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016} = A + B\sqrt{2}.$$
To platí, pretože $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016}$ má po roznásobení rovnaké koeficienty ako $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$ až na znamienko pri nepárnych mocninách $\sqrt{2}$. Vynásobíme $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}$ a $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016}$:
$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016}\left(\sqrt{2}+1\right)^{2016} &= \left(A - B\sqrt{2}\right)\left(A + B\sqrt{2}\right), \\
\left(\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^{2016} &= A^2 - 2B^2, \\
(2-1)^{2016} &= A^2 - 2B^2 \\
A^2 - 1 &= 2B^2.
\end{aligned}$$
A teda dostávame
$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2016} = \left(A - B\sqrt{2}\right) = \sqrt{A^2} - \sqrt{2B^2} = \sqrt{A^2} - \sqrt{A^2 - 1}.$$
Hľadaná dvojica prirodzených čísel je A^2 a $A^2 - 1$.

Poznámky:
Mnoho riešení používalo indukciu všemožnými spôsobmi. Častou chybou potom bolo, že nič nepredpokadali o číslach pod odmocninou. Po vynásobení $(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})(\sqrt{2}-1)$ sčítali najprv členy s $\sqrt{2}$ a potom tie bez. Nakoniec obe čísla umocnili na druhú. Takto dostali dve čísla, ktoré sa navzájom líšili o 1. Bohužiaľ ale zabudli dokázať, že sú prirodzené (na to bolo treba postupovať trocha opatrnejšie alebo ešte raz použiť iný, zvlášť elegantný postup, ktorým by si vyslúžili $+i$).

(Marta Kossaczká)

Úloha 7.

Přirozené číslo n nazveme třítuctové, jestliže pro každé prvočíslo p, které dělí n, platí, že p^{36} dělí n a p^{37} už ne. Rado a Matěj mají každý konečnou množinu svých oblíbených třítuctových čísel. Zjistili, že oba mají ve svých množinách stejný počet čísel. Navíc se součin všech čísel v Radově množině rovná součinu všech čísel v Matějově množině, zatímco součty čísel v jednotlivých množinách jsou různé. Ukažte, že se součet čísel z Matějovy množiny liší od součtu čísel z Radovy množiny alespoň o milión.

(Rado Švarc)

Řešení:
Uvažujme množinu prvočísel $P = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 37\}$ a všimněme si, že pro každé $p \in P$ platí $p-1 \mid 36$. To znamená, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $p \in P$ existuje k takové, že $n^{36} = n^{k(p-1)} = \left(n^k\right)^{p-1}$. Pokud $p \mid n$, tak máme $n^{36} \equiv 0 \pmod p$, v opačném případě z Malé Fermatovy věty plyne $n^{36} = \left(n^k\right)^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Symbolem $v_p(n)$ budeme značit *p-valuaci čísla n*.[2] Z definice třítuctového čísla víme, že pro p prvočíslo a n třítuctové platí $v_p(n) \in \{0, 36\}$. To také znamená, že každé x třítuctové lze zapsat jako y^{36} pro nějaké $y \in \mathbb{N}$. I toho využijeme v důkazu následujícího pomocného tvrzení.

Lemma. *Buď X nějaká množina třítuctových čísel a $p \in P$. Označme ξ počet takových $x \in X$, pro něž platí $p \nmid x$. Potom platí*

$$\sum_{x \in X} x \equiv \xi \pmod p.$$

Důkaz. Definujme $X_p = \{x \in X : p \mid x\}$ jako množinu všech čísel z X dělitelných p a X_p' jako její doplněk v X. Potom

$$\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in X_p} x + \sum_{x \in X_p'} x.$$

Podívejme se na rovnost modulo p. Víme, že každé $x \in X_p$ je kongruentní s nulou, takže i celá suma nám do součtu přispěje nulou. Proto

$$\sum_{x \in X} x \equiv \sum_{x \in X_p'} x \pmod p.$$

Protože každé $x \in X$ je třítuctové, existuje takové $y \in \mathbb{N}$, že $x = y^{36}$. Tedy

$$\sum_{x \in X_p'} x = \sum_{y^{36} \in X_p'} y^{36}.$$

Ale pro $x \in X_p'$ platí $p \nmid x$, takže pokud $x = y^{36}$, pak i $p \nmid y$. A podle prvního odstavce víme, že pak $y^{36} \equiv 1 \pmod p$, tedy

$$\sum_{x \in X_p'} x \equiv \sum_{x \in X_p'} 1 = |X_p'| \pmod p,$$

ale protože $|X_p'| = \xi$, dostáváme

$$\sum_{x \in X} x \equiv \xi \pmod p,$$

což jsme chtěli dokázat. $\square$

Víme, že součin čísel z množiny R (jako *Radova*) je stejný jako součin čísel z množiny M (jako *moje*). Označme tento součin jako Π. Nyní uvažujme pevné prvočíslo $p \in P$, definujme ρ jako

[2] To znamená největší přirozené číslo α takové, že $p^\alpha \mid n$.

počet čísel z R dělitelných p a analogicky μ jako počet čísel z M dělitelných p. Nakonec označme $c = v_p(\Pi)$. Protože pro třítuctová čísla n je $v_p(n) \in \{0, 36\}$, vidíme, že $c = 36\rho$, ale symetricky i $c = 36\mu$. A z toho vyplývá $\rho = \mu$.

Definujme S_M jako součet čísel z M a S_R jako součet čísel z R. Potom podle lemmatu platí $S_M \equiv |M| - \mu \pmod{p}$ a $S_R \equiv |R| - \rho \pmod{p}$. Ale protože $\rho = \mu$ a $|M| = |R|$, dostáváme

$$S_M \equiv S_R \pmod{p}.$$

Poslední kongruence platí pro každé $p \in P$, a proto podle Čínské zbytkové věty platí i pro jejich součin, tedy

$$S_M \equiv S_R \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37}.$$

Ale protože víme, že $S_M \neq S_R$, musí se lišit alespoň o $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37 = 1919190 > 1000000$, čímž jsme dokázali tvrzení ze zadání.

Poznámka. Kdybychom místo Malé Fermatovy věty využili Eulerovu větu pro čísla 5, 7, 8, 13, 19, 27 a 37, dostali bychom silnější odhad, že se součty musí lišit alespoň o 69090840. (A také bychom si vysloužili $+i$.)

POZNÁMKY:
Jak sami vidíte, úloha nakonec až tak těžká nebyla, přesto přišla pouze čtyři správná řešení. Je to asi proto, že zadání vypadalo hodně nepřístupně (*„Co je to za divné podmínky?“*, *„Proč zrovna exponent 36?“*). Pokusím se nastínit, jak se na řešení dalo přijít.

Na rozdíl od skutečného výzkumu, kdy člověk neví, které parametry jsou důležité, a které naopak nikoli, u olympiádních úloh je typicky nutné využít všechny podmínky ze zadání. Pokud tedy zadání obsahuje mnoho různých podmínek, tak sice vypadá nepřívětivě, ale jen přemýšlení nad tím, proč jsou zadané zrovna takové podmínky, může člověka navést na správnou cestu.

Proč je například exponent zrovna 36? Když na konkrétní konstantě vlastně moc nezáleží, bývá v olympiádách zvykem použít aktuální letopočet.[3] Takže čím je číslo 36 zajímavé? Je to druhá mocnina, ale především má relativně hodně dělitelů. A protože každé číslo v Matějově i Radově množině je tvaru y^{36}, můžeme si s pomocí aritmetiky exponentů představit, že pracujeme s různými mocninami (druhými, třetími, čtvrtými, šestými, …), což navádí na nějaké použití Malé Fermatovy věty.

Další zajímavá podmínka je ta, že se součiny čísel v obou množinách rovnají. Úloha je jistě z teorie čísel a tam se typicky využívají prvočísla. Tak se podívejme na nějaké pevné prvočíslo p a uvědomme si, že (díky třítuctovosti) obsahují obě množiny stejný počet čísel dělitelných p. A protože mají obě množiny stejnou velikost, je v nich i stejný počet čísel nedělitelných p.

Tím jsme víceméně vytěžili zadání (ještě je potřeba věřit, že když je *milión* napsaný slovem, tak to víceméně znamená *nějaké veliké číslo*, a moc se tím nezabývat). Najednou už toho ale víme opravdu hodně, a to jsme zatím žádnou převratnou myšlenku nepředvedli, jen přímočaré úvahy. A přesto se úloha najednou zdá být mnohem přístupnější: Máme nějaké dvě množiny speciálních čísel takové, že pro každé prvočíslo p je v obou stejný počet prvků dělitelných p i stejný počet prvků nedělitelných p.

Teď už musí přijít ten nápad, že mezi děliteli čísla 36 je plno čísel tvaru $p-1$, zkusit se podívat na součty modulo příslušná prvočísla, vzpomenout si na Čínskou zbytkovou větu a zajásat, že součin použitých prvočísel je skutečně větší než milión.

Doufám, že všichni, kteří se strašidelnějšího zadání zalekli, ho příště naopak zkusí využít ve svůj prospěch.

(Matěj Konečný)

[3] Dokonce i do řešení/výsledků se často vloudí – vidíte-li podivnou úlohu, jejímž řešením mají být nějaká konkrétní čísla, zkuste, zda právě aktuální letopočet *náhodou* nevyhovuje.

Úloha 8.

Najděte všechna přirozená a taková, že pro každé přirozené n větší než 4 platí

$$2^n - n^2 \mid a^n - n^a.$$

(Rado Švarc)

Řešení:

Mějme a, které vyhovuje podmínce v zadání. Zvolme $n = p(p-1) + 2$, kde p je liché prvočíslo, které nedělí a a pro které platí $p > \left|2^a - a^2\right|$. Protože $p \geq 3$, je $n \geq 8 > 4$, takže n můžeme dosadit do vztahu v zadání a platí $2^n - n^2 \mid a^n - n^a$. Pro kterékoliv b takové, že $p \nmid b$, odvodíme platnost vztahu

$$b^{p(p-1)+2} - (p(p-1)+2)^b \equiv b^2 - 2^b \pmod{p};$$

jednak totiž z Malé Fermatovy věty dostaneme

$$b^{p(p-1)+2} \equiv \left(b^{p-1}\right)^p \cdot b^2 \equiv b^2 \pmod{p},$$

jednak z pravidel počítání s kongruencemi plyne

$$(p(p-1)+2)^b \equiv 2^b \pmod{p}.$$

Pokud za b dosadíme 2, dostaneme $2^n - n^2 \equiv 2^2 - 2^2 \equiv 0 \pmod{p}$, takže $p \mid 2^n - n^2 \mid a^n - n^a$. Ovšem pokud za b dosadíme a, dostaneme $a^n - n^a \equiv a^2 - 2^a \pmod{p}$, takže spolu s $p \mid a^n - n^a$ dostáváme $p \mid a^2 - 2^a$. Ale protože $p > |2^a - a^2|$, musí být $a^2 = 2^a$.

Odtud vidíme, že a musí být mocninou dvojky, tedy $a = 2^d$ pro nějaké nezáporné celé d. Dosazením získáme $2^{2d} = 2^{2^d}$ neboli $2^d = 2d$.

Indukcí ukážeme, že pro $k \geq 3$ je $2^k > 2k$. Pro $k = 3$ skutečně dostáváme platnou nerovnost $8 > 6$. Pokud pro $k \geq 3$ tvrzení platí, potom skutečně $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 4k > 2(k+1)$, kde poslední nerovnost plyne z $k > 1$.

Aby tedy mohlo platit $2^d = 2d$, musí být $d < 3$. Navíc $d = 0$ zjevně nevyhovuje, což nás nechává s možnostmi $d = 1$ a $d = 2$ neboli $a = 2$ a $a = 4$.

Lehce ovšem ověříme, že tyto dva případy podmínce ze zadání vyhovují. Pro $a = 2$ dostáváme v zadání vztah $2^n - n^2 \mid 2^n - n^2$, který platí triviálně. Pro $a = 4$ chceme zjistit, zda je splněno $2^n - n^2 \mid 4^n - n^4$. To ale plyne z rovnosti

$$4^n - n^4 = (2^n)^2 - \left(n^2\right)^2 = \left(2^n - n^2\right)\left(2^n + n^2\right).$$

Jediná možná řešení jsou tedy $a = 2$ a $a = 4$.

Poznámky:

Úlohu vyřešilo pět lidí, tři způsobem podobným vzorovému (za což byli odměněni $+i$) a dva lehce složitějším rozborem, v němž nejprve rozborem různých dosazení ukázali, že a musí být nějakou mocninou dvojky, z čehož následně odvodili, že při $a > 4$ by dostali větší číslo dělící menší kladné číslo.

(Rado Švarc)