Poměry

2. podzimní série — Termín odeslání: 9. listopadu 2015

Úloha 1. (3 body)

Jana, Dana a Hana organizují spolu s pěti hochy Korespondenční seminář z poměrů. Vyšlo najevo, že Jana i Dana měly v minulosti poměr se třemi organizátory a Hana dokonce se čtyřmi. Musí už nutně existovat organizátor, který měl poměr se všemi třemi organizátorkami?

Úloha 2. (3 body)

Tenista počítá svoji úspěšnost tak, že vydělí počet vyhraných zápasů počtem všech odehraných zápasů. Před začátkem turnaje byla jeho úspěšnost přesně 1/2. Během turnaje odehrál čtyři zápasy, ze kterých tři vyhrál a jeden prohrál. Po turnaji jeho úspěšnost přesáhla 0,503. Jaký nejvyšší počet zápasů mohl před turnajem vyhrát?

Úloha 3. (3 body)

Buď $ABCD$ rovnoběžník. V jakém poměru rozdělují přímky procházející vrcholem A a středy stran BC resp. CD úhlopříčku BD?

Úloha 4. (5 bodů)

Jsou dány tři kružnicové oblouky se společnými koncovými body A a B. Z bodu B vedeme dvě polopřímky tak, že obě leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce AB. První polopřímka oblouky protne postupně v bodech M_1, M_2, M_3, druhá pak postupně v bodech N_1, N_2, N_3. Dokažte, že

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|} = \frac{|N_1N_2|}{|N_2N_3|}.$$

Úloha 5. (5 bodů)

Tečny ke kružnici k se středem S se jí dotýkají v bodech K, L a protínají se v bodě M. Bod N leží na k tak, že KN je její průměr. Označme P průsečík přímek LN a KM a Q průsečík PS a MN. Vypočtěte $|MQ| / |QN|$.

Úloha 6. (5 bodů)

Pětiprvkovou množinu nenulových reálných čísel nazveme *vykutálenou*, pokud platí, že pro libovolná tři různá čísla x, y, z ležící v této množině je $xy + yz + zx$ racionální číslo. Ukažte, že poměr libovolných dvou čísel z jedné vykutálené množiny je racionální.

Úloha 7. (5 bodů)

V trojúhelníku ABC má úhel při vrcholu A velikost $60°$. Uvnitř trojúhelníka se nachází bod K, pro který $|\sphericalangle AKB| = |\sphericalangle BKC| = |\sphericalangle CKA| = 120°$. Označíme-li střed strany BC jako M, dokažte rovnost

$$\frac{|KA| + |KB| + |KC|}{|AM|} = 2.$$

Úloha 8. (5 bodů)

Pro přirozené číslo n označme jeho ciferný součet symbolem $S(n)$. Najděte největší možnou hodnotu poměru $S(n) \,/\, S(16n)$.

Poměry

2. PODZIMNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Jana, Dana a Hana organizují spolu s pěti hochy Korespondenční seminář z poměrů. Vyšlo najevo, že Jana i Dana měly v minulosti poměr se třemi organizátory a Hana dokonce se čtyřmi. Musí už nutně existovat organizátor, který měl poměr se všemi třemi organizátorkami?

(Alexander „Olin“ Slávik)

ŘEŠENÍ:
Organizátorky měly dohromady celkem deset poměrů, které můžeme rozdělit mezi pět organizátorů tak, aby každý měl právě dva. Organizátory si označíme čísly 1 až 5. Jana měla poměr s organizátory 1, 2, 3, Dana s organizátory 4, 5, 1 a Hana s organizátory 2, 3, 4, 5. Takto měl každý organizátor poměr právě se dvěma organizátorkami. Tudíž tvrzení, že vždy nutně existuje organizátor, který měl poměr se všemi třemi organizátorkami, neplatí.

POZNÁMKY:
S první úlohou si hravě poradili téměř všichni řešitelé. K vyvrácení zadaného tvrzení stačilo najít jedinou situaci, kdy žádný organizátor neměl poměr se všemi organizátorkami. To se v podobě grafů, tabulek nebo jen barvitých líčení podařilo všem, kteří správně pochopili zadání.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 2.

Tenista počítá svoji úspěšnost tak, že vydělí počet vyhraných zápasů počtem všech odehraných zápasů. Před začátkem turnaje byla jeho úspěšnost přesně $1/2$. Během turnaje odehrál čtyři zápasy, ze kterých tři vyhrál a jeden prohrál. Po turnaji jeho úspěšnost přesáhla $0{,}503$. Jaký nejvyšší počet zápasů mohl před turnajem vyhrát?

(Lucia Magurová)

ŘEŠENÍ:
Počet zápasů, které tenista vyhrál před turnajem, si označíme písmenem n. Potom víme, že před turnajem byla jeho úspěšnost $0{,}5 = \frac{n}{2n}$, takže celkový počet zápasů, které odehrál před turnajem, je $2n$. Po turnaji přibyly čtyři zápasy, z toho tři vyhrané; také však víme, že úspěšnost přesáhla hodnotu $0{,}503$. To si zapíšeme nerovnicí, kterou následně vyřešíme:

$$\begin{aligned}
\frac{n+3}{2n+4} &> 0{,}503,\\
n+3 &> 1{,}006n + 2{,}012,\\
0{,}988 &> 0{,}006n,\\
164{,}\bar{6} &> n.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že ve druhém kroku jsme násobili výrazem $2n+4$, kterým násobit můžeme, protože to je jistě kladné číslo. Nejvyšší celočíselné n splňující danou nerovnost je 164, a protože provedené úpravy byly ekvivalentní, je to také řešení naší úlohy.

Poznámky:

Úloha byla přímočará a skoro všechna řešení se ubírala stejnou cestou jako to vzorové. Těm několika řešitelům, kteří si sestavili chybnou nerovnici (zajímavé je, že každý jinou) a tu poté vyřešili, jsem strhnul jeden bod. *(Václav Rozhoň)*

Úloha 3.

Buď $ABCD$ rovnoběžník. V jakém poměru rozdělují přímky procházející vrcholem A a středy stran BC resp. CD úhlopříčku BD?

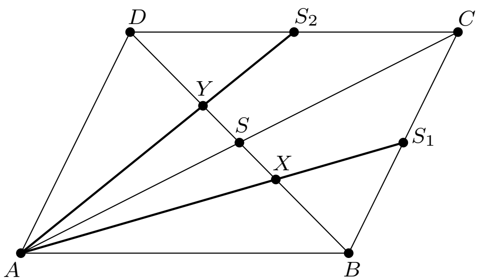
(Míša Hubatová)

Řešení:

Označme si středy stran BC, resp. CD, jako S_1, resp. S_2. Dále si označme průsečík úhlopříček AC a BD jako bod S a průsečíky BD s AS_1, resp. AS_2, jako X, resp. Y.

Úhlopříčky se v rovnoběžníku půlí, proto $|AS| = |SC|$ a $|BS| = |SD|$. V trojúhelníku ABC je proto BS těžnicí na stranu AC. Zároveň je AS_1 těžnicí na stranu CB, takže bod X je těžiště trojúhelníku ABC. Z toho plyne $|BX| = 2|XS|$, neboli $|BX| = \frac{2}{3}|BS| = \frac{1}{3}|BD|$.

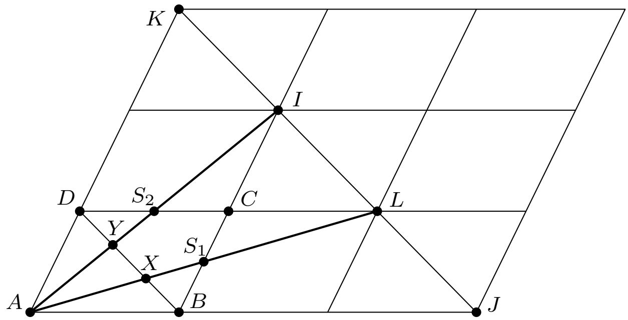
Analogicky z trojúhelníku CDA plyne $|DY| = 2|YS|$, což implikuje $|DY| = \frac{2}{3}|DS| = \frac{1}{3}|BD|$. Body X a Y jsou tedy ve třetinách úhlopříčky BD, takže $|DY| : |YX| : |XB| = 1 : 1 : 1$.



Jiné řešení:

Definujme si body X, Y, S_1 a S_2 stejně jako v minulém řešení. Posunutím rovnoběžníku $ABCD$ vytvoříme síť shodných rovnoběžníků jako na obrázku. Jako I, J, K a L si označme body zvýrazněné na obrázku. Bod B se ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem 3 zobrazí na bod J a bod D na K. Naším cílem bude ukázat, že se také zobrazí bod X na L (a analogicky také bod Y na I). Jednak je úsečka JL rovnoběžná s BD, a tedy i s BX. Dále z toho, že $ABLC$ je rovnoběžník, plyne, že jeho úhlopříčka AL půlí druhou úhlopříčku BC. Proto S_1 leží na AL, a tedy i X leží na AL. A protože obraz X je průnikem AX a rovnoběžky s BX vedené skrze obraz B, je L skutečně obrazem X.

Protože KI, IL a LJ jsou úhlopříčky ve shodných rovnoběžnících, je $|KI| = |IL| = |LJ|$. Po opětovném použití stejnolehlosti získáváme $|DY| = |YX| = |XB| = \frac{1}{3}|BD|$. Hledaný poměr tedy je $1 : 1 : 1$.



Ještě jiné řešení:

Označme si body stejně jako v prvním řešení. Z rovnoběžnosti přímek DC a AB plyne rovnost $|\sphericalangle ABY| = |\sphericalangle S_2DY|$, protože tyto dva úhly jsou střídavé. Dále platí $|\sphericalangle DYS_2| = |\sphericalangle BYA|$, protože se jedná o vrcholové úhly. Navíc platí $|DS_2| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{2}|BA|$. Proto podle věty uu dostáváme $\triangle AYB \sim \triangle S_2YD$ s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$. Z toho plyne $|DY| = \frac{1}{2}|YB|$. Analogicky dostaneme i $|BX| = \frac{1}{2}|XD|$. Z toho plyne $|DY| = |YX| = |XB|$, takže kýžený poměr je $1 : 1 : 1$.

Poznámky:

Úloha byla celkem jednoduchá, o čemž svědčí počet správných řešení. Někdy se vyskytovala řešení pro nějaké konkrétní rovnoběžníky – čtverec atd. Proto připomínám, že pokud není v zadání specifikováno jinak, myslí se obecný rovnoběžník a je nutno dokazovat vše obecně. Rozhodně se také za důkaz nepovažuje objekt narýsovaný v geogebře nebo v ruce! Pokud se dalo řešení jednoduše zobecnit, dával jsem dva body, v opačném případě nebo v případech, kdy chyběly důkazy či jejich podstatné části, jsem dával jeden.

Dalším nešvarem, vyskytujícím se u poměrně velkého množství řešitelů, je nedbat při zapisování podobnosti trojúhelníků na pořadí vrcholů. To je nutné, neboť nám pak toto pořadí udává, jaké strany jsou v jakém poměru. Při nedodržení značení získávám poměr jiných stran, než chci nebo používám v důkazu. *(Honza Kadlec)*

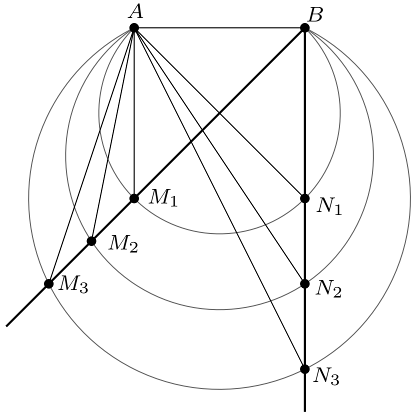
Úloha 4.

Jsou dány tři kružnicové oblouky se společnými koncovými body A a B. Z bodu B vedeme dvě polopřímky tak, že obě leží ve stejné polorovině vzhledem k přímce AB. První polopřímka oblouky protne postupně v bodech M_1, M_2, M_3, druhá pak postupně v bodech N_1, N_2, N_3. Dokažte, že

$$\frac{|M_1M_2|}{|M_2M_3|} = \frac{|N_1N_2|}{|N_2N_3|}.$$

(Martin Töpfer)

ŘEŠENÍ:



Všimneme si, že úhly AM_1B a AN_1B jsou shodné, neboť jsou to obvodové úhly oblouku AB. Obdobně jsou shodné dvojice AM_2B a AN_2B i AM_3B a AN_3B. Trojúhelníky AM_1M_2 a AN_1N_2 jsou podobné podle věty *uu* (už jsme ukázali $|\sphericalangle AM_2B| = |\sphericalangle AN_2B|$ a úhly AM_1M_2 a AN_1N_2 jsou doplňkové do $180°$ k úhlům AM_1B, resp. AN_1B, jejichž shodnost jsme si též již ukázali). Obdobně si jsou podobné i trojúhelníky AM_2M_3 a AN_2N_3. Z první podobnosti vyplývá

$$\frac{|M_1M_2|}{|N_1N_2|} = \frac{|AM_2|}{|AN_2|}$$

a z druhé

$$\frac{|M_2M_3|}{|N_2N_3|} = \frac{|AM_2|}{|AN_2|}.$$

Pravé strany jsou si rovny, takže se musí rovnat i levé, tedy

$$\frac{|M_1M_2|}{|N_1N_2|} = \frac{|M_2M_3|}{|N_2N_3|},$$

což už lze jednoduše upravit na dokazovanou rovnost.

POZNÁMKY:

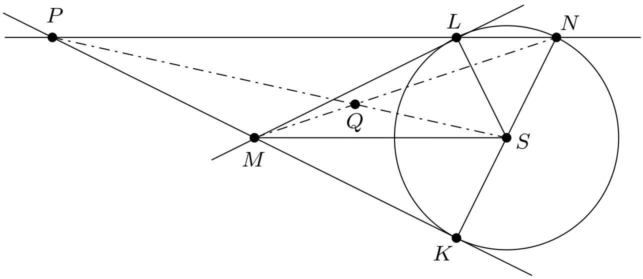
Téměř všechna řešení, která jsem opravoval, byla správně a téměř všechna správná řešení vypadala jako vzorové. Nejčastější chybou bylo, že se při dokazování shodnosti úhlů $\sphericalangle AM_1B$ a $\sphericalangle AN_1B$ řešitelé místo shodnosti obvodových úhlů snažili používat Thaletovu větu. Ta ale lze použít pouze v případě, kdy by AB byl průměr daného oblouku. V řešení, kde jsem objevil alespoň náznak toho, že autor ví, že je Thaletovu větu pro použití v tomto případě nutno nějak „zobecnit“, jsem ale za tuto chybu body nestrhával. Dalším častým problémem bylo, že mnozí nijak nedokázali a dokonce ani nezmínili, že koeficienty podobností mezi trojúhelníky jsou stejné (ve vzoráku dokázáno porovnáváním s poměrem $|AM_2| : |AN_2|$), za což jsem jeden bod strhával. *(Viki Němeček)*

Úloha 5.

Tečny ke kružnici k se středem S se jí dotýkají v bodech K, L a protínají se v bodě M. Bod N leží na k tak, že KN je její průměr. Označme P průsečík přímek LN a KM a Q průsečík PS a MN. Vypočtěte $|MQ|/|QN|$.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:



Tečny z bodu M ke kružnici k mají stejnou délku, tudíž $|MK| = |ML|$. Dále $|SK| = |SL|$, protože obě úsečky jsou poloměry kružnice k. Trojúhelníky SMK a SML jsou tedy shodné a spolu tvoří deltoid, jehož úhlopříčka SM tvoří osu druhé úhlopříčky KL.

Nyní se podívejme na trojúhelník KLP, který má pravý úhel u vrcholu L, neboť KLN je úhel nad průměrem KN v kružnici k, a proto je pravý. Střed kružnice opsané trojúhelníku KLP je střed úhlopříčky KP, který také náleží osám odvěsen. Zmíněný střed kružnice opsané musí být tedy M, protože leží na KP a ose KL. Z toho plyne, že M je střed KP. Vyšlo tak najevo, že bod Q je těžiště trojúhelníka KNP. Poměr, v kterém těžiště dělí těžnici, je přitom dobře znám – kýžený výsledek je $|MQ|/|QN| = 1/2$.

Poznámky:

Většina došlých řešení byla správná a skoro všechna spočívala v důkazu, že Q je těžiště trojúhelníka PKN jako ve vzorovém řešení, nebo že MS je rovnoběžná s PN a hledaný poměr se pak dá vypočítat z podobných trojúhelníků MQS a NQP. Dále chci upozornit, že se nesmí zapomenout na slovní definici přikreslených bodů nebo úhlů, které se nevyskytly v zadání úlohy.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Úloha 6.

Pětiprvkovou množinu nenulových reálných čísel nazveme vykutálenou, pokud platí, že pro libovolná tři různá čísla x, y, z ležící v této množině je $xy + yz + zx$ racionální číslo. Ukažte, že poměr libovolných dvou čísel z jedné vykutálené množiny je racionální.

(Rado Švarc)

Řešení:

Budeme používat skutečnost, že součet, rozdíl, součin i podíl nenulových racionálních čísel jsou také racionální. To se ukáže lehce – racionální čísla x a y zapíšeme jako $x = p/q$ a $y = r/s$, kde p, q, r a s jsou nenulová celá čísla. Potom dostáváme

$$x \pm y = \frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} = \frac{ps \pm qr}{qs} \in \mathbb{Q},$$
$$xy = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \in \mathbb{Q},$$
$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr} \in \mathbb{Q},$$

což jsme chtěli.

Nechť a a b jsou libovolné dva různé prvky vykutálené množiny M. Ukážeme, že a/b je racionální. Zbylé prvky M budeme označovat jako c, d a e. Platí $ab + bc + ca \in \mathbb{Q}$ a $ab + bd + da \in \mathbb{Q}$. Potom i rozdíl těchto dvou čísel je racionální, takže

$$(ab + bc + ca) - (ab + bd + da) = (a + b)(c - d) \in \mathbb{Q}.$$

Analogicky dostaneme i vztahy

$$(b + e)(c - d) \in \mathbb{Q} \quad \text{a} \quad (a + e)(c - d) \in \mathbb{Q}.$$

Pak ale musí být i

$$(a + b)(c - d) + (a + e)(c - d) - (b + e)(c - d) = 2a(c - d) \in \mathbb{Q}.$$

Analogicky dostaneme

$$2b(c - d) \in \mathbb{Q}.$$

Nyní si uvědomíme, že a i b jsou ze zadání nenulová. Navíc c a d jsou různé prvky, takže $c - d \neq 0$. Proto $2a(c - d) \neq 0$ a $2b(c - d) \neq 0$. A protože poměr dvou nenulových racionálních čísel je racionální, dostáváme, že

$$\frac{2a(c - d)}{2b(c - d)} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q},$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Řešení se sešlo vcelku mnoho, většina z nich ovšem byla špatně. Velká část řešitelů prohlásila, že pokud je součet tří čísel racionální, potom všechna tato čísla jsou taktéž racionální. To ale zjevně neplatí, například pro trojici $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a $-(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Většina úspěšných řešení používala stejný postup jako řešení vzorové – různým sčítáním, odčítáním a dělením čísel, o nichž je známo, že jsou racionální, dostávat další racionální čísla. Zajímavý postup, který vlastně objasňoval, proč řešení ostatních vážně funguje, zvolila *Vendula Kuchyňová*, která použila substituci $x_1 = ab$, $x_2 = ac$, …, $x_{10} = de$ a prohlásila, že ze zadání plyne, že $x_1 + x_2 + x_5 = q_1$ pro nějaké racionální q_1 a analogicky pro další součty. Tím dostala soustavu deseti lineárních rovnic o deseti neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ s racionálními parametry $q_1, q_2, \ldots, q_{10}$. Následně prohlásila, že tuto soustavu umíme vyřešit a tím každé x_i vyjádřit jako nějakou racionální kombinaci q_1 až q_{10}. V tu chvíli už víme, že součin každých dvou čísel z vykutálené množiny je racionální, a protože $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, jsme hotovi. Kvůli nejasnostem v tom, proč má daná soustava vždy jednoznačné řešení, se tak dopracovala ke kurióznímu ohodnocení $4 + i$. *(Rado Švarc)*

Úloha 7.

V trojúhelníku ABC má úhel při vrcholu A velikost $60°$. Uvnitř trojúhelníka se nachází bod K, pro který $|\sphericalangle AKB| = |\sphericalangle BKC| = |\sphericalangle CKA| = 120°$. Označíme-li střed strany BC jako M, dokažte rovnost

$$\frac{|KA| + |KB| + |KC|}{|AM|} = 2.$$

(Martin Töpfer)

Řešení:
Označíme si $x = |AK|$, $y = |BK|$, $z = |CK|$ a $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a $|\sphericalangle BAK| = \varphi$. Z toho plyne $|\sphericalangle CAK| = 60^\circ - \varphi$. Dopočítáním do 180° v trojúhelníku ABK dostaneme

$$|\sphericalangle ABK| = 180^\circ - 120^\circ - \varphi = 60^\circ - \varphi,$$

takže $\triangle ABK \sim \triangle CAK$ podle věty *uu*. Tedy $x/y = z/x$, tedy $x^2 = yz$. Nyní použijeme kosinovou větu, která tvrdí, že v libovolném trojúhelníku XYZ platí

$$|XZ|^2 = |XY|^2 + |YZ|^2 - 2 \cdot |XY| \cdot |YZ| \cdot \cos |\sphericalangle XYZ|.$$

Z rovnosti $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ plyne, že použitím kosinové věty pro trojúhelníky AKB, AKC a BKC získáme vztahy

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + z^2 + xz, \\ c^2 &= x^2 + y^2 + xy, \\ a^2 &= z^2 + y^2 + zy. \end{aligned}$$

Nyní použijeme kosinovou větu na trojúhelníky ABM a ACM. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} b^2 &= |AM|^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot |AM| \cdot \cos |\sphericalangle CMA|, \\ c^2 &= |AM|^2 + \frac{a^2}{4} - a \cdot |AM| \cdot \cos |\sphericalangle BMA|. \end{aligned}$$

Jelikož $|\sphericalangle BMA| = 180^\circ - |\sphericalangle CMA|$, tak díky vztahu $\cos\phi = -\cos(180^\circ - \phi)$ dostaneme po sečtení těchto rovností $b^2 + c^2 = 2|AM|^2 + a^2/2$. Tedy $4|AM|^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Nyní můžeme dosadit.

$$\begin{aligned} 4|AM|^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2 \\ &= 2(x^2 + z^2 + xz) + 2(x^2 + y^2 + xy) - (z^2 + y^2 + zy) \\ &= 4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - yz. \end{aligned}$$

Ze vztahu $x^2 = yz$ získáme rovnost $3x^2 = 3yz$. Tu dosadíme a dostaneme

$$4|AM|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = (x + y + z)^2.$$

Obě strany můžeme odmocnit, protože jsou nezporné, a dostaneme

$$2|AM| = |AK| + |BK| + |CK|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Druhé řešení (podle Tomáše Konečného):
Uvažujme nový trojúhelník A_1BC_1 vzniklý rotací trojúhelníku ABC kolem bodu B o 60° směrem od bodu C k bodu A. Nechť K_1 je obraz K v této rotaci. Protože otočení je shodné zobrazení, platí $|A_1K_1| = |AK|$. Navíc z $|BK| = |BK_1|$ a $|\sphericalangle KBK_1| = 60^\circ$ plyne, že $\triangle BKK_1$ je rovnostranný, takže speciálně platí $|KK_1| = |BK|$. Potom platí

$$|AK| + |BK| + |CK| = |A_1K_1| + |K_1K| + |KC|.$$

Jelikož $|\sphericalangle CKA| = 120^\circ$, po otočení AK o 60° přímky CK a K_1A_1 svírají úhel 180°, tedy A, K_1, K a C leží na jedné přímce. Z toho také plyne

$$|A_1K_1| + |K_1K| + |KC| = |A_1C|,$$

takže vlastně chceme dokázat, že $|A_1C| = 2|AM|$.

Přímky AC a BA_1 jsou rovnoběžné, jelikož $|\sphericalangle A_1BA| = |\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Střed A_1B nazvěme X. Trojúhelník A_1AB je rovnostranný a AX je jeho těžnice. Proto je zároveň jeho výškou, takže $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$. Potom $BXAC$ je lichoběžník s pravým úhlem u vrcholu X. Střed XA nazvěme Y. Potom YM je střední příčka lichoběžníka $AXBC$ a YM je kolmá na XA. Ale jelikož $|XY| = |AY|$, je $\triangle YMX$ shodný s $\triangle YMA$, tedy $|AM| = |XM|$.

V trojúhelníku BA_1C je však XM střední příčka, z čehož dostáváme $2|XM| = |A_1C|$. Proto je i $2|AM| = |A_1C|$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina řešení obsahovala tvrzení, že když máme trojúhelník splňující zadání, potom už musí být rovnostranný. To samozřejmě není pravda, bod K má každý trojúhelník. Říká se mu *Fermatův*, nebo též *Torriceliho bod* a platí pro něj spousta zajímavých věcí. Správná řešení většinou používala vzorec pro výpočet těžnice kombinovaný se vztahem $|AK|^2 = |BK| \cdot |CK|$.

Dvě řešení zase použila zobrazení, ze kterého už bylo řešení vidět. Tyto řešení jsem odměnil $+i$, jelikož byly výrazně elegantnější než algerbaické počítání. *(Jakub Svoboda)*

Úloha 8.

Pro přirozené číslo n označme jeho ciferný součet symbolem $S(n)$. Najděte největší možnou hodnotu poměru $S(n)/S(16n)$.

(Martin Töpfer)

Řešení:
Označme cifry přirozených čísel a a b tak, že $a = \sum_{i=0}^{k} 10^i a_i$ a obdobně $b = \sum_{j=0}^{l} 10^j b_j$. Nyní ukážeme několik základních tvrzení, která platí o ciferném součtu.

(1) $S(10^n a) = S(a)$: Vynásobením a mocninou desítky jen připíšeme n nul na konec čísla, ciferný součet se tedy nezmění.
(2) $S(a) \leq a$.
(3) $S(a+b) \leq S(a) + S(b)$: Podívejme se, jak se sčítají čísla a a b pod sebou. Na každém řádu je buď součet příslušných cifer z a a b, nebo dojde k přenosu jedničky. Pak se číslo na tomto řádu sníží o 10 a číslo řádu o jedna vyššího se zvýší o jedna, ciferný součet se tedy celkově sníží o 9. Proto platí dokazovaná nerovnost.
(4) $S(a \cdot b) \leq S(a) \cdot S(b)$: Násobení a a b rozepíšeme jako násobení jednotlivých cifer a následně výraz odhadneme pomocí předchozích tvrzení:

$$S(a \cdot b) = S\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_i b_j 10^{i+j}\right) \leq \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} S\left(a_i b_j 10^{i+j}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} S\left(a_i b_j\right) \leq \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_i b_j = S(a) \cdot S(b).$$

S použitím těchto pozorování již snadno odhadneme hodnotu zadaného poměru

$$\frac{S(n)}{S(16n)} = \frac{S(10000n)}{S(16n)} \leq \frac{S(625) \cdot S(16n)}{S(16n)} = 13.$$

Poměr může nabývat hodnoty nejvýše 13. Této hodnoty dosáhneme např. pro $n = 625$.

Poznámky:
Sešlo se nebývalé množství řešení osmičky, ale bohužel většina řešení sice našla maximální hodnotu, ale chyběla hlavní část úlohy – dokázat, že jde skutečně o maximum. Nejčastější chybný argument byl, že pro maximalizaci hodnoty zlomku stačí minimalizovat hodnotu jmenovatele. To není pravda už jen proto, že pro libovolně velký jmenovatel dokážeme nalézt n, aby hodnota zlomku byla 13 (n-krát za sebe napíšeme 625). Dalším jednoduchým příkladem, proč taková úvaha nebude správná, je maximalizace hodnoty nějakého jiného zlomku – například n^2/n. Podle předchozího argumentu by takový zlomek nabýval hodnoty nejvýše 1 (pro $n = 1$). V některých řešeních byl i pokus o rozebrání jiných hodnot n než 625, ale většinou i tato řešení rozebrala jen některé hodnoty n, o kterých řekla (bez zdůvodnění), že budou nejlepší.

Obecně u podobných úloh je úvaha založená na myšlence, že nějaký konkrétní postup (zde $S(n) = 1$) bude nejlepší, většinou nevede k cíli. Často je totiž popsaný postup založený na nějaké lokální optimalizaci nebo na pouhé intuici řešitele. Ani jedna z těchto věcí ale nezaručuje optimální výsledek a u opravovatele neprojde.

Úlohu jsem se rozhodl bodovat velmi přísně a dost pravděpodobně jde o úlohu s nejnižším bodovým průměrem za poslední dobu. Za pouhé najití n, pro které má zlomek hodnotu 13, jsem neuděloval žádný bod. Stejně tak si body nevysloužily ani řešení založená na nějaké variaci argumentu zmíněného v poznámkách, protože podobný postup by nebylo možné nějak jednoduše rozšířit tak, aby šlo o řešení úlohy. U lehčí úlohy bych zřejmě i za částečné výsledky nějaké body uděloval, ale u osmé (tj. teoreticky nejtěžší) úlohy v sérii mi přijde, že by mělo být vyžadováno úplné řešení. *(Martin Töpfer)*