Průsečíky

3. jarní série — Termín odeslání: 11. dubna 2016

Úloha 1. (3 body)
Umístěte do roviny kružnici a libovolný počet přímek tak, aby vzniklo právě pět průsečíků a ty tvořily vrcholy pravidelného pětiúhelníku.

Úloha 2. (3 body)
V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 32^\circ$. Výška na stranu AB protíná osu úhlu u vrcholu A na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Určete velikost úhlu BCA.

Úloha 3. (3 body)
Na kružnici k leží body A a B tak, že AB není průměrem k. Uvnitř kratšího oblouku AB se pohybuje bod Y. Spolu s ním se po k pohybuje i bod X tak, že XY je vždy průměrem k. Ukažte, že existuje kružnice ℓ taková, že průsečík AX a BY leží na ℓ pro všechny uvažované polohy bodů X a Y.

Úloha 4. (5 bodů)
Na kružnici ω se středem O leží body A, B, C a D tak, že AB a CD jsou navzájem kolmé průměry. Bod M leží uvnitř úsečky AB. Nechť N je průsečík CM s ω různý od C. Tečna k ω vedená bodem N protne kolmici z M na AB v bodě P. Ukažte, že $|PO| = |MC|$.

Úloha 5. (5 bodů)
Uvnitř čtverce o straně 1008 leží 2016 úseček délky jedna. Ukažte, že existuje přímka rovnoběžná s některou stranou čtverce, která protíná[1] alespoň dvě ze zadaných úseček.

Úloha 6. (5 bodů)
Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB|+|CD| = |BC|$. Označme průsečík os úhlů ABC a BCD jako E a průsečík polopřímek $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$ jako F. Dokažte, že $FAED$ je tětivový čtyřúhelník.

Úloha 7. (5 bodů)
Uvnitř strany AC trojúhelníku ABC leží bod D. Nechť P je průsečík os úhlů BAC a BDC a Q je průsečík os úhlů BCA a BDA. Ukažte, že střed M úsečky PQ splňuje $|MD| > |MB|$.

Úloha 8. (5 bodů)
V rovině leží 2016 jednotkových kružnic tak, že se žádné dvě nedotýkají a každá protíná alespoň tři jiné. Kolik nejméně průsečíků mohou určovat?

[1] Průsečíkem s úsečkou může být i její krajní bod.

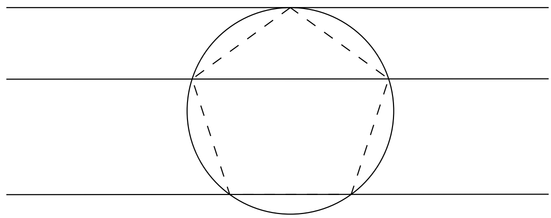
Průsečíky

3. jarní série Vzorové řešení

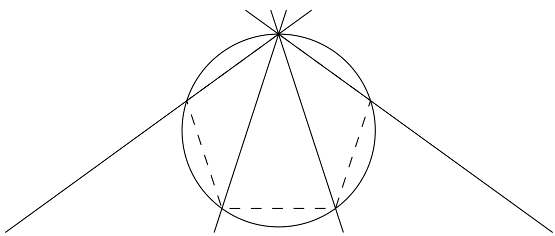
Úloha 1.

Umístěte do roviny kružnici a libovolný počet přímek tak, aby vzniklo právě pět průsečíků a ty tvořily vrcholy pravidelného pětiúhelníku. *(David Hruška)*

První řešení:
Umístíme do roviny kružnici. Podíváme se, kde by měl vrcholy nějaký pravidelný pětiúhelník jí vepsaný. V jednom z vrcholů zkonstruujeme tečnu ke kružnici. Další přímku proložíme dvěma sousedními vrcholy. Poslední přímku proložíme zbývajícími dvěma vrcholy. Ze symetrie pravidelného pětiúhelníka plyne, že přímky jsou rovnoběžné, a tedy žádné další průsečíky nevzniknou.



Druhé řešení:
Stejně jako v prvním řešení umístíme do roviny kružnici a podíváme se, kde by měl vrcholy nějaký pravidelný pětiúhelník jí vepsaný. Jeden z vrcholů si vybereme. Potom vytvoříme čtyři přímky – každou z přímek proložíme vybraným vrcholem a jedním ze čtyř zbývajících vrcholů.



Poznámky:
Úloha byla jednoduchá a správných řešení přišla spousta. Někteří se pustili i do konstrukce pětiúhelníka pomocí pravítka a kružítka, která už je trochu náročnější. Že takovou konstrukci lze provést, není vůbec samozřejmé – třeba pravidelný sedmiúhelník pomocí pravítka a kružítka zkonstruovat nelze. *(Tonda Češík)*

Úloha 2.

V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 32°$. Výška na stranu AB protíná osu úhlu u vrcholu A na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Určete velikost úhlu BCA.

(David Hruška)

Řešení:

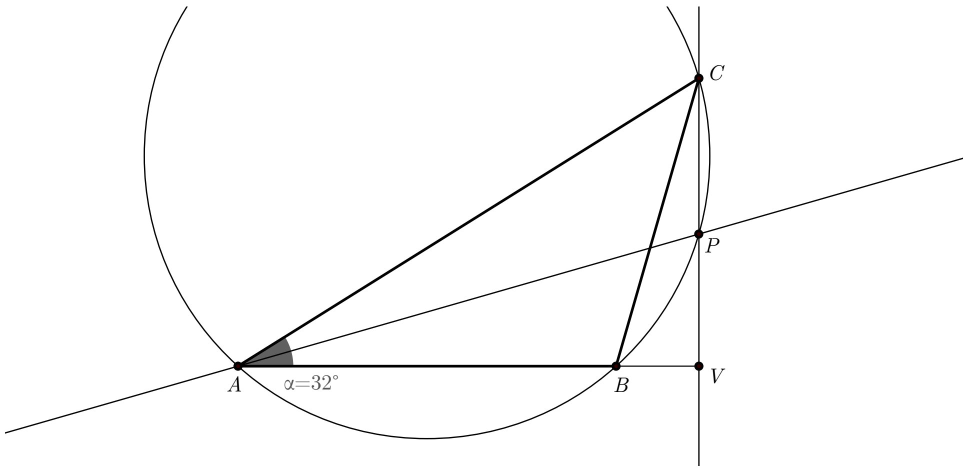
Označme průsečík výšky na stranu AB s opsanou kružnicí a osou úhlu $\sphericalangle BAC$ jako P a patu výšky z C na přímku AB jako V. Body A, B, P a C leží v tomto pořadí na jedné kružnici (viz obrázek), což plyne ze zadání a z toho, že AP je osou úhlu BAC. Z věty o obvodových úhlech plyne

$$|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle BAP| = \frac{|\sphericalangle BAC|}{2} = 16°.$$

Nyní z trojúhelníku AVC víme

$$180° = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle AVC| + |\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle BCA| = 32° + 90° + 16° + |\sphericalangle BCA|.$$

Úhel BCA má tedy velikost 42°.



Poznámky:

Chtěl bych poděkovat těm, kteří k řešení přikládají obrázky. Velmi to usnadňuje opravování (a vám psaní řešení). Navíc v obrázku jsou věci dohledatelné – jako třeba když se překlepnete při psaní úhlu apod.

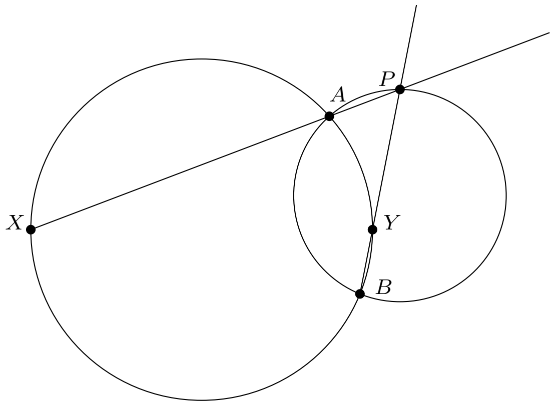
Znovu chci připomenout, že řešení spočtené počítačem či GeoGebrou nebereme a bude hodnoceno nulou, i kdyby bylo správně. *(Honza Kadlec)*

Úloha 3.

Na kružnici k leží body A a B tak, že AB není průměrem k. Uvnitř kratšího oblouku AB se pohybuje bod Y. Spolu s ním se po k pohybuje i bod X tak, že XY je vždy průměrem k. Ukažte, že existuje kružnice ℓ taková, že průsečík AX a BY leží na ℓ pro všechny uvažované polohy bodů X a Y.

(Rado Švarc)

Řešení:



Průsečík XA a BY označíme P. Úsečka XY je průměrem kružnice, úhel XBY je tedy pravý. Úhel AXB je pro všechny polohy bodu X stejný, protože je to obvodový úhel příslušný k tětivě AB. To znamená, že v trojúhelníku XBP se dva úhly při pohybu bodu X nemění, nemění se tedy ani ten třetí. Nyní si stačí všimnout, že body A a B se nepohybují a úsečka AB je ze všech možných bodů P vidět pod stejným úhlem. Protože všechny body P jsou ve stejné polorovině určené touto úsečkou, leží spolu s body A a B na jedné kružnici, jejíž poloměr je daný velikostí úhlu APB.

Poznámky:
Všechna správná řešení, která nám přišla, více či méně kopírovala vzorák. V mnohých řešeních se stalo, že autor našel kružnici, na které bod P leží, ale už neukázal (a mnohdy ani nemohl, neboť by to nebyla pravda), že se tato kružnice při pohybu bodů X a Y nepohybuje.

Velmi častým nešvarem bylo zavádění značení, aniž by předem bylo popsáno jinak než náčrtkem, jaké body a úhly dané symboly značí. Většinou je při používání nějakého bodu, úhlu či přímky, která není pojmenována už v zadání, vhodné, aby před jeho prvním použitím bylo napsáno, který bod přesně pojmenováváme. *(Viki Němeček)*

Úloha 4.

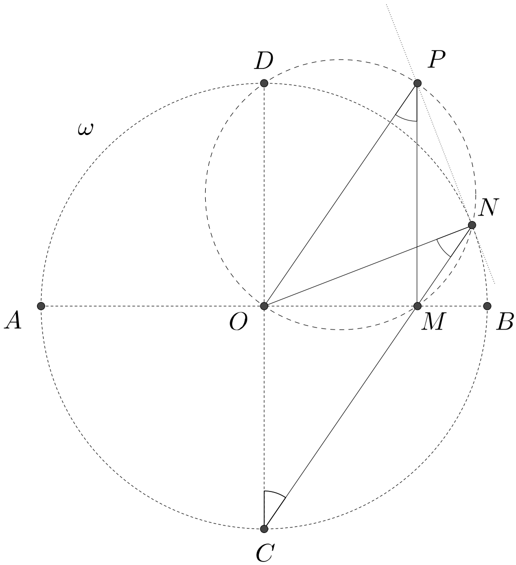
Na kružnici ω se středem O leží body A, B, C a D tak, že AB a CD jsou navzájem kolmé průměry. Bod M leží uvnitř úsečky AB. Nechť N je průsečík CM s ω různý od C. Tečna k ω vedená bodem N protne kolmici z M na AB v bodě P. Ukažte, že $|PO| = |MC|$.

(Rado Švarc)

Řešení:
Ze všeho nejdřív si uvědomme, že pokud body O a M splynou, dokazované tvrzení určitě platí. Dále tedy předpokládejme, že bod O je různý od M. Nyní dokážeme, že čtyřúhelník $OCMP$ je rovnoběžník, a tím vyřešíme i naši úlohu (protější strany rovnoběžníku jsou stejně dlouhé).

Dvě protější strany OC a MP našeho čtyřúhelníku jsou ze zadání rovnoběžné (obě jsou kolmicemi na AB). Dokážeme to i pro druhou dvojici stran CM a PO. Nejprve si povšimněme, že úhly OMP a ONP jsou pravé. To proto, že úsečka MP je kolmá na AB a NP je zase tečnou na ω

v bodě N. Podle Thaletovy věty tak body O, M, N a P leží na společné kružnici s průměrem OP. Proto také $|\sphericalangle OPM| = |\sphericalangle ONM|$ (jedná se o obvodové úhly nad stejnou úsečkou). Stejně velké jsou i úhly ONC a OCN, jelikož trojúhelník OCN je rovnoramenný. Tedy úhly OCN a OPM jsou shodné. Přímky CM a OP tak protínají dvě rovnoběžky pod stejným úhlem, jsou proto samy rovnoběžné a $OCMP$ je rovnoběžník.



Poznámky:

Možná jste si povšimli, že na kružnici s průměrem OP leží i bod D. Tuto pozoruhodnou vlastnost jsme zamlčeli, neboť ve vzorovém řešení nebyla potřeba. Někteří z Vás ji však využili spolu s faktem, že čtyřúhelník $OMPD$ je obdélník. Ještě více řešitelů pak dokazovalo shodnost trojúhelníků MNO a NMP.

Nakonec musím velké části řešitelů vyčinit, neboť pouze tři z vás zmínili, že body M a O mohou splynout. Jakkoli je tento případ jednoduchý, ve správném řešení by neměl chybět, protože obecný důkaz pro něj obvykle nefunguje nebo je přinejmenším problematický (například již nemůžeme argumentovat úhly OMP či MOC). *(Vašek Rozhoň)*

Úloha 5.

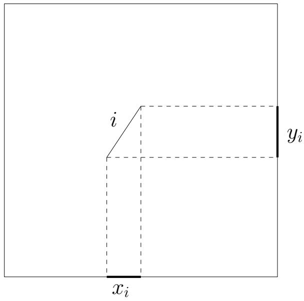
Uvnitř čtverce o straně 1008 *leží* 2016 *úseček délky jedna. Ukažte, že existuje přímka rovnoběžná s některou stranou čtverce, která protíná*[1] *alespoň dvě ze zadaných úseček.*

(Rado Švarc)

Řešení:

Očíslujme si úsečky čísly od 1 do 2016. Pro každou úsečku i označme x_i její kolmý průmět na dolní stranu čtverce, y_i na stranu pravou.

[1] Průsečíkem s úsečkou může být i její krajní bod.



Jelikož úsečky mají délku jedna a úsečky i, x_i a y_i tvoří (případně degenerovaný) pravoúhlý trojúhelník, z trojúhelníkové nerovnosti dostáváme, že

$$x_i + y_i \geq 1$$

pro každé i od 1 do 2016. Sečteme-li tyto nerovnice, dostaneme

$$\sum_{i=1}^{2016} (x_i + y_i) \geq 2016. \qquad [1]$$

Pro spor předpokládejme, že žádná přímka rovnoběžná se stranami čtverce neprotíná dvě různé úsečky. Potom se ale žádné dva kolmé průměty úseček na jednu stranu čtverce nesmějí protínat (ani dotýkat krajním bodem), tudíž nezabírají celou stranu. Proto musí platit

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i < 1008, \qquad \sum_{i=1}^{2016} y_i < 1008.$$

Jejich sečtením dostaneme

$$\sum_{i=1}^{2016} (x_i + y_i) < 2016.$$

Což je ovšem spor s [1]. Tudíž hledaná přímka musí existovat, což jsme měli dokázat.

Poznámky:

Přestože úloha patřila mezi lehčí pětibodovky, přišlo poměrně dost částečně či zcela špatných řešení. Nejčastější chybou bylo dokázání existence přímky pro „nejhorší“ případ, tj. situace, kdy jsou všechny úsečky rovnoběžné se stranami. Ovšem jednak je třeba vyřešit všechna rozmístění úseček (nebo alespoň dokázat, že je skutečně „nejhorší“) a také tento případ nemusí být nutně nejhorší. Při dodržování rovnoběžnosti všech úseček se stranami by nebylo možné umístit ani 2015 úseček, přičemž pokud by jedna z úseček byla o libovolně malý kousek kratší, tak lze dokonce umístit všech 2016.

Druhým prohřeškem bylo opomenutí rovnosti u trojúhelníkové nerovnosti, za což jsem strhnul bod těm, kteří neukázali, že součet všech délek musí být ostře menší než 2016, tudíž jejich spor nefungoval. *(Tomáš Novotný)*

Úloha 6.

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB|+|CD| = |BC|$. Označme průsečík os úhlů ABC a BCD jako E a průsečík polopřímek $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{CD}$ jako F. Dokažte, že $FAED$ je tětivový čtyřúhelník.

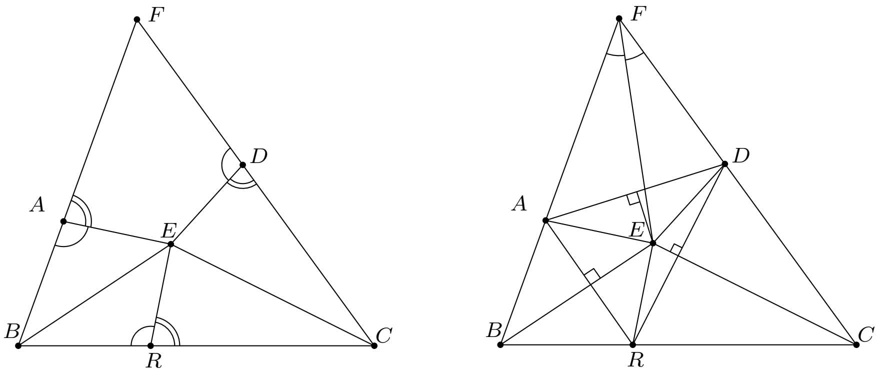
(Rado Švarc)

Řešení:

Díky podmínce $|AB| + |CD| = |BC|$ umíme na BC najít takový bod R, že platí $|AB| = |BR|$ a $|RC| = |CD|$. Protože $|AB| = |BR|$, $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EBR|$ a $|BE| = |BE|$, jsou z věty *sus* trojúhelníky ABE a RBE shodné. Analogicky dostaneme shodnost trojúhelníků DCE a RCE. Potom ale $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BRE|$ a $|\sphericalangle CRE| = |\sphericalangle CDE|$. A dále

$$|\sphericalangle FAE| = 180^\circ - |\sphericalangle BAE| = 180^\circ - |\sphericalangle BRE| = |\sphericalangle ERC| = |\sphericalangle EDC| = 180^\circ - |\sphericalangle EDF|.$$

Z toho už plyne, že $FAED$ je tětivový čtyřúhelník.



Nástin jiného řešení:

Opět zkonstruujeme bod R tak jako v předchozím řešení. Protože trojúhelníky ABR a RCD jsou rovnoramenné, je osa $\sphericalangle ABR$ zároveň osou úsečky AR. Protože E leží na ose $\sphericalangle ABR$, leží i na ose AR. Analogicky E leží i na ose RD. Proto je E středem kružnice opsané $\triangle ARD$, takže leží i na ose AD. Protože E je průsečík os úhlů $\sphericalangle FBC$ a $\sphericalangle BCF$, jedná se o střed kružnice vepsané $\triangle BFC$. Proto leží i na ose úhlu $\sphericalangle CFB$.

Pokud $|FA| \neq |FD|$, pak E je jediný průsečík osy AD a osy $\sphericalangle AFD$, takže se jedná o Švrčkův bod v trojúhelníku AFD. Tudíž leží na kružnici opsané $\triangle AFD$ a jsme hotovi. Pokud $|FA| = |FD|$, jsou A, R a D body dotyku kružnice vepsané $\triangle BFC$ se stranami. Proto $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle EDF| = 90^\circ$, takže A a D leží na kružnici nad průměrem EF a jsme hotovi.

Poznámky:

Potěšilo mne, že naprostá většina došlých řešení si vysloužila čtyři body a více. Mnozí jste úhlili přes úhly $\sphericalangle AED$ a $\sphericalangle AFD$, což bylo obvykle trochu složitější a ošklivější. Ti, kteří postupovali jedním ze vzorových přístupů, jež vyžadovaly jen velmi málo úhlení, si vysloužili *i*čko. Při druhém přístupu bohužel všichni až na *Františka Coufa* zapomněli na výjimku v případě $|AF| = |DF|$, čímž si vysloužili paradoxní ohodnocení $4 + i$.

(Rado Švarc)

Úloha 7.

Uvnitř strany AC trojúhelníku ABC leží bod D. Nechť P je průsečík os úhlů BAC a BDC a Q je průsečík os úhlů BCA a BDA. Ukažte, že střed M úsečky PQ splňuje $|MD| > |MB|$.

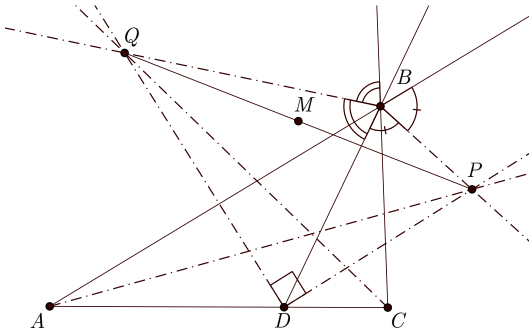
(Rado Švarc)

Řešení:

Osy vedlejších úhlů jsou na sebe kolmé, takže $DQ \perp DP$. Bod M je proto jakožto střed přepony středem kružnice opsané pravoúhlého trojúhelníku PQD. Protože bod Q leží na příslušných osách úhlů, je středem kružnice připsané straně BD v trojúhelníku CBD, takže BQ je osa úhlu vedlejšího k $\sphericalangle DBC$. Analogicky je BP osou úhlu vedlejšího k $\sphericalangle ABD$. Pro úhly u vrcholu B spočteme

$$|\sphericalangle PBQ| = \frac{360^\circ - |\sphericalangle ABC|}{2} = 180^\circ - \frac{|\sphericalangle ABC|}{2} > 90^\circ,$$

protože $|\sphericalangle ABC| < 180^\circ$. Jelikož je $\sphericalangle PBQ$ tupý, leží bod B uvnitř kružnice nad průměrem PQ. To znamená, že úsečka MB je kratší než poloměr zmíněné kružnice, což je mimo jiné hodnota $|MD|$.



Poznámky:

Téměř všechna správná řešení postupovala podobně jako vzorové, které není složité, ale trochu trikové. Asi proto se sešlo jen sedmnáct řešení a jejich velká většina byla hodnocena pěti body. Poučení z řešení plyne asi takové, že osy úhlů jsou dobré – generují další osy a často i pravé úhly. A na konec moje prosba a výzva všem geometrům: „Kreslete do řešení obrázky! Zejména pokud používáte hodně značení a definujete si objekty, které nejsou v zadání.“ *(David Hruška)*

Úloha 8.

V rovině leží 2016 jednotkových kružnic tak, že se žádné dvě nedotýkají a každá protíná alespoň tři jiné. Kolik nejméně průsečíků mohou určovat?

(Rado Švarc)

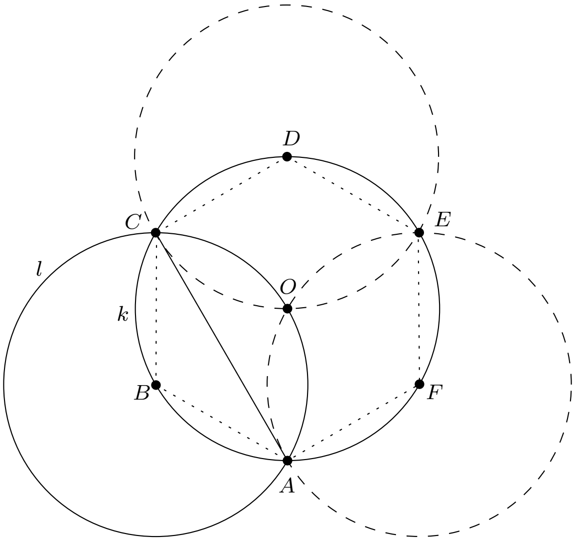
Řešení:

Dokážeme, že hledaným číslem je 2016. Důkaz se bude skládat ze dvou částí. Nejprve dokážeme, že 2016 průsečíků lze dosáhnout (najdeme takové rozmístění kružnic) a potom dokážeme, že každé rozmístění obsahuje alespoň 2016 průsečíků.

Definice. Mějme nějaké rozmístění n kružnic v rovině. Takové rozmístění označíme jako *vyhovující*, pokud se žádné dvě kružnice nedotýkají a každá protíná alespoň 3 další.

Tvrzení. *Existuje vyhovující rozmístění 2016 jednotkových kružnic, které určuje 2016 průsečíků.*

Důkaz. Použijeme 504 kopií konfigurace čtyř kružnic z obrázku, přičemž jednotlivé kopie se navzájem nedotýkají ani neprotínají. Protože každá kopie určuje 4 průsečíky, budeme mít skutečně 2016 průsečíků.



Nyní je jen třeba ukázat, že jsou kružnice skutečně jednotkové. A na to nejprve musíme konfiguraci pořádně popsat:

Mějme jednotkovou kružnicí k se středem O, které vepíšeme pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$. Následně nakreslíme kružnice opsané trojúhelníkům ACO, CEO a EAO.

Nyní dokážeme, že kružnice ACO (analogicky pak i CEO a EAO) je jednotková. Označme tuto kružnici l. S k má l společnou tětivu AC. A protože $ABCDEF$ je pravidelný šestiúhelník se středem O, jsou trojúhelníky ACB a ACO shodné, tedy speciálně tětivě AC na kružnici k i l přísluší stejný obvodový úhel, a proto jsou k a l shodné, což znamená, že l je také jednotková.

Než se pustíme do spodního odhadu, dokážeme si jedno pomocné lemma.

Lemma. *Mějme vyhovující rozmístění n kružnic a k buď nějaká z nich. Dále označme x_k počet průsečíků, které leží na k, a libovolný z těchto průsečíků nazvěme A. Pak bodem A prochází nejvýše x_k kružnic.*

Důkaz. Každá kružnice $l \neq k$, která prochází A, tam k protíná. A protože se žádné dvě kružnice nedotýkají, má l s k i druhý průsečík (označme ho B). Bodem B neprochází žádná další kružnice, která prochází A, protože dva různé body určují maximálně dvě různé jednotkové kružnice. Proto každé kružnici různé od k a procházející A můžeme přiřadit unikátní průsečík na k různý od A. Takových průsečíků je $x_k - 1$, a proto je kružnic procházejících A maximálně x_k (k a $x_k - 1$ dalších).

Tvrzení. *Každé vyhovující rozmístění n jednotkových kružnic určuje alespoň n průsečíků.*

Důkaz. Pokud nějaké dvě kružnice splývají, tak vytvářejí nekonečně mnoho průsečíků, tedy dále předpokládejme, že žádné dvě kružnice nesplývají.

Každý průsečík od nás dostane jedno euro,[2] které spravedlivě rozdělí všem kružnicím, které přes něj procházejí. (Tedy pokud průsečíkem prochází x kružnic, každá dostane $\frac{1}{x}$ €.) Spočítáme dvěma způsoby, jak bohatá je naše konfigurace. Celkový počet eur je zřejmě stejný jako počet

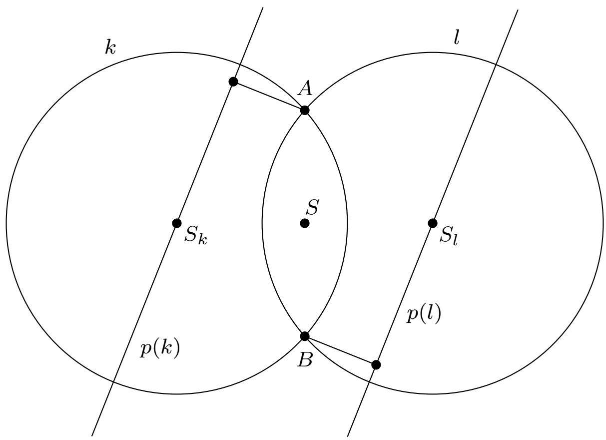
[2]Nebo libovolnou jinou měnu podle toho, co zrovna máme k dispozici.

průsečíků. Nyní odhadneme počet eur pomocí počtu kružnic. Dokážeme, že každá kružnice má celkovou hodnotu alespoň 1 €.

Vezměme si nějakou kružnici k a označme x_k počet průsečíků, které na ní leží. Podle lemmatu každým průsečíkem prochází maximálně x_k kružnic, a proto k od každého průsečíku dostane alespoň $\frac{1}{x_k}$ €. To znamená, že celkem dostane alespoň $x_k \cdot \frac{1}{x_k} = 1$ €. A tedy celkový počet eur v naší konfiguraci je větší nebo roven počtu kružnic. Tedy i počet průsečíků je alespoň počet kružnic, což jsme chtěli dokázat. □

Důkaz. (Alternativní, podle *Filipa Bialase.*) Mějme vyhovující rozmístění n jednotkových kružnic. Každé kružnici přiřadíme nějaký průsečík tak, že žádným dvěma kružnicím nepřiřadíme stejný průsečík.

Zvolme si nějaký směr v rovině tak, aby nebyl rovnoběžný s žádnou spojnicí dvou středů kružnic nebo dvou průsečíků. To jistě můžeme udělat, neboť středů i průsečíků je jen konečně mnoho (předpokládáme, že žádné dvě kružnice nesplývají). Středem každé kružnice veďme přímku s tímto směrem. Pro kružnici k označíme příslušnou přímku $p(k)$. Platí $p(k) \neq p(l)$ pro $k \neq l$, protože směr přímky není rovnoběžný se spojnicí žádných dvou středů. Nyní kružnici k přiřadíme takový z průsečíků ležících na k, který je k $p(k)$ nejblíže. (Protože k není rovnoběžná s žádnou spojnicí dvou průsečíků, je toto zobrazení dobře definované.)



Sporem ukážeme, že naše zobrazení je prosté. Předpokládejme, že máme dvě různé kružnice k, l a oběma jsme přiřadili stejný průsečík A. Ten leží na obou z nich, a tedy existuje ještě jejich druhý společný průsečík B. Označme S_k, S_l středy k, l a S střed úsečky S_kS_l. Středová souměrnost se středem v S na sebe převede kružnice k, l, průsečíky A, B i přímky $p(k), p(l)$. Předpokládali jsme, že $d(A, p(k)) < d(B, p(k))$ a zároveň $d(A, p(l)) < d(B, p(l))$. Po použití středové souměrnosti se z první nerovnosti stane $d(B, p(l)) < d(A, p(l))$, což je spor s druhým předpokladem.

□

Poznámky:

Překvapilo mě, jak málo řešení přišlo – od *i*KSkařů, vítězů MO a aspirantů na místo v IMO týmu jsem čekal víc. Možná si roli zahrál nabitý program celý měsíc před termínem odeslání.

Ačkoliv to zní jako klišé z poznámek opravovatele, skutečně si nemyslím, že by úloha byla nedatelná. Na konstrukci se rozhodně přijít dá (stačilo to na 1 bod) a je docela uvěřitelné, že to lépe nepůjde. To je samozřejmě třeba dokázat. Důkaz s eury mi přijde dost trikový (přestože dvě ze tří správných řešení používala ten), ale řešení Filipa Bialase se mi moc líbí především svou přímočarostí:

Chci ukázat, že průsečíků je alespoň tolik jako kružnic. Tak se přirozeně nabízí každé kružnici přiřadit unikátní průsečík. Dává smysl přiřazovat kružnici průsečík, který na ní leží. Tak si vezměme nějaké takové zobrazení a podívejme se, co se stane, když dvěma kružnicím přiřadí stejný průsečík. Ten průsečík leží na obou kružnicích, ale tyto kružnice mají ještě druhý společný průsečík. Takže by bylo super, kdyby zobrazení jedné přiřadilo jeden průsečík a druhé ten druhý. A teď si stačí vzpomenout, že olympiádní úlohy z kombinatorické geometrie se obvykle řeší nějakým extremálním principem, a přijít s tou správnou myšlenkou. *(Matěj Konečný)*