

# Úlohy na šachovnici

3. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. PROSINCE 2015

*Upozorňujeme, že první seriálová série má datum odeslání společný s touto sérií.*

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Rozmístěte na šachovnici  $6 \times 6$  čtyři *tchýně*<sup>1</sup> tak, aby se navzájem neohrožovaly a právě jedno volné pole zůstalo neohrožené.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

V rozích šachovnice  $3 \times 3$  stojí dokola postupně Šemík, Rosinanta, Stínovlas a Trojský kůň. Všichni se mohou pohybovat jako šachoví koně a nesmí stát dva na stejném poli. Je možné, aby se za těchto podmínek Šemík s Rosinantou prohodili a ostatní se vrátili na svá původní místa?

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Obarvěte sedm polí šachovnice  $4 \times 4$  tak, aby na ní po odebrání libovolných dvou sloupců a dvou řádků zůstalo alespoň jedno obarvené pole.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Najděte všechna přirozená  $n$ , pro která lze rozdělit šachovnici  $n \times n$  na lichý počet čtverců  $2 \times 2$  a několik<sup>2</sup> tetromin tvaru T.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Kuba a Bára spolu hrají hru. Na začátku mají šachovnici  $2015 \times 2015$ , kde jsou všechna políčka bílá. Kuba v každém svém tahu přebarví nějaký bílý čtverec  $2 \times 2$  na černo, Bára vždy přebarví nějaká tři bílá políčka tvořící jakkoliv orientované L. Pravidelně se střídají v tazích, přičemž Kuba začíná. Prohrává ten, kdo jako první nemůže táhnout. Který z nich má vyhrávající strategii?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Dva kamarádi, Plusík a Mínusík, našli šachovnici  $3 \times 3$  vyplněnou v nějakém pořadí čísla 1 až 9. Plusík umí ke všem číslům v libovolném čtverci  $2 \times 2$  přičíst jedničku, Mínusík umí analogicky odčítat. Poté, co si s šachovnicí chvíli takto hráli, objevilo se ve všech jejich políčkách stejné číslo. Kolik to mohlo být?

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Na šachovnici  $2015 \times 2015$  stálo 2015 věží, z nichž se žádné dvě neohrožovaly. Náhle se všechny proměnily v tchýně, udělaly jeden tah jako koně a proměnily se zpět ve věže. Dokažte, že nyní se nutně nějaké dvě z nich ohrožují.

---

<sup>1</sup>Tchýně je figura pohybující se po šachovnici pomocí tahů koně i věže.

<sup>2</sup>Nemusí být použito žádné.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Kouzelníci Štěpán a David si pro Rada připravili trik s šachovnicí  $n \times n$ . Nejprve David odešel pryč, aby nic neviděl ani neslyšel. Poté Štěpán Radovi nakázal, ať na každé políčko položí dle své vůle buď bílý, nebo černý knoflík. Následně ho nechal, aby zvolil libovolné políčko  $A$  a sdělil mu, které to je. Nato si Štěpán vybral políčko  $B$  (ne nutně různé od  $A$ ) a změnil barvu knoflíku, který na  $B$  ležel. Když potom přišel David, byl schopný pouze z pohledu na šachovnici uhodnout, které políčko  $A$  si Rado vybral. Pro která  $n$  je tento trik proveditelný?

# Úlohy na šachovnici

3. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

Rozmístěte na šachovnici  $6 \times 6$  čtyři tchýně<sup>1</sup> tak, aby se navzájem neohrožovaly a právě jedno volné pole zůstalo neohrožené.

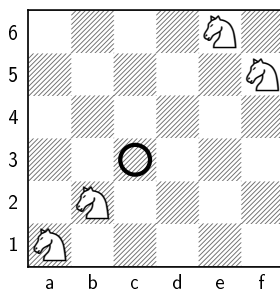
(Martin Töpfer)

ŘEŠENÍ:

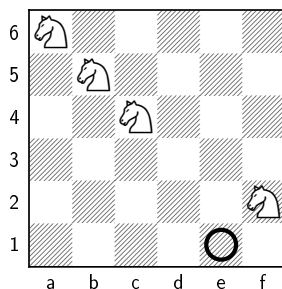
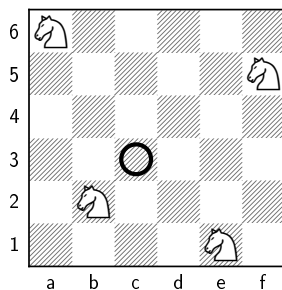
V této úloze bylo úkolem najít vyhovující rozestavení tchyní. Možností, jak nějaké takové najít, existuje mnoho. My si ukážeme, jaké úvahy nám v hledání mohou pomoci.

Začneme pozorováním, že žádné dvě tchyně se nemohou vyskytovat ve stejném řádku ani sloupci, protože by se jinak ohrožovaly tahem věže. Právě čtyři řádky a čtyři sloupce tedy budou obsazeny tchyní. Dva neobsazené řádky a sloupce nám pak určují čtyři políčka, která tchyně nebudou ohrožovat tahem věže. Víme, že jedno z těchto polí musí zůstat neohrožené a zbylá tři musí být tchyněmi ohrožena tahem koně.

Nyní se můžeme zaměřit na ta rozestavení, kde jsou neobsazené právě dva prostřední sloupce a dva prostřední řádky. Po chvíli zkoušení pak dojdeme k jednomu z rozestavení na prvních dvou obrázcích (či k rozestavení, které z těchto dvou vznikne tak, že šachovnici otočíme, či překlopíme podle jedné z jejích os symetrie).



<sup>1</sup>Tchyně je figura pohybující se po šachovnici pomocí tahů koně i věže.



Jinou možností je začít s rozestavením čtyř tchyní na hlavní diagonálu šachovnice. Toto ještě není správné řešení, neboť zůstávají dvě neohrožená políčka. Přesunutím poslední tchyně však již získáme validní pozici na třetím obrázku.

#### POZNÁMKY:

Sešlo se mnoho různých rozestavení a drtivá většina z nich byla správně. Jejich tvůrci si tak zasloužili plný počet bodů. Jak si také někteří řešitelé povšimli, správných řešení je hodně<sup>2</sup>. To je mimo jiné způsobeno tím, že otočením či překlopením šachovnice ze správného řešení vyrobíme zase správné řešení.

Na závěr opravme jednu gramatickou chybu, ke které nedopatřením v zadání došlo a kterou někteří z Vás postřehli. Slovo tchyně je odvozeno od podstatného jména tchán pomocí přípony -yně, a není tedy důvod psát jej s dlouhým ý, čehož jsme se v zadání dopustili. Omlouváme se a doufáme, že Vás tato nepřesnost při řešení natolik závažného problému, jakým bezpečné rozmístění tchyní jistě je, příliš nerušila. (Václav Rozhoň)

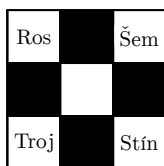
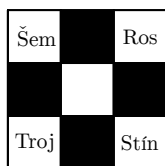
## Úloha 2.

V rozích šachovnice  $3 \times 3$  stojí dokola postupně Šemík, Rosinanta, Stínovlas a Trojský kůň. Všichni se mohou pohybovat jako šachovní koně a nesmí stát dva na stejném poli. Je možné, aby se za těchto podmínek Šemík s Rosinantou prohodili a ostatní se vrátili na svá původní místa?

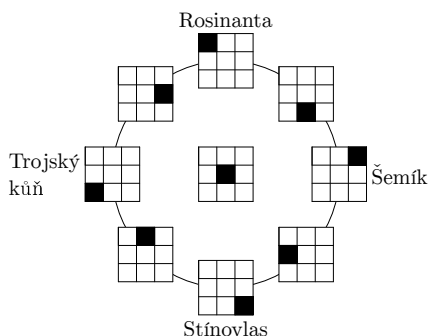
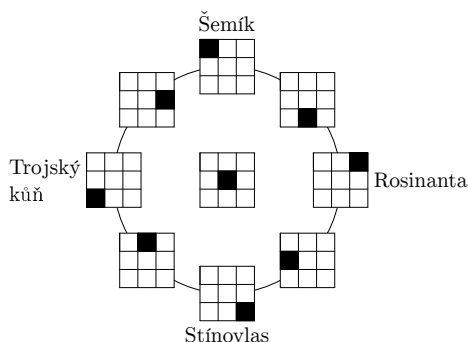
(Anh Dung „Tonda“ Le)

<sup>2</sup>přesněji 340 :)

ŘEŠENÍ:



Uvažme tahy, kterými se koně mohou pohybovat mezi poli. Sestrojíme graf, jehož vrcholy odpovídají polím šachovnice a hrana spojuje dvě políčka taková, že se z jednoho dá jedním tahem skočit na druhé. Výsledný graf je cyklus a jeden izolovaný vrchol (viz obrázek), ve kterém tahy koní odpovídají pohybu na sousední políčko.



Ani v tomto grafu nemohou dva koně stát ve stejném vrcholu. Podíváme-li se, kde stojí Šemík, a půjdeme-li po cyklu po směru hodinových ručiček, nalezneme Rosinantu, Stínovlase a nakonec Trojského koně. Uvedené tahy toto pořadí zachovávají. Rozestavení, do kterého chceme koně rozmístit, má ovšem jiné pořadí, a proto není možné prohodit Šemíka s Rosinantou tak, aby se ostatní vrátili na původní místa.

#### POZNÁMKY:

Všimněte si, že můžeme vypustit předpoklad o vracení na původní místa a stále to nepůjde. Mezi Šemíkem a Rosinantou je v cyklu pouze jedno políčko, kde nemohou stát oba Stínovlas a Trojský kůň. Nebo můžeme ze šachovnice odstranit Trojského koně, a přesto hledaná posloupnost tahů nebude existovat. Rozmyslete si, že to dokazuje stejný argument s pořadím koňů v cyklu. Kdybychom uvažovali pouze tři koně a nevyžadovali návrat na původní políčko, existovala by posloupnost tahů, při níž by si Šemík s Rosinantou vyměnili místa.

Zhruba třetina řešení se podobala tomu autorskému. Většina těch ostatních se pokoušela o rozbor případů. To není úplně marná cesta, protože na takto malé šachovnici existuje poměrně málo různých situací a většina z nich je navíc v jistém smyslu symetrická. Postup je to ale velmi zdoluhavý a velmi náchylný na chyby. Mnoho řešitelů si snažilo ušetřit práci tím, že vybrali vždy ten *nejlepší* nebo *nejrozumnější* tah, ale bez argumentu s cyklem vůbec není jasné, který tah to je. Navíc není vůbec jasné, proč nemá smysl, aby kůň skočil zpět, odkud přišel (dokud se nezmní rozestavení na kružnici). A jak vlastně může být nějaký tah *lepší* než jiný, když ani jeden z nich nevede ke zdárnému cíli? Při rozboru případů je nezbytné pozorně prozkoumat všechny možnosti a nezavrhnout nějakou jenom proto, že „nevypadá slibně.“

(Filip Hlásek)

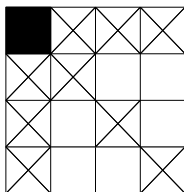
### Úloha 3.

Obarvěte sedm polí šachovnice  $4 \times 4$  tak, aby na ní po odebrání libovolných dvou sloupců a dvou řádků zůstalo alespoň jedno obarvené pole. (Rado Švarc)

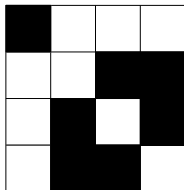
ŘEŠENÍ:

Nejprve si uvědomíme, že po vyškrtnutí libovolných dvou řádků a sloupců nám z šachovnice zůstane čtveřice polí, která původně tvořila rohy obdélníku<sup>3</sup> se stranami rovnoběžnými s okrajem šachovnice.

Pro začátek obarvěme horní levý roh šachovnice a přeškrtněme všechna pole ležící na úhlopříčce, v řádku a v sloupci, které obsahují tento roh (viz obrázek).

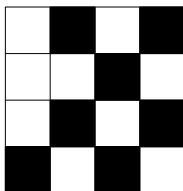
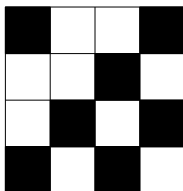


Všimneme si, že žádná čtveřice přeškrtnutých polí netvoří rohy obdélníku. Tudíž všechny obdélníky, které nemají v rohu již obarvené pole, musejí mít v alespoň jednom z rohů některé nepřeškrtnuté pole. Těch už je ale jen 6, tudíž je můžeme obarvit všechna a získáme tak jedno z možných řešení:



POZNÁMKY:

Nejprve bych rád zmínil, že až na proházení řádků a sloupců měla úloha jediné řešení, celkem jich tedy bylo 96. Vzhledem k malým rozměrům zadané šachovnice bylo častým řešením této úlohy zkoušení několika různých obarvení, dokud nebyla splněna zadaná podmínka. Tento postup se ovšem poměrně velkému počtu řešitelů vymstil, jelikož naprostá většina chybných řešení opomněla jeden či dva nepokryté obdélníky. Špatné řešení bylo obvykle podobné jednomu z následujících dvou obarvení:



(Tomáš Novotný)

<sup>3</sup>Čtverec je speciálním případem obdélníku.

## Úloha 4.

Najděte všechna přirozená  $n$ , pro která lze rozdělit šachovnici  $n \times n$  na lichý počet čtverců  $2 \times 2$  a několik<sup>4</sup> tetromin tvaru  $T$ .

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si dokážeme, že  $n$  musí být sudé: Čtverec  $2 \times 2$  i  $T$ -tetromino jsou složeny ze čtyř čtverečků. Proto  $4 \mid n^2$ , a tedy  $2 \mid n$ .

Dále oddělíme dva případy,  $n = 4k + 2$  a  $n = 4k$ , kde  $k$  je nějaké celé nezáporné číslo.

Pro  $n = 4k + 2$  je možné pokrýt šachovnici lichým počtem čtverců  $2 \times 2$  bez použití  $T$ -tetromina. Zjevně jich můžeme  $n/2 = 2k + 1$  položit vedle sebe na spodní okraj mřížky. Pak totéž uděláme ve zbylých  $2k$  dvojřádcích a dohromady budeme mít  $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$  čtverců  $2 \times 2$ , což je lichý počet.

Pro  $n = 4k$  obarvíme šachovnici černobíle klasickým způsobem. Protože je  $n$  sudé a barvy se pravidelně střídají, je na šachovnici stejně černých i bílých čtverečků. Každý čtverec  $2 \times 2$  zřejmě zabírá dvě bílá a dvě černá políčka. Naopak  $T$ -tetromino pokryje vždy buď jeden bílý a tři černé (nazveme ho *černé*), nebo jeden černý a tři bílé čtverečky (nazveme ho *bílé*). Abychom našimi útvary mohli pokrýt celý čtverec  $n \times n$ , určitě potřebujeme zakrýt stejný počet bílých i černých políček. Proto ke každému *černému*  $T$ -tetrominu musí být na šachovnici jedno *bílé*. Neboli je potřeba použít sudý počet  $T$ -tetromin, označme tedy jejich počet jako  $2l$  pro  $l$  nezáporné celé číslo.

Platí  $n = 4k$ , neboli  $n^2 = 16k^2$ . A odečteme-li od celkového počtu polí počet polí zabraných  $T$ -tetrominy, dostaneme  $16k^2 - 4 \cdot (2l) = 8(2k^2 - l)$ . Každý čtverec  $2 \times 2$  zabírá čtyři políčka, do zbytku šachovnice se jich tedy vejde  $8(2k^2 - l)/4 = 2(2k^2 - l)$ , což je sudé číslo. Pro  $n$  dělitelné čtyřmi proto nelze šachovnici pokrýt podle zadání.

POZNÁMKY:

Úloha nedopadla moc dobře, ačkoli ke správné odpovědi dospěli snad všichni, kteří si správně přečetli zadání. Více než polovina řešitelů ale potom nedokázala, že pro  $n$  dělitelné čtyřmi se šachovnice pokrýt nedá. Většinou vágně tvrdili, že „z  $T$ -tetromin se nedá sestavit jiný rozumný tvar než čtverce  $4 \times 4$ “, což zprvč není pravda (lze jimi vyplnit například dvoučtverečkový okraj šachovnice pro  $n = 4k + 2$ ) a zadruhé (což je mnohem důležitější) to opravdu nemůžeme tvrdit jen proto, že jsme nenašli žádné jiné jejich uspořádání. Pro čtyři nebo pět  $T$ -tetromin snad ještě můžeme vyzkoušet všechny možnosti, ale pro tisícové počty by to šlo už opravdu těžko.

Stejně tak je potřeba ukázat, že pro  $n = 4k + 2$  řešení opravdu existuje. Snadno si lze totiž představit útvar, který na šachovnici zabere  $n^2/4$  bílých a  $n^2/4$  černých čtverečků, a přesto se vedle něj už nevejde druhý, který by pokryl zbytek šachovnice.

Na závěr bych ještě poznamenala, jaké problémy působilo slovo *tetromino*. Řešitelé ho tak půl napůl používali ve středním a mužském rodě, někteří z něj udělali třeba *tetramín* nebo dokonce *triomino* a vůbec jim nevadilo, že tak se běžně nazývá útvar o čtvereček menší.

(Bára Kociánová)

## Úloha 5.

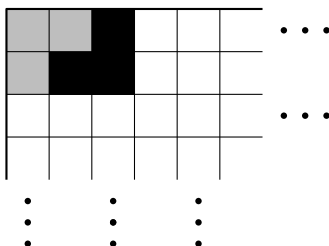
Kuba a Bára spolu hrají hru. Na začátku mají šachovnici  $2015 \times 2015$ , kde jsou všechna políčka bílá. Kuba v každém svém tahu přebarví nějaký bílý čtverec  $2 \times 2$  na černo, Bára vždy přebarví nějaká tři bílá políčka tvořící jakkoliv orientované  $L$ . Pravidelně se střídají v tazích, přičemž Kuba začíná. Prohrává ten, kdo jako první nemůže táhnout. Který z nich má vyhrávající strategii?

(Kuba Krásenský)

<sup>4</sup>Nemusí být použito žádné.

ŘEŠENÍ:

Vyhrávající strategii má Bára. Ve svém prvním tahu si vybere některý z prázdných rohů šachovnice (takový určitě existuje, protože Kuba zatím stihl vybarvit jen jeden čtverec  $2 \times 2$ ) a zahraje do něj následovně:



Vzniknou tak tři rezervní políčka (v obrázku vyznačena šedě) ve tvaru L taková, že ani jedno z nich nemůže Kuba svým tahem vybarvit. Potom bude hra pokračovat. Bára bude nadále hrát tak, že nebude vybarvovat žádné z rezervních políček. Jelikož v každém tahu ubude bílých políček, tak časem nastane situace, že na šachovnici už nebude žádný bílý čtverec  $2 \times 2$ . Pokud je v této situaci na tahu Kuba, prohrál, protože nemá co zabarvit. Pokud je na tahu Bára, může zabarvit tři rezervní políčka. Po tomto jejím tahu Kuba nemá co zabarvit, takže také prohrál.

POZNÁMKY:

Úloha byla na pětiku celkem jednoduchá a pětibodovými řešeními se to jen hemžilo. Drtivá většina z nich využívala stejnou myšlenku jako to vzorové. Několik řešitelů navrholo pro Báru strategii takovou, že bude hrát vždy na pozici středově symterickou s předchozím Kubovým tahem – tato strategie funguje také, jen je potřeba dát si pozor na pár technických detailů. (Tonda Češík)

## Úloha 6.

Dva kamarádi, Plusík a Mínusík, našli šachovnici  $3 \times 3$  vyplněnou v nějakém pořadí čísly 1 až 9. Plusík umí ke všem číslům v libovolném čtverci  $2 \times 2$  přičíst jedničku, Mínusík umí analogicky odčítat. Poté, co si s šachovnicí chvíli takto hráli, objevilo se ve všech jejich políčkách stejné číslo. Kolik to mohlo být?

(Rado Švarc)

ŘEŠENÍ:

Na začátku je součet čísel na šachovnici rovný 45. Označme  $p$  počet tahů Plusíka a  $m$  počet tahů Mínusíka. Položme  $k = p - m$ . Plusík i Mínusík ovlivňují každým svým tahem 4 políčka. Na konci jejich hry tedy bude součet čísel na šachovnici rovný  $45 + 4k$ .

Dále označme  $e$  hodnotu, která se původně nacházela ve středu šachovnice. Každý tah Plusíka i Mínusíka toto číslo mění, a tak na konci bude hodnota na prostředním políčku rovna  $e + k$ . Na konci však má být na všech polích šachovnice stejná hodnota, tudíž jejich součet bude roven devitinásobku čísla na prostředním políčku. Můžeme tedy psát, že

$$45 + 4k = 9(e + k),$$

$$45 = 9e + 5k.$$

To však znamená, že  $e$  je dělitelné 5. Jediné číslo, které bylo na počátku napsáno na šachovnici a bylo dělitelné pěti, je 5. Tedy  $e = 5$ . Z toho již snadno dopočteme, že  $5k = 45 - 9e = 0$ , tedy  $k = 0$ . Hodnota, která nakonec na šachovnici zůstane, je  $e + k = 5$ . Příkladem šachovnice, kde je možné všechny hodnoty změnit na 5, může být



4	1	2
7	5	3
8	9	6

Plusík jednou zvýší hodnoty v levém horním čtverci a třikrát v pravém horním. Mínusík jednou sníží čísla v pravém dolním a třikrát v levém dolním. Jediné číslo, které mohlo být na všech políčkách šachovnice zároveň je tedy 5.

POZNÁMKY:

Úlohu bylo možno dokázat mnoha různými postupy. Ti, kteří předvedli rychlé a elegantní řešení, byli odměněni imaginárním bodem. Část řešitelů mylně předpokládala, že se Plusík a Mínusík ve svých tazích musí pravidelně střídat. (Martin Hora)

## Úloha 7.

Na šachovnici  $2015 \times 2015$  stálo 2015 věží, z nichž se žádné dvě neohrožovaly. Náhle se všechny proměnily v tchýně, udělaly jeden tah jako koně a proměnily se zpět ve věže. Dokažte, že nyní se nutně nějaké dvě z nich ohrožují.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

ŘEŠENÍ:

Zavedeme si souřadnice políček tak, že souřadnice levého horního políčka je  $(1, 1)$  a souřadnice pravého spodního políčka je  $(2015, 2015)$ . Pokud se žádné dvě věže neohrožují, musí být každá v řádku i sloupci sama, a protože je věží stejně jako řádků a sloupců, je v každém řádku i sloupci právě jedna věž.

Uvažujme nyní součet  $x$ -ových a  $y$ -ových souřadnic všech věží. Na začátku se žádné dvě věže neohrožovaly, proto se každý řádek i každý sloupec vyskytl v součtu právě jednou. Součet byl tudíž roven

$$1 + 1 + 2 + 2 + \dots + 2015 + 2015 = 2 \cdot \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2015 \cdot 2016.$$

Předpokládejme, že se ani po tahu žádné dvě věže neohrožují. Potom je součet jejich souřadnic zase  $2015 \cdot 2016$ , takže se nezměnil.

Ale každá věž se pohnula dohromady o tři políčka, změnila tedy součet souřadnic o liché číslo. A protože věží je 2015, dohromady také změnila součet souřadnic o liché číslo, což je spor.

ŠACHOVNICOVÉ ŘEŠENÍ (PODLE JANA ŠORMA):

**Lemma.** *Mějme šachovnici  $(2k-1) \times (2k-1)$ , kde  $k$  je přirozené, a na ní  $2k-1$  věží rozmístěných tak, aby se neohrožovaly. Pokud šachovnici obarvíme šachovnicově tak, aby levé horní políčko bylo černé, pak je na černých políčkách lichý počet věží.*

*Důkaz.* Indukcí podle  $k$ .

Pro šachovnici  $1 \times 1$  tvrzení platí. (Je tam jedno černé políčko a na něm jedna věž.)

Předpokládejme, že tvrzení platí pro  $2k-1$ , a mějme šachovnici  $(2k+1) \times (2k+1)$  a na ní  $2k+1$  věží rozmístěných tak, aby se neohrožovaly. Každá věž je sama v řádku i ve sloupci. Rozebereme dvě možnosti:

- (i) Pokud je na černých políčkách pouze jedna věž, tvrzení platí.
- (ii) Jinak jsou na černých políčkách alespoň dvě věže. Nějaké takové dvě vybereme a odebereme je i s jejich řádky a sloupci. Tím jsme dostali vyhovující šachovnici  $(2k-1) \times (2k-1)$ , na kterou použijeme indukční předpoklad, tedy že tam je lichý počet věží na černých políčkách. A pak zpátky přidáme ty dvě, čímž se parita nezmění.  $\square$

Nyní je úloha triviální, protože skokem koně změni figura barvu svého políčka. Protože je věží 2015, můžeme použít lemma. Na začátku se neohrožují, je jich lichý počet na černých, a tedy sudý počet na bílých políčkách. Skokem koně změni svou barvu, takže bude na černých políčkách sudý počet věží. Proto se nějaké dvě budou ohrožovat.

**ŘEŠENÍ POMOCÍ CYKLŮ V PERMUTACÍCH (PODLE ADAMA ŠPANĚLA):**

Opět si uvědomíme, že když se věže neohrožují, je v každém řádku i v každém sloupci právě jedna.

Nyní si celou šachovnici promítneme na osu  $x$  (tzn. máme jeden řádek dlouhý 2015 políček). Na každém políčku je právě jedna věž. Předpokládejme pro spor, že se věže po skoku neohrožují. To znamená, že je opět každé políčko zabrané. Necht' první věž skočila na políčko  $i$ . Věž, která stála před skokem na  $i$ , musela skočit na nějaké jiné políčko. Takto pokračujeme, ale protože je políček jen 2015, musela někdy nějaká věž skočit na políčko 1, čímž nám vznikl cyklus. A my si přesouvání věží rozdělíme na takové cykly.<sup>5</sup>

Každá věž mohla skočit o  $\pm 2$  nebo o  $\pm 1$  políčko. Aby se cyklus uzavřel, musí být součet skoků 0, což je sudé číslo. Takže počet skoků o 1 musel být sudý. A to platí pro každý cyklus, tedy celkový počet skoků o 1 ve všech řádcích musel být sudý. Proto skoků o 2 byl lichý počet (protože dohromady jich bylo 2015).

Ale tutéž úvahu můžeme udělat, pokud si šachovnici promítneme na osu  $y$ . Každý kůň skočí o 2 ve směru jedné osy a o 1 ve směru druhé, neboli pokud ve směru  $x$  skočil o 2, skočí ve směru  $y$  o 1 a opačně. Podle předchozí úvahy ve směru  $y$  skočil lichý počet koňů o 1. Ale to je spor, protože aby se neohrožovali, musel by jich o 1 skočit sudý počet.

**POZNÁMKY:**

Úloha byla na sedmičku poměrně jednoduchá a tomu také odpovídá počet došlých řešení. Několik řešitelů tvrdilo, že jediné možné vyhovující rozmístění je diagonální, což není pravda (dokonce existuje 2015! vyhovujících rozmístění).<sup>6</sup> Mnoho řešení se snažilo ukázat, že pro nějaké konkrétní rozložení věží se je přesunout nepovede, ale úloha chtěla dokázat, že pro každé vyhovující rozložení věží a každou variantu jejich skoků se nakonec budou nějaké dvě ohrožovat. To je častá chyba v chápání úlohy, dávejte si na to pozor, zbytečně pak ztrácíte body. (Matěj Konečný)

## Úloha 8.

*Kouzelníci Štěpán a David si pro Rada připravili trik s šachovnicí  $n \times n$ . Nejprve David odešel pryč, aby nic neviděl ani neslyšel. Poté Štěpán Radovi nakázal, ať na každé políčko položí dle své vůle buď bílý, nebo černý knoflík. Následně ho nechal, aby zvolil libovolné políčko  $A$  a sdělil mu, které na je. Nato si Štěpán vybral políčko  $B$  (ne nutně různé od  $A$ ) a změnil barvu knoflíku, který na  $B$  ležel. Když potom přišel David, byl schopný pouze z pohledu na šachovnici uhodnout, které políčko  $A$  si Rado vybral. Pro která  $n$  je tento trik proveditelný?*

(Rado Švarc)

**ŘEŠENÍ:**

Nejprve předpokládejme, že je možné trik uskutečnit pro šachovnici  $n \times n$ . Jakýkoliv způsob, jakým je možné rozmístit knoflíky na šachovnici, budeme nazývat konfigurací.

David je schopen z pouhého pohledu na šachovnici zjistit, které políčko si Rado vybral. Necht'  $S_P$  je množina všech konfigurací, podle kterých David pozná, že si Rado vybral políčko  $P$ . Protože David je schopný se jednoznačně rozhodnout, jsou všechny tyto množiny disjunktní.

Necht'  $M$  je to políčko šachovnice, které má nejmenší množinu  $S_M$ . Protože políček je  $n^2$ , existuje  $2^{n^2}$  možných konfigurací. Protože žádná konfigurace neleží ve dvou množinách, každá množina má velikost alespoň  $|S_M|$  a celkem je jich  $n^2$ , platí

$$n^2 \cdot |S_M| \leq 2^{n^2}.$$

<sup>5</sup>Skoky věží odpovídají nějaké permutaci a my pracujeme s jejím rozkladem na cykly.

<sup>6</sup> $n!$  se čte  $n$  faktoriál a značí to součin  $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ .

Pro každou konfiguraci z  $S_M$  existuje  $n^2$  konfigurací, které se od ní liší jen v barvě jednoho knoflíku. Takže celkově je maximálně  $n^2 \cdot |S_M|$  konfigurací, které se liší jen o jedna od nějaké konfigurace z  $S_M$ . Ovšem aby byl trik uskutečnitelný i v případě, že si Rado vybere  $M$ , musí pro každou konfiguraci existovat konfigurace z  $S_M$ , která se od ní liší jen v barvě jednoho knoflíku. Protože konfigurací je  $2^{n^2}$ , dostáváme vztah

$$n^2 \cdot |S_M| \geq 2^{n^2}.$$

Porovnáním těchto dvou nerovností dostáváme  $n^2 \cdot |S_M| = 2^{n^2}$ , takže  $n \mid 2^{n^2}$ . To znamená, že  $n$  musí být mocnina dvou.

Nyní ukážeme, že pokud  $n = 2^k$  pro nějaké nezáporné celé  $k$ , je trik už proveditelný. Pro  $n = 1$  je to lehké – David ví, že si Rado zvolil to jediné políčko, které na šachovnici je. Předpokládejme dále, že  $n > 1$ . Ukážeme si dva různé způsoby, jak řešení dokončit.

**ŘEŠENÍ XOREM:**

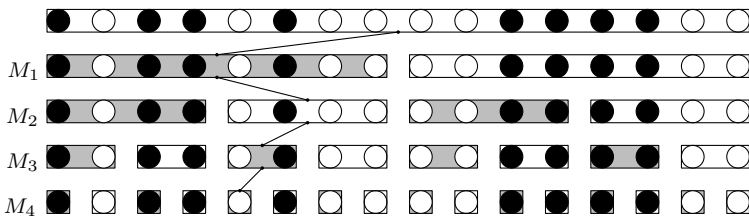
Budeme používat takzvaný XOR. Nechť  $a$  a  $b$  jsou nezáporná celá čísla, která se v binární soustavě zapisují jako  $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$  a  $\overline{b_1 b_2 \dots b_k}$  (pokud nemají stejný počet cifer, tak to menší doplníme zleva nulami). Pro každé  $i$  od jedné do  $k$  nechť  $c_i = 0$ , pokud  $a_i = b_i$ , a  $c_i = 1$  v opačném případě. Potom XOR  $a$  a  $b$  zdefinujeme jako takové číslo  $a \oplus b$ , které se v binární soustavě запиše jako  $\overline{c_1 c_2 \dots c_k}$ . Například  $12 \oplus 5 = 1100_2 \oplus 0101_2 = 1001_2 = 9$ . Povšimněme si, že  $a \oplus a = 0$ , a pokud  $a \oplus b = c$ , pak  $a \oplus c = b$ .

Políčka na šachovnici si označíme čísly od 0 do  $2^{2k} - 1$ . Potom Štěpán s Davidem postupují následovně: Nechť  $x$  je XOR čísel všech políček, na které Rado položil černý knoflík a nechť  $a$  je číslo políčka  $A$ . Potom Štěpán změní barvu knoflíku na políčku s číslem  $x \oplus a$  (takové existuje, protože na šachovnici jsou právě všechna políčka, jejichž čísla mají  $2k$  nebo méně cifer). Po této změně bude XOR čísel všech políček s černým knoflíkem roven  $x \oplus (x \oplus a) = a$ . Proto si David pouze spočítá XOR všech políček s černým knoflíkem a dostane  $A$ .

**ŘEŠENÍ PŮLENÍM INTERVALŮ (PODLE FRANTIŠKA COUFA):**

Všechna políčka šachovnice si pomyslně poskládáme za sebe a vytvoříme pole délky  $n^2$ . To rozdělíme na dvě souvislé části, přičemž levou nazveme  $M_1$ . Následně si každou z částí rozdělíme na dvě a levé půlky obou vložíme do množiny  $M_2$ . Poté opět každý interval rozdělíme na dvě poloviny a ty levé vložíme do  $M_3$ . Postupujeme dál a dál, dokud intervaly nejsou velikosti 1. K těm se dostaneme po  $2k - 1$  krocích.

Níže uvedený obrázek prezentuje dělení pro šachovnici o šestnácti políčkách, přičemž  $M_i$  je tvořena všemi šedými částmi v příslušném řádku.



David po příchodu k šachovnici bude postupovat následujícím algoritmem: pokud je v  $M_i$  sudý počet černých knoflíků, přesune se v  $i$ -tém kroku do levé poloviny intervalu, ve kterém právě je, jinak se přesune do pravé. Na příkladu na obrázku vidíme, že v  $M_1, M_2, M_3$  a  $M_4$  jsou postupně 4, 5, 4 a 4 černé knoflíky, a proto se David přesouvá doleva, doprava, doleva a doleva. Za odpověď zvolí to políčko, na kterém skončil.

Stačí nám tedy ukázat, že Štěpán umí změnit jeden knoflík tak, aby David skončil přesně na tom políčku, které Rado zvolil. Štěpán ví, jakou posloupnost příkazů „doleva“ a „doprava“ musí David

vykonat. Proto se podívá, zda by ho v  $i$ -tém kroku současná konfigurace posílala na správnou, nebo špatnou stranu. Pokud na špatnou, zapamatuje si množinu  $M_i$ , jinak si zapamatuje její doplněk. Chce, aby knoflík, který změní, byl ve všech zapamatovaných množinách.

Ovšem pomocí jednoduché indukce se lehce ukáže, že průnik prvních  $i$  zapamatovaných množin má průnik právě v jednom intervalu délky  $2^{2^k-i}$ . Skutečně, pro  $i = 1$  toto platí, a pokud tvrzení platí pro  $i$ , pak průnik prvních  $i + 1$  zapamatovaných množin je buď levá, nebo pravá půlka průniku prvních  $i$  množin. To znamená, že průnik všech množin je interval délky 1, a tudíž Štěpán skutečně najde knoflík, jehož přebarvením se změní parita počtu černých knoflíků právě těch intervalů, které posílaly Davida na špatnou stranu. Díky tomu David najde správné políčko.

POZNÁMKY:

Úloha byla na osmičku spíše lehká, a protože sestávala ze dvou částí, mnoho řešitelů skutečně tu lehčí vyřešila. Často se ale neshodli na tom, která to je.

Krom dvou nastíněných řešení (rozmyslete si, že jde vlastně o to samé řešení, jen jinak zapsané), se objevilo ještě třetí, které úlohu převedlo na obarvování grafu hyperkrychle  $Q_{2^k}$ , což dořešilo (Rado Švarc)