Do nekonečna a ještě dál

Na počátku bylo slovo, a to slovo bylo od Matematika, a to slovo bylo „množina“.

Díl druhý – pevné základy

V tomto díle si ukážeme, jak se matematika asi před sto dvaceti lety rozbila, a především to, jak ji následně opravili. Nenavážeme tedy na první díl hned, ale až zhruba v polovině seriálu.

Možná totiž v prvním díle nebylo jasné, proč při snaze sestrojit obrovské množiny používáme tak rafinované konstrukce namísto toho, abychom prostě úplně všechny množiny naházeli do jednoho pytle. To už bude určitě největší množina. Nic většího nevyrobíme. Jenže v tom je právě ta potíž, vždyť jsme si ukázali, že vždycky můžeme sestrojit větší množinu pomocí potence. Jak to? Když si vzpomeneme na důvod, proč je potence větší než původní množina, dostáváme Russelův paradox:

Russel: „Existuje množina všech množin?“

Intuice: „Ovšem že ano. Proč by měla neexistovat?“

Russel: „A obsahuje tato množina sama sebe?“

Intuice: „Jasně, obsahuje přece všechny množiny.“

Russel: „A existuje množina všech množin, které neobsahují samy sebe?“

Intuice: „Jasně, stačí z množiny všech množin vyhodit ty prvky, které samy sebe obsahují.“

Russel: „A obsahuje tato množina sama sebe?“

Intuice: „Jejda.“

Problém spočívá v tom, že z definice množiny všech množin neobsahujících samu sebe vyplývá, že tato množina se obsahuje právě tehdy, když se neobsahuje. Obě varianty vedou ke sporu.

Matematika ale nesmí vést sama o sobě ke sporu. Když jsme dostali spor, znamená to, že jsme ji špatně vybudovali. Po objevu Russelova paradoxu matematici bádali nad tím, jak zařídit, aby fungovala veškerá dosud vybudovaná matematika, ale již nikoli Russelův paradox.

S řešením přišli pánové Zermelo a Fraenkel. Sestavili pro matematiku sadu axiomů – to jsou tvrzení, která se bez důkazu považují za pravdivá, jedná se tedy o základní kameny matematiky. Podle těchto axiomů není množinou jen tak ledaco, axiomy dávají pro tvorbu množin striktní pravidla. Nemůžeme si tedy jen tak vzít množinu všech množin. Naopak Russelův paradox sporem dokazuje, že žádná množina všech množin ve skutečnosti neexistuje.

Jazyk teorie množin

Napřed si představíme formální jazyk, ve kterém jsou axiomy psané. Jedná se o jazyk hovořící o množinách, žádné jiné matematické objekty v něm zastoupeny nejsou. Možná si říkáš: „No moment, a co prvky těch množin? O těch se mluvit nedá? Co přirozená čísla? Co body v rovině? Co posloupnosti? Co funkce?“ Inu, vše tohle budou zase množiny.[1] Časem si definujeme, která množina

[1] Se situací, kdy prvky množiny byly opět množiny, ses v minulém díle setkal(a) například u potence $\mathcal{P}(X)$ – prvky potence jsou podmnožiny X, tedy množiny.

je přirozeným číslem, která bodem v rovině, a tak podobně. V základním jazyku teorie množin si však vystačíme s následujícími symboly.

(i) Závorky a klasické logické spojky[2]: $\neg$ (není pravda, že), $\wedge$ (a zároveň), $\vee$ (nebo), $\Rightarrow$ (implikuje), $\Leftrightarrow$ (právě tehdy, když).
(ii) Proměnné – písmenka, která zastupují nějakou množinu.
(iii) Kvantifikátory: Symbol $(\forall x)$ (pro všechna x) znamená, že následující výrok platí, ať za x dosadíme kteroukoli množinu, a symbol $(\exists x)$ (existuje x) znamená, že je možné v následujícím výroku dosadit za x nějakou množinu tak, aby byl splněn.
(iv) Rovnítko $x = y$ značí, že x a y jsou tytéž množiny.
(v) Náležítko $x \in y$ značí, že množina x je prvkem množiny y. **Pozor!** Prvek množiny a podmnožina množiny jsou zásadně odlišné pojmy. Prvky množiny často nebývají jejími podmnožinami. Je rozdíl mezi množinou x a jednoprvkovou množinou obsahující x jako prvek.

Z koncepce tohoto jazyka je patrné, proč se o množinách říká, že „Prvky množiny jsou neuspořádané a nemohou se opakovat“. Samotný jazyk totiž neumožňuje zjistit, v jakém pořadí prvky v množině jsou a kolikrát. Jediné, na co se lze ptát, je, zda $x \in y$, či nikoli.

Pomocí těchto symbolů pak lze skládat takzvané *formule* – to je něco jako výroky. Formule jsou takové nápisy, které jdou smysluplně přečíst. Formulí je třeba $(x = y) \wedge (\exists z)(z \in x)$, což se přečte jako „$x$ je stejná množina jako y a zároveň existuje z, které je prvkem množiny x.“ Zato například $\exists\neg) =\in x$ formulí není, protože je to zkrátka blbost. Exaktně můžeme formuli definovat jako to, co vznikne opakovaným použitím následujících pravidel:

(i) Formulemi jsou $x \in y$ a $x = y$ (případně s jinými proměnnými).
(ii) Nechť φ je formule.[3] Pak přidáním kvantifikace na začátek vznikne opět formule. Tedy $(\forall x)(\varphi)$ a $(\exists x)(\varphi)$ jsou formule.
(iii) Aplikováním logických spojek na formule opět vzniknou formule. Tedy z formulí φ, ψ vzniknou například formule $\neg(\varphi)$ nebo $(\varphi) \Rightarrow (\psi)$.

Pokud nedojde k nejednoznačnosti, lze závorky v zápisu vynechat. Ke kvantifikátoru v takovém případě náleží jen to, co po něm bezprostředně následuje: $(\exists x)(\varphi) \wedge (\psi)$ znamená $\big((\exists x)(\varphi)\big) \wedge (\psi)$.

Příklad. Ukážeme konstrukci formule $(x = y) \Rightarrow (\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z)$. Z bodu (i) jsou formulemi formální nápisy $x = y$, $x \in z$ a $y \in z$. Aplikováním bodu (iii) získáme formuli $x \in z \Leftrightarrow y \in z$. Dále z bodu (ii) je formulí $(\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z)$ a nakonec opět z bodu (iii) dostaneme formuli

$$x = y \Rightarrow (\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z).$$

Ještě přeložme tuto formuli do češtiny: „Pokud jsou x a y stejné objekty $(x = y)$, tak pro libovolnou množinu z platí, že x je prvkem množiny z právě tehdy, když y je prvkem množiny z.“ Říká tedy jen to, že když jsou x, y stejné prvky, tak leží ve stejných množinách. To platí v každém případě, čili tato formule platí obecně, pro libovolnou volbu[4] x, y. Zato formule, které jsme vytvořili cestou (například $x \in z$) nejsou obecně pravdivé.

Příklad. Chceme napsat formuli „Množina x je jednoprvková.“ Formule se může opírat pouze o to, které prvky leží v této množině, tedy „Existuje jeden prvek y množiny x takový, že každý prvek z množiny x musí být roven onomu jednomu prvku y.“ To lze říci ještě formálněji: „Existuje y takové, že y je prvkem x a zároveň pro každé z platí, že pokud je z prvkem x, tak je z rovno y.“ Toto již lze přímočaře přepsat do řeči symbolů:

$$(\exists y)(y \in x \wedge (\forall z)(z \in x \Rightarrow z = y)).$$

[2] Logické spojky jsou popsány například na `http://www.matematika.cz/vyroky`.

[3] Řecké písmenko φ označující nějakou formuli se čte „fí“. Dále budeme pro formule používat písmenko „psí“ ψ.

[4] Pokud zvolíme x, y různé, tak vyjde formule pravdivá z toho důvodu, že není splněn předpoklad implikace.

O něco stručnější způsob zápisu by mohl být: „Existuje objekt y takový, že pro každý objekt z je z prvkem x právě tehdy, když je z roven y.“ Formule vypadá takto:

$$(\exists y)\big(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z = y\big).$$

Cvičení 1. Napiš formuli, která říká: „Množina x' obsahuje stejné prvky jako x a ještě jeden navíc.“

Abychom nemuseli všude psát samá náležitka, zavedeme ještě běžně používané zkratky.

(i) $x \notin y$ resp. $x \neq y$ znamená $\neg(x \in y)$ resp. $\neg(x = y)$.
(ii) $x \subset y$ (x je podmnožinou množiny y) znamená $(\forall z)(z \in x \Rightarrow z \in y)$.
(iii) Pokud za $\forall x$ okamžitě následuje požadavek na x, například $(\forall x \in y)(\ldots)$, jedná se o zkratku za to, že příslušný požadavek je předpokladem implikace, tedy $(\forall x)\big((x \in y) \Rightarrow (\ldots)\big)$.
(iv) Pokud za $\exists x$ okamžitě následuje požadavek na x, například $(\exists x \subset y)(\ldots)$, jedná se o zkratku za to, že příslušný požadavek je současně vyžadován, tedy $(\exists x)\big((x \subset y) \wedge (\ldots)\big)$.
(v) Zápis $(\forall x, y, z)$ je jen zkratka za sled kvantifikátorů $(\forall x)(\forall y)(\forall z)$, obdobně pro existenční kvantifikátor.
(vi) Zápis $y = \{x : \varphi(x)\}$ (*množina daná předpisem*), kde $\varphi(x)$ je formule,[5] značí, že y je množina těch prvků x, které splňují formuli φ. Jedná se tedy o formuli $(\forall x)(x \in y \Leftrightarrow \varphi(x))$.

Pozastavíme se u posledního bodu. Ten dává návod, jak interpretovat $y = \{x : \varphi(x)\}$, ale již neříká, jak do základního jazyka přeložit samotnou množinu danou předpisem, tedy samotné $\{x : \varphi(x)\}$. Pokud se ve formuli vyskytne taková množina, přeložíme ji do jazyka teorie množin tak, že založíme novou proměnnou y, která se ve formuli dosud nevyskytuje. Tou nahradíme (jeden) výskyt $\{x : \varphi(x)\}$ a před vzorec s tímto výskytem připíšeme $(\exists y = \{x : \varphi(x)\})$.

Příklad. Přepíšeme do základního jazyka formuli

$$\{x : x \in A \wedge x \in B\} = \{x : x \in C \wedge x \in D\}.$$

Nejprve nahradíme první výskyt do tvaru

$$(\exists y = \{x : x \in A \wedge x \in B\})(y = \{x : x \in C \wedge x \in D\})$$

neboli

$$(\exists y)\big((y = \{x : x \in A \wedge x \in B\}) \wedge (y = \{x : x \in C \wedge x \in D\})\big).$$

Nyní již můžeme nahradit výrazy podle bodu (vi):

$$(\exists y)\Big((\forall x)\big(x \in y \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)\big) \wedge (\forall x)\big(x \in y \Leftrightarrow (x \in C \wedge x \in D)\big)\Big).$$

Poznámka. Skutečnost, že můžeme množinu danou předpisem napsat, ještě nezaručuje její existenci a jednoznačnost. Jednoznačnost vyplyne z axiomu extensionality, existence v některých případech nebude možná vůbec (jak ukazuje Russelův paradox). Pokud si tedy například formálně rozepíšeme tvrzení $a \in \{x : x = x\}$, zjistíme, že jsme dostali nepravdivou formuli (kde nepravdivost vyplývá z neexistence množiny všech množin, která vyplyne až z axiomu vydělení).

Za často používané typy množin daných předpisem zavedeme další zkratky. V těchto případech z axiomů vyplyne dokonce existence.

(i) $\{x_0, \ldots, x_n\}$ (*množina zadaná výčtem prvků*) značí $\{z : z = x_0 \vee \cdots \vee z = x_n\}$.
(ii) $x \cap y$ (*průnik x a y*) značí množinu $\{z : z \in x \wedge z \in y\}$.
(iii) $x \setminus y$ (*množinový rozdíl x minus y*) značí množinu $\{z : z \in x \wedge z \notin y\}$.
(iv) $x \cup y$ (*sjednocení x a y*) značí množinu $\{z : z \in x \vee z \in y\}$.
(v) $\mathcal{P}(x)$ (*potence x*) značí množinu $\{y : y \subset x\}$.

[5] To, že se tato formule jmenuje $\varphi(x)$, a ne jen φ, naznačuje, že se x v této formuli nejspíše bude vyskytovat, a že tedy na x závisí její platnost.

Příklad. Formule $a \in \{c, \{d\}\}$ se do základního jazyka přepíše takto:

$$(\exists y_0)(\exists y_1)\Big(a \in y_1 \wedge (\forall z)(z \in y_0 \Leftrightarrow z = d) \wedge (\forall z)\big(z \in y_1 \Leftrightarrow (z = c \vee z = y_0)\big)\Big).$$

Pokud před dvojtečku napíšeme složitější výraz než jednu proměnnou, značíme množinu všech možných hodnot takového výrazu. Například pokud máme zafixované množiny x a y, značí $\{\{a,b\} : a \in x, b \in y\}$ množinu $\{c : (\exists a \in x)(\exists b \in y)(c = \{a,b\})\}$.

Nyní již se takřka můžeme pustit do axiomů, tedy formulí, jejichž platnost se v teorii množin automaticky předpokládá. Poslední věc, kterou je třeba o těchto axiomech pochopit, je, že se nejedná o axiomy logiky. K logice budeme přistupovat intuitivně – například chápeme, že když $x = y$, tak můžeme ve formuli nahradit x za y a nezmění se tím její platnost. Nebo že když platí $\varphi \vee \psi$ a neplatí φ, tak platí ψ. Popsat a vysvětlit axiomy logiky a formální dedukci by bylo na mnohem delší povídání. Axiomy teorie množin jsou od toho, aby jasně definovaly, jak se chová náležítko, a tedy, co přesně můžeme dělat s množinami.

Axiomy

Za každým axiomem je vysvětleno, co říká a k čemu slouží. Ale v principu by tento doprovodný text nemusel být třeba. Jestli si chceš popřemýšlet, zkus nejprve pokaždé pochopit axiom bez něj.
(0) Axiom existence:

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x).$$

Česky řečeno: Existuje množina x taková, že pro žádnou[6] množinu y není y prvkem množiny x. Jinými slovy x nemá žádný prvek. Tuto množinu x budeme nazývat *prázdná* množina a budeme ji značit $\emptyset$.
(1) Axiom extensionality:

$$(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow (x = y).$$

Tento axiom říká, že množina není dána ničím jiným než svými prvky. Tedy například prázdná množina, průnik, sjednocení, potence, množina zadaná výčtem prvků či obecná množina zadaná předpisem je (pokud existuje) dána jednoznačně. Opačná implikace – že stejné množiny obsahují stejné prvky – také platí. Ta vyplývá přímo z axiomů logiky, považujeme ji tedy za ještě samozřejmější než axiomy teorie množin.
(2) Axiom dvojice:

$$(\forall x, y)(\exists d)(d = \{x, y\})$$

neboli pro každé dvě zadané množiny existuje množina, která obsahuje právě je. Tento axiom mimo jiné zaručuje i existenci jednoprvkových množin $\{x\}$, protože $\{x\} = \{x, x\}$.

Cvičení 2. Dokaž „opak extensionality“: $(\forall z)(x \in z \Leftrightarrow y \in z) \Rightarrow (x = y)$.

(3) Schéma axiomů vydělení: To, že se jedná o schéma, znamená, že za jistý kus axiomu je možné dosadit skoro jakoukoli formuli a dá se říci, že takto vlastně vyrobíme nekonečně mnoho axiomů. V tomto případě je možné za $\varphi(z)$ dosadit formuli, která v sobě neobsahuje y. Pak je axiomem

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))\big).$$

Jinými slovy toto schéma zaručuje existenci množiny y dané předpisem $\{z : z \in x \wedge \varphi(z)\}$. Jedná se o vydělení těch prvků z množiny x, které splňují formuli $\varphi(x)$, výslednou množinu budeme značit i $\{z \in x : \varphi(z)\}$. Použitím axiomu vznikne vždy podmnožina nějaké existující množiny, takže ke konstrukci množiny všech množin tento axiom použít nelze.

[6] V češtině má slovo „žádná“ takřka stejný význam jako slovo „každá“. Sloveso rozhoduje, které z těchto dvou slov se má použít. Divně se zde chová čeština, nikoli formální jazyk.

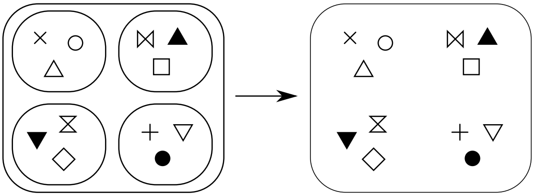
Příklad. Axiom vydělení je možné použít i ke konstrukci průniku $a \cap b$. Za formuli $\varphi(z)$ zvolíme $z \in b$. Dále za x dosadíme a a použijeme axiom. Dostáváme y splňující $(\forall z)\big(z \in y \Leftrightarrow (z \in a \wedge z \in b)\big)$. Tedy $y = a \cap b$.

Cvičení 3. Odvoď pomocí axiomu vydělení existenci množiny $a \setminus b$.

(4) Axiom sjednocení:

$$(\forall x)(\exists s)(\forall z)\big(z \in s \Leftrightarrow (\exists y \in x)(z \in y)\big).$$

Tento axiom říká, že kdykoli máme množinu x, můžeme sjednotit všechny množiny, které v x leží. Toto sjednocení s značíme $\bigcup x$. Použití axiomu dvojice a následně axiomu sjednocení zaručuje existenci sjednocení dvou množin $x \cup y$.



x $\qquad\qquad$ $\bigcup x$

Navíc můžeme pokračovat a sestavit pomocí tohoto axiomu libovolně velkou konečnou množinu danou výčtem $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Existují totiž jednoprvkové množiny $\{x_0\}, \{x_1\}, \ldots, \{x_{n-1}\}$ a postupným aplikováním sjednocení dvou množin z nich dostáváme $\{x_0, x_1\}, \{x_0, x_1, x_2\}, \ldots$, až nakonec získáme $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

(5) Axiom potence:

$$(\forall x)(\exists y)(y = \mathcal{P}(x)).$$

Cvičení 4. Přepiš axiom potence (tedy tvrzení „existuje potence x“) jen pomocí základního jazyka teorie množin.

(6) Schéma axiomů nahrazení: Mějme formuli $\psi(x, y)$, která v sobě neobsahuje b, y_0 ani y_1. Symbolem $\psi(x, y_0)$ resp. $\psi(x, y_1)$ značíme úpravu formule $\psi(x, y)$, ve které nahradíme proměnnou y za proměnnou y_0 resp. y_1. Pak je axiomem

$$(\forall x, y_0, y_1)\big((\psi(x, y_0) \wedge \psi(x, y_1)) \Rightarrow (y_0 = y_1)\big) \Rightarrow (\forall a)(\exists b)(\forall y)\big(y \in b \Leftrightarrow (\exists x \in a)(\psi(x, y))\big).$$

I když je tohle schéma na první pohled opravdu nestravitelné, překvapivě to s ním není až tak hrozné. Nechť f je zobrazení, které množině x přiřadí množinu y, aby platilo $\psi(x, y)$. Celá první závorka je jen podmínka požadující, aby f bylo jednoznačně určené zobrazení, tedy aby bylo k jednomu x přiřazeno jen jedno y. Axiom pak říká, že obrazy prvků množiny a (přesněji té její části, která leží v definičním oboru) v zobrazení f opět tvoří množinu.

Pokud budeme chápat zápis $f(x) = y$ jako formální $\psi(x, y)$ můžeme axiom přepsat do tvaru

$$(\forall x, y_0, y_1)\big(((f(x) = y_0) \wedge (f(x) = y_1)) \Rightarrow (y_0 = y_1)\big) \Rightarrow (\forall a)(\exists b)(b = \{f(x) : x \in a\}).$$

(7) Axiom fundovanosti (nebo též regularity):

$$(\forall x \neq \emptyset)(\exists y \in x)(\forall z \in y)(z \notin x).$$

Tento axiom požaduje, aby každá neprázdná množina obsahovala prvek, který je s ní disjunktní[7]. Není to intuitivní požadavek a my nebudeme tento axiom příliš potřebovat. Smyslem tohoto axiomu je vyloučit existenci divných množin.

[7] Slovo disjunktní znamená neprotínající se, tedy že dané množiny mají prázdný průnik.

Cvičení 5.

(i) Ukaž, že nemůže existovat množina a splňující $a \in a$.
(ii) Ukaž, že nemohou existovat množiny a, b takové, že $(a \in b) \wedge (b \in a)$.

(8) Axiom nekonečna:

$$(\exists m)\big(\emptyset \in m \wedge (\forall x \in m)(x \cup \{x\} \in m)\big).$$

Tento axiom zaručuje existenci nekonečné množiny m jistou konkrétní konstrukcí, ačkoli jednoznačně množina m určená není. Podstata tohoto axiomu spočívá v sestrojení alespoň nějaké uchopitelné nekonečné množiny. Se vzniklou množinou se setkáme při konstrukci množiny všech přirozených čísel.

Cvičení 6. Přepiš axiom nekonečna jen pomocí základního jazyka teorie množin.

(9) Axiom výběru:

$$(\forall a)\big((\forall x \in a, y \in a)(x \neq y \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow (\exists b)(\forall x \in a)(\exists y)(x \cap b = \{y\})\big).$$

Tento axiom říká, že pokud máme množinu a neprázdných disjunktních množin, tak je možné z každé množiny vybrat po jednom prvku a sestavit z těchto prvků množinu b. Intuitivně tento axiom říká, že je možné provést nekonečně mnoho nahodilých výběrů najednou. Podrobněji se mu budeme věnovat v příštím díle.

Tato (obvykle používaná) sada axiomů trochu překvapivě není minimální – tři axiomy by bylo možné vyškrtnout, aniž bychom o jejich platnost přišli, jak ukazuje následující cvičení.

Cvičení 7.

(i) Uvědom si, že platnost axiomu existence plyne z axiomu nekonečna.
(ii) Odvoď schéma axiomů vydělení ze schématu axiomů nahrazení.
(iii) Odvoď axiom dvojice z axiomů existence, potence a nahrazení.

To, že se uvádějí i nadbytečné axiomy, je dáno historickými a pedagogickými důvody – přeci jen je snazší pochopit axiom dvojice než axiom nahrazení. Dalším důvodem je, že se občas uvažují jiné teorie množin bez axiomu potence či bez axiomu nahrazení, ale těmito verzemi se zabývat nebudeme.

Dvojice a kartézský součin

Nyní si ukážeme, jak pomocí množin vytvořit některé známé struktury, které se od běžných množin liší.

Neuspořádaná dvojice obsahující prvky a a b je množina $\{a, b\}$. Obecně se tedy jedná o dvouprvkovou nebo jednoprvkovou množinu.

Uspořádaná dvojice (a, b) je množina $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

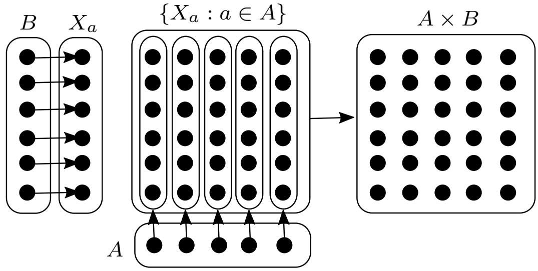
Cvičení 8. Ukaž, že uspořádaná dvojice $(\emptyset, \{\emptyset\})$ je prvkem $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$.

Následující cvičení říká, že uspořádané dvojice se chovají tak, jak bychom chtěli, tedy že jednoznačně určují svůj první i druhý prvek.

Cvičení 9. Ověř, že pokud $(a_0, b_0) = (a_1, b_1)$, tak už nutně $a_0 = a_1$ a $b_0 = b_1$.

Kartézský součin $A \times B$ je množina obsahující všechny uspořádané dvojice (a, b), kde $a \in A$, $b \in B$, lze jej tedy zapsat jako $\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Příklad. Ukážeme z axiomů, že pro libovolné dvě množiny A, B existuje kartézský součin $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$. Pro každé a, b plyne existence dvojice (a, b) z trojnásobného použití axiomu dvojice.[8] Dále zafixujeme a a definujeme formuli $\psi(x, y)$ jako $y = (a, x)$. Díky axiomu nahrazení existuje množina obrazů všech $b \in B$ v tomto zobrazení, tedy množina $X_a = \{(a, b) : b \in B\}$. Tím už jsme skoro hotovi, stačí sjednotit množiny X_a pro $a \in A$. Množina X_a existuje, ať zvolíme kterékoli a. Uvažme jinou formuli $\psi(x, y)$, a to $y = \{(x, b) : b \in B\}$ (neboli $y = X_x$). Použitím axiomu nahrazení na množinu A dostáváme množinu $\{X_a : a \in A\}$. Aplikováním axiomu sjednocení na tuto množinu dostáváme $A \times B$.



Cvičení 10. Dokaž existenci kartézského součinu bez použití axiomu nahrazení.

Třídy a dvojí pohled na zobrazení

V prvním díle jsme definovali zobrazení (neboli funkci) jako předpis, jak přeměnit jeden typ objektů na jiný. Toto lze formálně přepsat pomocí formule jako v axiomu nahrazení: Uvažme formuli $\psi(x, y)$, která neobsahuje proměnné y_0, y_1, a navíc pro ni platí

$$(\forall x, y_0, y_1)\big((\psi(x, y_0) \wedge \psi(x, y_1)) \Rightarrow (y_0 = y_1)\big).$$

Pak taková formule určuje *třídovou funkci* f_ψ, kde zápisem $f_\psi(x)$ rozumíme ten jediný prvek y, který splňuje $\psi(x, y)$ (existuje-li). Takto popsaná funkce je formulí, nikoli množinou. Další formule ale mohou mluvit jen o množinách. Nelze tedy například napsat formuli, která by znamenala „existuje zobrazení“, což je například pro porovnávání mohutností množin celkem podstatný problém. Proto definujeme funkci coby množinu.

Množinovou funkcí $f\colon A \to B$, kde A, B jsou množiny, myslíme nějakou podmnožinu součinu $f \subset A \times B$, takovou, že pro každé $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$ splňující $(a, b) \in f$. I zde píšeme $f(a) = b$.

Jakmile máme takovou množinu f, můžeme pomocí ní napsat odpovídající formuli $\psi(x, y)$ coby $(x, y) \in f$. Takto jsme převedli množinové zobrazení f na *třídové* zobrazení f_ψ, problém je, že obráceně to nemusí být možné provést. Pro lepší uchopení si objasníme pojem třídy.

Vraťme se k Russelovu paradoxu. Ten vzešel z toho, že jsme s množinami začali zacházet způsobem, na který původně nebyly stavěny. Pokud bychom zůstali u množin coby „souhrnného označení pro nějaký typ bodů v rovině, časových okamžiků, lidí na Zeměkouli, …“, tak bychom Russelův paradox nedostali. Problém nastal, když jsme množiny opět prohlásili za matematické objekty a začali strkat množiny do množin. V takovém okamžiku se ukázalo, že za množinu nemůžeme prohlásit jen tak něco, nýbrž jen to, co sestrojíme pomocí axiomů. Občas se ale hodí používat opět množiny v jejich původním významu, tedy jen coby souhrnné označení pro nějaký typ objektů. Jenže slovo množina je již zabrané. Proto budeme souhrnnému označení pro nějaký typ množin říkat *třída*.

Formálně je *třída* T vždy reprezentovaná nějakou formulí $\varphi(x)$. Za prvky třídy T pak prohlásíme přesně ty množiny x, pro které $\varphi(x)$ platí.

[8] Jedno použití vytvoří množinu $\{a\}$, druhé množinu $\{a, b\}$ a poslední žádanou množinu.

Příklad.

(i) Třída všech množin je reprezentovaná formulí $x = x$. Z Russelova paradoxu plyne, že tato třída neodpovídá žádné množině. Třídy, které neodpovídají žádné množině, budeme nazývat *vlastní*.

(ii) Pro libovolnou množinu A můžeme popsat třídu se stejnými prvky formulí $x \in A$. Každá množina je tedy i třídou. Axiom vydělení navíc říká, že kdykoli jsou všechny prvky třídy T obsaženy v jedné množině, je tato třída opět množinou. Proto si lze třídy představovat jako „příliš velké na to, aby byly množinami“.

(iii) Třída všech jednoprvkových množin je reprezentovaná formulí $(\exists y)(x = \{y\})$.

Cvičení 11. Dokaž, že třída všech jednoprvkových množin je vlastní.

V některých případech se třídy chovají oproti množinám benevolentněji, v některých stejně, v jiných zas striktněji. Stejně jako v množinách můžeme pro libovolné dvě třídy T, U reprezentované formulemi φ, ψ napsat

(i) $T \cup U$ (třída reprezentovaná formulí $\varphi(x) \vee \psi(x)$),

(ii) $T \cap U$ (třída reprezentovaná formulí $\varphi(x) \wedge \psi(x)$),

(iii) $T \subset U$ (neboli $(\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))$).

Na rozdíl od množin ale

(i) vlastní třída nemůže být prvkem množiny ani třídy,

(ii) třídy nelze kvantifikovat (tedy ptát se, zda existuje třída či zda něco platí pro každou třídu). Ve výjimečných případech, kdy se tak děje (například ve schématech vydělení a nahrazení), se nejedná o formuli, ale pouze o „metatvrzení“, těmito nuancemi se však nebudeme příliš zabývat.

Nyní je zřejmé, proč zobrazení určené formulí nazýváme třídovým. Platí ještě jedno metatvrzení dávající do souvislosti třídy a zobrazení.

Tvrzení. *Třídové zobrazení lze zapsat množinově právě tehdy, když jeho definiční obor je množina.*

Důkaz. Pokud lze zobrazení napsat množinově, je jeho definiční obor množina z definice množinového zobrazení. Naopak předpokládejme, že máme třídové zobrazení, jehož definiční obor je množina A. Z axiomu nahrazení je tak i jeho obor hodnot množina, označme ji B. Hledané množinové zobrazení dostaneme vydělením z kartézského součinu $A \times B$. $\square$

Příklad. Potence je třídová funkce, kterou nelze vyjádřit množinou, protože je definovaná na všech množinách.

Třídová a množinová zobrazení nebudeme důsledně rozlišovat, nicméně pokud to bude možné, budeme chápat zobrazení jako množinová.

Ordinální čísla – typy DUM

Podobně jako jsme zavedli funkci f coby množinu, můžeme zavést DUMu. DUM coby objekt v sobě musí mít uloženou nejenom nosnou množinu, ale i informaci o tom, jak se prvky nosné množiny porovnávají. Formálně proto definujeme DUMu jako dvojici (D, U), kde D je nosná množina a $U \subset D \times D$ je uspořádání na ní. Uspořádání U pak funguje tak, že značením $d_0 < d_1$ rozumíme $(d_0, d_1) \in U$. Aby (D, U) byla DUM, požadujeme po U vlastnosti dobrého uspořádání.

Jak se ukázalo v minulém díle, není pro DUMu důležitá ani tak její nosná množina, jako spíš jen její „typ“. Prozatím si typ představujeme naivně jako „zapomenutí konkrétních prvků“, ale daleko vhodnější bude jej definovat jako konkrétní množinu. To se standardně provede takto:

Definice. Mějme DUMu (D, U). Transfinitní rekurzí definujeme na D zobrazení f předpisem $f(x) = \{f(d) : d < x\}$, speciálně pro nulový prvek $d_0 \in D$ vyjde $f(d_0) = \emptyset$. Nakonec definujeme *typ* této DUMy jako $\mathrm{typ}(D, U) = \{f(d) : d \in D\}$. Množiny, které lze získat jako $\mathrm{typ}(D, U)$ nějaké DUMy (D, U), nazveme *ordinálními čísly* (stručně *ordinály*).

Příklad. Pro libovolnou trojprvkovou DUMu (D, U) na nosné množině $\{d_0, d_1, d_2\}$, kde $d_0 < d_1 < d_2$, se chová definice typu takto:

$$f(d_0) = \emptyset, \quad f(d_1) = \{\emptyset\}, \quad f(d_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \mathrm{typ}(D, U) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}.$$

Ještě dodejme, v jaké formě jsme použili transfinitní rekurzi. Rekurzivní předpis je třídové zobrazení definované na všech množinových funkcích, jejichž definičním oborem je $D \leftarrow x$ pro nějaké $x \in D$. Výsledná funkce pak je opět množinová. Jelikož někdy neumíme předem omezit třídu všech možných částečných množinových funkcí množinou, není tvrzení o existenci funkce dané transfinitní rekurzí tvrzením popsatelným formulí, ale metatvrzením, do kterého teprve můžeme dosazovat různé rekurzivní předpisy.

Cvičení 12. Projdi důkaz existence funkce dané transfinitní rekurzí (z minulého dílu) a rozmysli si, které axiomy jsou potřeba pro tvrzení, že každá DUM má typ.

Nyní si uvědomíme, jak vypadají typy DUM. Každý z postupně přidávaných prvků $f(x) = \{f(d) : d < x\}$ obsahuje všechny prvky $f(d)$ pro $d < x$. A také naopak žádný z těchto prvků $f(d)$ prvek $f(x)$ neobsahuje – to plyne z axiomu fundovanosti.[9] Celkově dostáváme, že funkce f zobrazila nosnou množinu DUMy (D, U) na $\alpha = \mathrm{typ}(D, U)$ takovým způsobem, že

$$(d_0 < d_1) \Leftrightarrow (f(d_0) \in f(d_1)).$$

Pokud se budeme dívat na náležítko coby na znaménko uspořádání, vidíme, že f je rostoucí bijekcí mezi DUMami (D, U) a $(\alpha, \in)$, platí tedy $(D, U) \simeq (\alpha, \in)$.

Ano, používání náležítka k porovnávání zprvu vypadá jako nehorázná zhůvěřilost, k tomu přeci vůbec nebylo stavěné. Na druhou stranu je náležítko to nejjednodušší, co v jazyce teorie množin máme, a ukáže se být zcela postačujícím a dokonce praktickým. Na prvcích ordinálního čísla bude proto náležítko plnit roli menšítka $<$.

Další věc, které si můžeme všimnout rovnou z definice funkce typ, je $f(x) = \mathrm{typ}(D \leftarrow x, U)$. Prvky ordinálního čísla jsou tedy opět ordinály – typy všech menších DUM. Tato skutečnost usnadňuje jejich porovnávání. Konkrétně pro ordinály α, β platí

(i) $(\alpha, \in) \simeq (\beta, \in)$ právě tehdy, když $\alpha = \beta$,
(ii) $(\alpha, \in) < (\beta, \in)$ právě tehdy, když $\alpha \in \beta$,
(iii) $(\alpha, \in) \leq (\beta, \in)$ právě tehdy, když $\alpha \subset \beta$.

Definice. Označme $\mathbb{O}n$ třídu všech ordinálních čísel.

Později ukážeme, že třída $\mathbb{O}n$ nemůže být množinou. Chová se však jako „největší ordinál", konkrétně:

(i) $(\forall \alpha \in \mathbb{O}n)(\alpha \subset \mathbb{O}n)$.
(ii) $\mathbb{O}n$ je dobře uspořádaná náležítkem. Dokonce v tom smyslu, že kdykoli popíšeme neprázdnou podtřídu $T \subset \mathbb{O}n$, tak tato podtřída má nejmenší prvek. Proč? Uvažme libovolný ordinál $\alpha \in T$. Jedná-li se o nejmenší prvek T, jsme hotovi. V opačném případě je množina $\alpha \cap T$ neprázdná a najdeme nejmenší prvek tohoto průniku díky dobrému uspořádání na α.
(iii) Na $\mathbb{O}n$ lze definovat třídová zobrazení pomocí transfinitní rekurze. Rekurzivní předpis v takovém případě musí být třídové zobrazení, které je definované na všech množinových funkcích f s definičním oborem $\alpha \in \mathbb{O}n$. Transfinitní rekurze pak určuje třídovou funkci F definovanou na všech ordinálech. Formálně napsané Ti to možná zní děsivě, ale jak uvidíš na příkladu ω_α na konci seriálu, samotné použití je docela přirozené.

[9] Případně to lze ukázat i bez něj volbou nejmenšího x, pro které se tato vlastnost porušila.

Zatím jsme si ukázali, že každé ordinální číslo je množina všech menších ordinálů. Následující tvrzení říká, že to platí i obráceně.

Tvrzení. *Nechť $X \subset \mathbb{O}n$ je množina taková, že kdykoli obsahuje ordinální číslo α, tak obsahuje i všechna ordinální čísla $\beta < \alpha$. Pak X je ordinál.*

Důkaz. Z dobrého uspořádání třídy $\mathbb{O}n$ (bod (ii)) plyne, že i X je dobře uspořádaná náležítkem. Navíc dle zadání splňuje pro každý prvek $\alpha \in X$ podmínku $\alpha = \{\beta \in X : \beta < \alpha\}$. To znamená, že funkce $f(\alpha) = \alpha$ splňuje rekurzivní předpis pro definici typu DUMy $(X, \in)$, takže $\mathrm{typ}(X, \in) = X$, čili X je ordinální číslo.

Důsledek. *Pro libovolnou množinu $X \subset \mathbb{O}n$ je $\bigcup X$ ordinální číslo.*

Důsledek. *$\mathbb{O}n$ je vlastní třída.*

Důkaz. Kdyby $\mathbb{O}n$ byla množina, tak by byla ordinálem. To by ale znamenalo $\mathbb{O}n \in \mathbb{O}n$, což je sporu s fundovaností.[10] $\square$

Cvičení 13. Ukaž, že množina X je ordinální číslo právě tehdy, když platí následující dvě podmínky.

(i) Pro každé dva různé prvky $x, y \in X$ platí $x \in y$ nebo $y \in x$.
(ii) Každý prvek $x \in X$ je podmnožinou X.

Definice. Ordinály dělíme na *nulový, izolované* a *limitní* podle toho, jaké prvky reprezentují v uspořádané třídě $\mathbb{O}n$. Konkrétně:

(i) *Nulový* ordinál je jen prázdná množina $\emptyset$.
(ii) *Izolovaný* ordinál α je takový, který má největší prvek $\beta \in \alpha$ v uspořádání náležítkem.
(iii) *Limitní* ordinály jsou ty, které nejsou nulové ani izolované.

Přirozená a reálná čísla

Nyní definujeme přirozená čísla coby množiny. Přirozená čísla jsou od toho, aby udávala velikosti konečných množin. Je proto vhodné, aby každé přirozené číslo mělo tolik prvků, kolik je ono samo. Tedy 0 bude prázdná množina, 1 bude jednoprvková množina, 2 bude dvouprvková, a tak dále. Prázdná množina je určena jednoznačně $0 = \emptyset$, ale které prvky dát do dalších přirozených čísel? Musí se jednat o již dříve definované množiny, tak dává smysl, aby to byla přímo předchozí přirozená čísla:

$$1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}, \ldots$$

Přesně takto se ale staví i ordinální čísla. Přirozená čísla jsou tedy jen počátečními ordinálními čísly – těmi konečnými. Formálně popíšeme, které ordinály považujeme za *konečné.*

Definice. *Konečné* ordinální číslo (nebo též *přirozené číslo*) α je takové, které není limitní a ani žádný menší ordinál není limitní. Symbolem ω značíme množinu všech konečných ordinálních čísel.

Z toho snadno plyne, že kdykoli je ordinál n konečný, jsou i všechny ordinály $k < n$ konečné. Množina ω je tak současně ordinálem, a to nejmenším nekonečným – všechny menší jsou konečné a ω nemůže obsahovat samu sebe.

Musíme ale dokázat, že ω existuje (tedy že se nejedná o vlastní třídu). Zvolme libovolnou množinu m z axiomu nekonečna a vydělme z ní množinu $\omega' = \{n \in m : n \text{ je konečný ordinál}\}$. Dokážeme, že ω' obsahuje všechny konečné ordinály, a je tak hledanou ω. Zvolme pro spor nejmenší konečný ordinál $n \notin \omega'$. Nulový ordinál v ω' leží, takže je n izolovaný a existuje jeho předchůdce $n' \in \omega'$. Jenže $n = n' \cup \{n'\}$, a tak $n \in m$ z podmínky pro m. Proto i $n \in \omega'$.

[10] Kdybychom nechtěli použít axiom fundovanosti (který se občas vypouští), mohli bychom argumentovat i tím, že pro DUMu nemůže nastat $\mathbb{O}n < \mathbb{O}n$.

Na ordinálech, a tudíž i na přirozených číslech, zavedeme operace sčítání a násobení pomocí sčítání a násobení na DUMách. Pouze s tím rozdílem, že na výsledek aplikujeme zobrazení typ, abychom získali opět ordinální číslo, tedy $\alpha \cdot \beta = \operatorname{typ}\big((\alpha, \in) \cdot (\beta, \in)\big)$.

Cvičení. Rozmysli si, že součet i součin přirozených čísel je opět přirozené číslo.

Na základě přirozených čísel definujeme celá čísla. Množinou celých čísel $\mathbb{Z}$ bude $(\{0,1\} \times \omega) \setminus \{(1,0)\}$. Celé číslo pak je vždy dvojice (z, n), kde n je přirozené číslo určující absolutní hodnotu celého čísla a $z \in \{0,1\}$ určuje jeho znaménko (0 znamená plus). Z množiny celých čísel vyjímáme dvojici $(1, 0)$, která by reprezentovala číslo „-0".

Dále definujeme racionální čísla (zlomky) coby dvojice (a, b), kde a je celé číslo a b je nenulové přirozené číslo nesoudělné s a. Tuto dvojici interpretujeme jako zlomek $\frac{a}{b}$. Operace na celých a racionálních číslech se definují klasicky, ale bylo by nudné to zde rozepisovat.

Poznámka. Při takto definovaném rozšiřování čísel je 42 coby přirozené číslo jiné než 42 coby celé číslo, a to je jiné než 42 coby racionální číslo. Tento formalistický problém ale matematiky nikdy příliš nevzrušoval a běžně jsou přirozená čísla chápána jako podmnožina celých a ta zase jako podmnožina racionálních, ačkoli tomu tak formálně vzato zcela není.

Předvedeme ještě elegantní definici nezáporných reálných čísel, kterou lze snadno rozšířit na definici všech reálných čísel. Bylo by možné je definovat pomocí nekonečného desetinného (či binárního) rozvoje, avšak v takovém případě by bylo nesnadné například definovat násobení, proto to uděláme jinak.

Definice. Nechť $\mathbb{Q}_0^+$ značí množinu nezáporných racionálních čísel. O množině $R \subset \mathbb{Q}_0^+$ řekneme, že to je nezáporné reálné číslo, pokud

(1) s každým prvkem obsahuje všechny menší, tedy $(\forall r \in R)(\forall s \in \mathbb{Q}_0^+)(s < r \Rightarrow s \in R)$,
(2) nemá největší prvek,
(3) $R \neq \mathbb{Q}_0^+$.

Nezáporné reálné číslo tedy charakterizujeme výčtem všech racionálních čísel, která jsou menší. Racionální číslo $q \in \mathbb{Q}_0^+$ odpovídá reálnému číslu $\{r \in \mathbb{Q}_0^+ : r < q\}$. Operace v reálných číslech definujeme následovně:

(i) pro nezáporná reálná čísla R, S definujeme $R + S = \{r + s : r \in R, s \in S\}$,
(ii) pro nezáporná reálná čísla R, S definujeme $R \cdot S = \{r \cdot s : r \in R, s \in S\}$,
(iii) pro nezáporná reálná čísla R, S definujeme $R \leq S$ jako $R \subset S$.

Množinu nezáporných reálných čísel značíme $\mathbb{R}_0^+$.

Poznámka. Tato konstrukce reálných čísel je nejbližší konstrukci pomocí Dedekindových řezů. Standardní konstrukce Dedekindovými řezy definuje rovnou všechna reálná čísla (nikoli jen nezáporná). V takovém případě je třeba ještě zakázat prázdnou množinu a věnovat větší péči násobení reálných čísel.

Cvičení 14. Dokaž, že množiny popsané v bodech (i), (ii), tedy součet a součin dvou nezáporných čísel, odpovídají definici nezáporného reálného čísla.

Cvičení 15. Najdi nespočetnou množinu $X \subset \mathcal{P}(\omega)$ tak, aby pro libovolné dva prvky $x, y \in X$ platilo $x \subset y$ nebo $y \subset x$.

Z takto definovaných nezáporných reálných čísel plynou klíčové vlastnosti reálných čísel, které popisují jejich vztah k číslům racionálním:

(i) Pro každá dvě různá nezáporná reálná čísla existuje racionální číslo, které leží mezi nimi. (hustota racionálních čísel)
(ii) Uvažme neprázdnou množinu čísel $X \subset \mathbb{R}_0^+$. Řekneme, že X je omezená číslem $r \in \mathbb{R}_0^+$, pokud $(\forall x \in X)(x \leq r)$. Pokud nějaké číslo $r \in \mathbb{R}_0^+$ omezuje X, tak lze najít jedno nejmenší možné číslo, které omezuje X (tímto číslem je $\bigcup X$). (existence suprema)

Nezáporná reálná čísla lze rozšířit na všechna reálná čísla obdobně jako přirozená čísla na celá. Vlastnost hustoty racionálních čísel i existence suprema v nich zůstane zachována.

Příklad. O množině $X \subset \mathbb{R}$ řekneme, že je *diskrétní*, pokud pro každé $x \in X$ existuje otevřený interval[11] I, který splňuje $I \cap X = \{x\}$. Platí, že každá diskrétní množina je spočetná.

Důkaz. Uvažme $x \in X$ a otevřený interval $I = (a, b)$, který splňuje $I \cap X = \{x\}$. Pak je možné najít racionální číslo p uvnitř intervalu (a, x) a racionální číslo q uvnitř intervalu (x, b). Možných dvojic racionálních čísel (p, q) je jenom spočetně mnoho, protože $|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \omega$. Na druhou stranu lze zpětně z dvojice (p, q) rekonstruovat číslo x tím, že najdeme průnik intervalu (p, q) a množiny X. Proto je v množině X jenom spočetně mnoho čísel. □

Cvičení 16. Najdi funkci $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \omega$ takovou, že $f(x, y) = f(y, z)$ nastává jedině pro $x = y = z$.

Nespočetný ordinál

Rozšíření přirozených čísel směrem k reálným byla odbočka demonstrující, že pomocí teorie množin lze stavět i známé matematické objekty. Nyní se vrátíme k výpravě do nekonečna a ještě dál a sestrojíme nespočetné ordinální číslo.

Nechť ω_1 značí množinu všech spočetných ordinálních čísel. Určitě nemůže být ω_1 spočetná – to plyne ze stejného argumentu, z jakého $\mathbb{O}n$ není množina a ω je nekonečná; musela by obsahovat sama sebe, což je ve sporu s fundovaností. Rovněž analogicky je ω_1 nejmenší nespočetný ordinál. Nemusí ale být jasné, proč tato množina existuje, neboli proč není vlastní třídou.

To plyne z axiomu nahrazení pro funkci typ. Začneme s množinou $\{\omega\} \times \mathcal{P}(\omega \times \omega)$, čili množinou všech dvojic (ω, U), kde $U \subset \omega \times \omega$. V některých případech určuje U dobré uspořádání na ω, v takovém případě můžeme najít $\operatorname{typ}(\omega, U)$. Množinu ω_1 sestrojíme jako množinu těchto typů (existuje díky axiomu nahrazení), kterou nakonec ještě sjednotíme s ω (abychom tam dostali i konečné ordinály).

Příklad. Neexistuje rostoucí funkce $f: \omega_1 \to \mathbb{R}$.

Důkaz. Pro spor předpokládejme takovou funkci f. Pak pro každé $\alpha \in \omega_1$ najdeme racionální číslo $g(\alpha)$ v otevřeném intervalu $(f(\alpha), f(\alpha + 1))$. Funkce g je rostoucí, tedy prostá, a dostáváme tak $|\omega_1| \leq |\mathbb{Q}|$, což je spor. □

Dále ω_1 vykazuje řadu analogií s množinou přirozených čísel ω:

ω : Každý prvek $n \in \omega$ dělí ω na konečně mnoho menších a nekonečno větších prvků.
ω_1 : Každý prvek ω_1 dělí ω_1 na spočetně mnoho menších a nespočetně mnoho větších prvků.
Proč? Menších prvků je spočetně, protože to jsou prvky spočetného ordinálu, a větších (ostatních) prvků je nespočetně mnoho, protože ω_1 sama je nespočetná.

ω : Každá množina $X \subset \omega$ je konečná nebo má stejný typ jako ω.
ω_1 : Každá množina $X \subset \omega_1$ je spočetná nebo má stejný typ jako ω_1.
Proč? Plyne z věty o porovnání typů z minulého dílu – buď $\operatorname{typ}(X) \in \omega_1$, a tak je X spočetná, nebo $\operatorname{typ}(X) = \omega_1$.

ω : Množina $X \subset \omega$ je konečná právě tehdy, když $\bigcup X \in \omega$.
ω_1 : Množina $X \subset \omega_1$ je spočetná právě tehdy, když $\bigcup X \in \omega_1$.
Proč? Když je X spočetná a každý prvek $x \in X$ je spočetný ordinál, tak množina $\bigcup X$ je spočetná, a tedy prvek ω_1. Pro opačnou implikaci si stačí uvědomit $X \subset (\bigcup X) + 1 \in \omega_1$.

---

[11] Otevřený interval (a, b) je množina daná předpisem $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ pro dané $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Aby to ale nevypadalo, že se ω_1 chová úplně stejně jako přirozená čísla, nabízíme opět ilustrační pohádku.

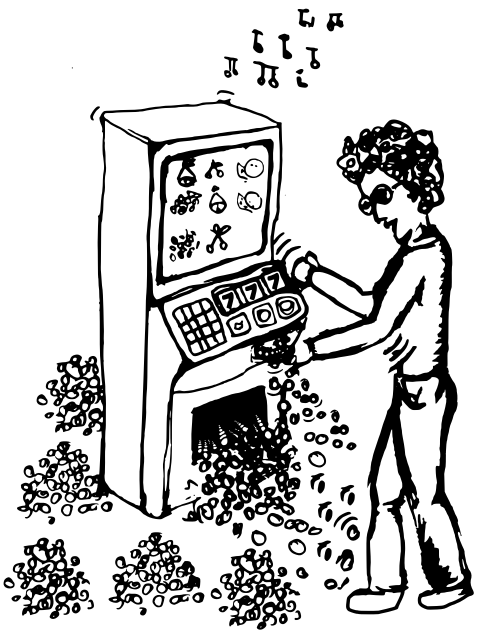
Pohádka o nespočetném gamblerovi

Ve světě teorie množin, kde čas běží po ordinálních číslech, se jistý pan Loudal neustále hádal se svou ženou. Sice před časem nalezl poklad, ale v teorii množin je času nekonečně (a ještě víc), a tak už stihl skoro všechen majetek prosázet v loterii, za což ho Loudalka právě napomínala: „Měl bys s tím sázením skončit v konečným čase a čím dřív, tím líp. Nekonečně mincí se vyhrát nedá, to je dokázaný! Važ si tý jedný mince, co ti zbyla!“ „Ale na mne se jednou usměje štěstí a budeme mít nekonečně peněz,“ snil si Loudal svou.

Navíc tou dobou do vesnice přivezli výherní automat. A nebyl to jen tak kdejaký hrací automat, jaké možná znáte z obyčejného světa. Obyčejné automaty většinou sežerou minci a nic z toho. Kdykoli tento automat obdržel minci, vypadly z něho dvě nové mince stejné hodnoty. Od něčeho tak lákavého Loudalka Loudala zadržet nedokázala. Hodil do něj minci m_0, vypadly dvě další mince m_1, m_2, hodil do něj minci m_1, vypadly další dvě mince m_3, m_4, vhodil mince m_2, vypadly mince m_5, m_6. A takto Loudal pokračoval až do ω, kdy do automatu naházel všechny mince a žádná mu nezbyla.

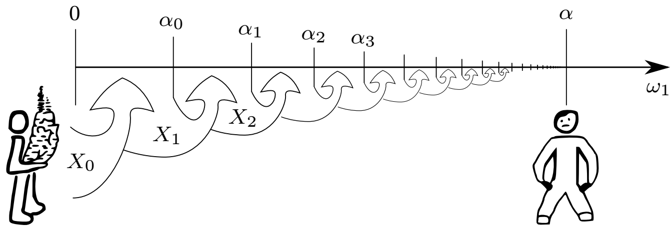
To nebylo to pravé ořechové, pomyslel si Loudal s jednou kapsou prázdnou a druhou vysypanou. Loudalka ho přivítala zčásti vítězoslavně, zčásti pekelně naštvaně, ale unavený Loudal ji ani moc neposlouchal a šel spát. V noci dostal nápad. Hned vyskočil z postele a šel ještě za tmy na ryby, aby si vydělal nějakou tu kačku do automatu. Jakmile se mu to povedlo, vydělanou minci m_0 hodil do automatu a vypadly opět mince m_1, m_2. Minci m_1 si nechal a do automatu hodil až druhou vydělanou minci m_2. Minci m_3 si opět nechal a hodil do automatu m_4, … Takto měl v čase ω od vhození první mince nekonečně mnoho mincí. „No vidíš,“ povídá ráno Loudalce, „já věděl, že se to musí podařit.“

Dalšího dne pak automat vyměnili za nový. Nový automat, kdykoli dostane minci, vyhodí zpátky ω mincí. „No teda,“ pomyslí si Loudal, „teď někomu stačí hodit do automatu jednu minci a bude stejně bohatý jako já, jaká nespravedlnost!“ A hned se mu v hlavě zrodil plán, že kdyby na automatu hrál až do kroku ω_1, mohl by vyhrát nespočetně mnoho mincí. Marně ho Loudalka napomínala, že v tom bude zase nějaká čertovina, akorát se ohradil: „Že dostanu nekonečně mnoho mincí, tos mi taky nevěřila, a jakej jsem byl!“ Loudal vzal svých ω mincí a začal je házet do automatu. Opět se pokoušel si vybírat mince šikovně do zásoby, ale ať se snažil, jak se snažil, ještě dříve, než se dostal do kroku ω_1, byl opět bez peněz. Nespočetně mnoho mincí pomocí takového automatu totiž získat nelze. O tom, jak mu pak Loudalka vyhubovala, raději taktně pomlčíme.



A proč z automatu nelze získat nespočetně mnoho mincí? Dokážeme, že už v některém spočetném kroku Loudal nebude mít do automatu co hodit. Můžeme tedy pro jednoduchost předpokládat, že se Loudal nerozhodl žádnou minci ušetřit do kroku ω_1 (když chceme dokázat, že se do toho kroku stejně nedostane).

Označme X_0 množinu všech kroků, při nichž vhodil do automatu některou z mincí, které měl na začátku. To je spočetná podmnožina ω_1, tedy existuje ordinál $\alpha_0 \in \omega_1$, který je ostře větší než všechny prvky X_0 (například můžeme zvolit $\alpha_0 = \bigcup X_0 + 1$). Před α_0 proběhlo spočetně mnoho kroků a v každém z automatu vypadlo spočetně mnoho mincí. Celkem to je opět spočetně mnoho vypadlých mincí. Označme X_1 množinu všech kroků, během kterých Loudal hodil do automatu některou z nich. Opět najdeme α_1, které je větší než všechny prvky X_1, a opakováním postupu sestrojíme X_n a α_n pro každé přirozené číslo n. Nakonec definujeme spočetný ordinál $\alpha = \bigcup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. V kroku α už Loudalovi žádná mince nezbyla. Každou minci, kterou vydělal před krokem α, totiž vydělal před některým krokem α_n. Jenže to znamená, že ji hodil do automatu před krokem α_{n+1}.



Poznámka. Nepohádková verze tohoto tvrzení se nazývá Pressing down lemma a zní: „Nechť f je funkce $\omega_1 \to \omega_1$. Předpokládejme, že pro všechny nenulové $\alpha \in \omega_1$ platí $f(\alpha) < \alpha$. Pak se nemůže stát, že by všechny množiny $X_\beta = \{\alpha \in \omega_1 : f(\alpha) = \beta\}$ byly spočetné.“ Jak toto tvrzení souvisí s pohádkou? Z Pressing down lemmatu lze přímočaře dokázat nemožnost výhry ω_1 mincí a naopak.

Nejprve ukážeme, že kdyby se Loudal dostal až do kroku ω_1, nemůže platit Pressing down lemma. V každém kroku α si Loudal musí vzít minci z některého předchozího kroku, označíme jej $f(\alpha)$. Množina X_β pro takto definovanou f pak obsahuje všechny kroky, ve kterých hodil do automatu některou minci vydělanou v kroku β. Je tedy spočetná, protože vydělaných mincí z každého kroku je spočetně.

Nyní naopak mějme funkci f, pro kterou jsou všechna X_β spočetná, a ukažme, že se Loudal může dostat do kroku ω_1. V kroku α vezme Loudal minci z kroku $f(\alpha)$. Navíc mějme zafixované očíslování množiny $X_{f(\alpha)}$ a Loudal si vezme tolikátou minci z kroku $f(\alpha)$, kolikátý je prvek $\alpha \in X_{f(\alpha)}$ v tomto očíslování. Tím nebude potřebovat žádnou minci hodit do automatu vícekrát a vždy bude mít minci, kterou do automatu hodí. Dostane se tedy až do kroku ω_1.

A ještě dál

Postup pro sestrojení ω_1 coby množiny všech spočetných ordinálů lze zobecnit a definovat ω_α pro obecný ordinál α rekurzivním předpisem:

(i) $\omega_0 = \omega$,
(ii) $\omega_{\alpha+1}$ je množina všech ordinálů β splňujících $|\beta| \leq |\omega_\alpha|$,
(iii) $\omega_\alpha = \bigcup\{\omega_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$ pro α limitní.

Takto definované ordinály ω_α mají všechny různou mohutnost, což dává odpověď na otázku, kolik je různě velkých nekonečen. Různě velká nekonečna tvoří vlastní třídu, tedy je jich tolik, že se ani nevejdou do množiny.

Příklad. Pokud bychom chtěli sestrojit hodně velké nespočetné ordinální číslo (resp. DUMu), můžeme uvážit ordinály

$$\omega_0, \quad \omega_{\omega_0}, \quad \omega_{\omega_{\omega_0}}, \quad \omega_{\omega_{\omega_{\omega_0}}}, \quad \ldots$$

a nakonec vzít jejich sjednocení.

Čokoládová výzva

Za následující čokoládovou úlohu na řešitele čeká geometrická **nekonečná posloupnost čokolád**. Ten, kdo ji vyřeší nejrychleji, dostane čokoládu. Ten, kdo ji vyřeší po něm, dostane půlku čokolády, další čtvrtku čokolády, atd. Tak s chutí do řešení! Úloha se týká toho, jak lze mohutnost ω_n charakterizovat i bez použití rekurze či dobrých uspořádání.

Úloha. Nechť α je ordinál a n přirozené číslo. Označme $[\alpha]^n$ množinu všech n-prvkových podmnožin α a $[\alpha]^{<\omega}$ množinu všech konečných podmnožin α. O zobrazení $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$ řekneme, že je *čokoládové*, pokud existuje $(n+1)$-prvková množina $X \subset \alpha$ taková, že

$$(\forall x \in X)(x \notin f(X \setminus \{x\})).$$

Dokaž, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Všechna zobrazení $f\colon [\alpha]^n \to [\alpha]^{<\omega}$ jsou čokoládová.
(ii) $\alpha \geq \omega_n$.

Minulou čokoládovou výzvu vyhrál Danil Koževnikov s následující konstrukcí: Pro DUMy A, B definujeme mocninu A^B jako množinu všech funkcí $B \to A$, které jsou pouze na konečně mnoha místech nenulové. Dvě takové funkce f, g porovnáme tak, že se podíváme na nejvyšší prvek $b \in B$, pro který $f(b) \neq g(b)$, a hodnota v tomto bodě rozhodne, která funkce je větší. Danil takto vymyslel mocnění DUM, které se běžně používá, a s přehledem by vyhrál už jen s DUMou $\omega^{(\omega^\omega)}$.

On však šel dál a zbytek byl mírně zamlžený, tak jej popíšeme pomocí ordinálních čísel a standardní notace ε_α. Stejně jako u sčítání a násobení rozšíříme mocnění na ordinální čísla. Pak transfinitní rekurzí definujeme ε_α předpisem:

(i) $\varepsilon_0 = \omega \cup \omega^\omega \cup \omega^{(\omega^\omega)} \cup \ldots$,
(ii) $\varepsilon_{\alpha+1} = \varepsilon_\alpha \cup \varepsilon_\alpha^{\varepsilon_\alpha} \cup \varepsilon_\alpha^{(\varepsilon_\alpha^{\varepsilon_\alpha})} \cup \ldots$,
(iii) $\varepsilon_\alpha = \bigcup\{\varepsilon_\beta : \beta < \alpha\}$ pro α limitní.

DUMou, kterou Danil vsadil, je $\varepsilon_{(\omega^\omega)}$. Ještě poznamenejme, že v zadání předchozí čokoládové úlohy bylo cílem popsat co možná největší spočetnou DUMu, takže i Danilova DUM je spočetná. Oproti tomu DUM popsaná v předchozí kapitole je nespočetná vzhledem k tomu, že už ω_1 je nespočetná.

Seznam symbolů a pojmů

Na této stránce jsou stručně uvedeny všechny důležité pojmy druhého dílu seriálu. U každého pojmu z tohoto dílu je uvedeno, na které stránce byl definován.

str 2. Logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
str 2. Kvantifikátory $\forall$, $\exists$
str 2. *Náležítko* $\in$
str 2. *Formule* – výroky ve formálním jazyce
str 3. Zkratky $\notin$ (neleží), $\neq$ (nerovná se), $\subset$ (je podmnožinou)
str 3. $\{x : \ldots\}$ – *množina daná předpisem*
str 3. $\{x_0, \ldots, x_n\}$ – *množina daná výčtem prvků*
str 3. $x \cap y$ – *průnik* množin x a y
str 3. $x \cup y$ – *sjednocení* množin x a y
str 3. $x \setminus y$ – *množinový rozdíl* x minus y
str 3. $\mathcal{P}(x)$ – *potence* množiny x
str 4. $\emptyset$ – *prázdná* množina
str 5. $\bigcup X$ – sjednocení všech prvků množiny X
str 6. (a, b) – *uspořádaná dvojice*
str 7. $A \times B$ – *kartézský součin*
str 7. *Třídová funkce*
str 7. *Množinová funkce*
str 7. *Třída* – souhrnnné označení pro všechny množiny s nějakou vlastností
str 8. *Vlastní* třída – třída, která není množinou
str 8. DUM coby dvojice (D, U)
str 8. typ(D, U) čili *ordinální* číslo (stručně *ordinál*) udávající typ DUMy (D, U)
str 9. $\mathbb{O}n$ – třída všech ordinálů
str 10. Ordinál *nulový*, *izolovaný*, *limitní*
str 10. *Přirozené číslo* neboli *konečné* ordinální číslo
str 10. ω – první nekonečný ordinál
str 10. $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{O}n$ – operace na ordinálech
str 11. $\mathbb{R}_0^+$ neboli množina všech *nezáporných reálných čísel*
str 12. ω_1 – první nespočetný ordinál
str 14. ω_α – ordinální číslo α-té nekonečné mohutnosti

Důležité pojmy z minulého dílu: zobrazení (funkce), spočetno, nespočetno, porovnávání mohutností $|A| \leq |B|$, $|A| = |B|$, DUM (dobře uspořádaná množina), operace na DUMách $A + B$, $A \cdot B$, porovnávání DUM $A < B$, $A \simeq B$.

Návody

1. $(\exists y)\Big(\big(\neg(y \in x)\big) \wedge (\forall z)\big(z \in x' \Leftrightarrow (z = y \vee z \in x)\big)\Big)$.

2. Zvol $z = \{x\}$.

3. $a \setminus b = \{z \in a : z \notin b\}$. Stačí tedy volit $\varphi(z)$ jako $z \notin b$.

4. $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\big(z \in y \Leftrightarrow (\forall u)(u \in z \Rightarrow u \in x)\big)$.

5. (i) Existence množiny $\{a\}$ je ve sporu s axiomem fundovanosti. (ii) Stejný argument s $\{a, b\}$.

6. (Zatím není rozepsané kompletně)

$$(\exists m)(\exists e)\Big((\forall z)(z \notin e) \wedge (e \in m) \wedge (\forall x)\Big(x \in m \Rightarrow (\exists y \in m)(\forall z)\big((z \in y) \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x)\big)\Big)\Big).$$

7. (i) Axiom nekonečna vyžaduje existenci množiny, jejímž prvkem je prázdná množina. Tedy prázdná množina sama o sobě musí existovat. (ii) $\psi(x, y)$ definujeme jako $\varphi(x) \wedge (x = y)$. (iii) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ je dvouprvková množina $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Pak definujeme $\psi(x, y)$ jako $(x = \emptyset \wedge y = s) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = t)$ a dostaneme množinu $\{s, t\}$.

8. Postupné kroky:

(i) $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$, $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$,
(ii) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ z (i),
(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ z (i) a (ii),
(iv) $(\emptyset, \{\emptyset\}) = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))))$ z (ii) a (iii).

9. Dvojice (a, b) je jednoprvková množina právě tehdy, když $a = b$. V takovém případě je $\{a\}$ jednoznačně určený prvek této množiny. Pokud je (a, b) dvouprvková, obsahuje jednu jednoprvkovou a jednu dvouprvkovou množinu. Prvek té jednoprvkové musí být a. Současně a musí být jedním z prvků dvouprvkové množiny, ten druhý pak musí být b.

10. Je třeba si vzpomenout na definici uspořádané dvojice. Součin $A \times B$ pak lze dostat vydělením z množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.

11. Sporem: Kdyby to byla množina, tak z axiomu sjednocení existuje množina všech množin. Alternativa: Nechť množina A obsahuje všechny jednoprvkové množiny. Pak obsahuje i množinu $\{A\}$, což je sporu s fundovaností.

12. To, že je rekurzivní předpis jednoznačně definován pro každou částečnou funkci, zaručují axiom nahrazení a extensionality. Pro využívání vlastnosti dobrého uspořádání vždy potřebujeme axiom vydělení: Existuje prvek, který splňuje podmínku, vydělíme tedy množinu všech prvků, které ji splňují, a v té najdeme nejmenší. Dále rozlišíme tři možnosti z důkazu v minulém dílu:

(i) Když x je nulový, stačí axiom existence.
(ii) Když x je izolovaný, používáme axiomy dvojice a sjednocení pro rozšíření f o jeden prvek. Alternativně by stačilo popsat toto rozšířené zobrazení třídově a použít axiom nahrazení stejně jako v bodě (iii).
(iii) Když x je limitní, umíme (jednoznačně) popsat hodnotu pro všechna $y < x$. Stačí tedy použít axiom nahrazení k tomu, že třídové zobrazení, jehož definiční obor je množina, lze reprezentovat množinou.

13. Dopředná implikace byla dokázaná v textu. Předpokládejme (i) a (ii) a dokažme, že X je ordinál. Z (i) vyplyne přímočarou aplikací axiomu fundovanosti (zde se bez jeho využití neobejdeme), že X je dobře uspořádaná náležítkem. Důkaz se dokončí postupem z důkazu předchozího tvrzení.

14. (i) Když $x < r + s$, tak $x = r' + s$, kde $r' = x - s < r$. Z toho snadno odvodíme potřebné vlastnosti. (ii) Analogicky k (i).

15. Přejmenuj prvky nezáporných reálných čísel (coby množin) pomocí bijekce mezi $\mathbb{Q}_0^+$ a ω.

16. Uvaž bijekci $g\colon \mathbb{Q} \to \omega$. Pak lze volit $f(x, x) = 0$. Pro $x < y$ pak $f(x, y) = 2g(q) + 1$, $f(y, x) = 2g(q) + 2$, kde q leží v intervalu (x, y).