

Cestování a bloudění

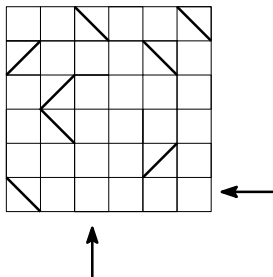
1. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. ÚNORA 2016

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Hloupý Honza bloudil světem, když tu náhle našel podivnou čtvercovou šachovnici. K několika políčkům byla po úhlopříčce připevněna oboustranná zrcátka. Navíc z boku svítily do šachovnice dva lasery. Opodál se válelo další oboustranné zrcátko a Honza se jej rozhodl na šachovnici umístit podobně jako ostatní tak, aby po připevnění zrcátka první paprsek vycházel z šachovnice v políčku, kterým předtím vycházel druhý, a naopak. Kolika způsoby to mohl udělat?



ÚLOHA 2.

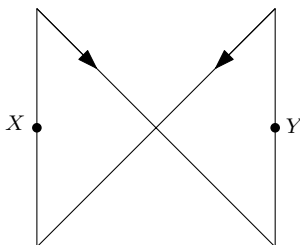
(3 BODY)

V Dračím království je patnáct měst. Mezi některými z nich létá přímá obousměrná dračí linka. Z každého města vede alespoň sedm takových linek. Dokažte, že je možné se s jejich pomocí přemístit mezi každými dvěma městy v království.

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Bára a Kuba chodí dokola po trase, která je tvořena dvojicí rovnoběžných stran čtverce a jeho úhlopříčkami (jako na obrázku). Bára začíná uprostřed levé strany čtverce v bodě X a Kuba uprostřed pravé v bodě Y . Bára obejde celou trasu rovnoměrnou chůzí za 2015 vteřin, Kuba za 2016. Oba zároveň vyrazí po trase směrem nahoru a zastaví se za 2015 · 2016 vteřin. Spočítejte, kolikrát se mezitím na trase potkají.



ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

V bludišti je 2016 místností a k chodeb. Každá chodba spojuje právě dvě místnosti a každá dvojice místností je spojená nejvýše jednou chodbou. Tom do jedné místnosti vhodí Jerryho a do jiné umístí kus sýra. Jerry se snaží dostat k sýru. Pokaždé, když Jerry projde nějakou chodbou, uzamkne Tom chodbu, kterou si sám vybere, a Jerry jí už nikdy nemůže projít. Určete největší k takové, aby se pro jakékoliv bludiště s 2016 místnostmi a k chodbami povedlo Tomovi zabránit Jerrymu v získání sýra.

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Labyrint sestává z několika místností spojených chodbami tak, že se z každé místnosti dá dojít do kterékoliv jiné.¹ Během dlouhého pobytu v labyrintu Vašek z nudy napsal do každé místnosti délku nejkratší trasy, která začíná v této místnosti a navštíví všechny ostatní místnosti. Ukažte, že poměr čísel z libovolných dvou místností je maximálně 1,5.

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

V království jsou čtyři vesnice A , B , C a D , které v tomto pořadí tvoří konvexní čtyřúhelník. Štěpán v poledne vyrazí ze vsi A do vsi C , Filip v jednu hodinu vyrazí ze vsi B do vsi D . Viki prochází všechny obce postupně v pořadí A, B, C, D . V poledne vyjde z A , v jednu projde B , do C dorazí ve stejnou dobu jako Štěpán a do D ve stejnou dobu jako Filip. Viki se v žádné vesnici nezdržuje a vždy hned vyrazí do další. Každý z cestovatelů se pohybuje stálou rychlostí a mezi dvěma vesnicemi jde vždy po přímce. Je možné, aby se Štěpán s Filipem po cestě potkali?

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Skupinka organizátorů vyrazila na jarní PraSečí výlet. Po cestě se občas ke skupince nějaký další org přidal nebo se odpojil. Kdo se od skupinky odpojil, už se znova nepřidal. Ve skupince šel vždy alespoň jeden člověk. Ukažte, že existuje množina orgů taková, že dohromady ušli alespoň polovinu cesty a přitom žádní dva z nich spolu nešli zároveň.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

David a Honza jedou autem. Neshodli se, kdo bude řídit, a tak si zvolili nesoudělná čísla d a h . David po každých d kilometrech zahne o 90 stupňů doprava a Honza každých h kilometrů zahne o 90 stupňů doleva. Pokud by měli oba zahnout najednou, tak budou pokračovat rovně. Na začátku míří ke svému cíli. Dokažte, že se k němu dostanou nezávisle na jeho vzdálenosti od startu, právě když d a h dávají stejný zbytek po dělení čtyřmi.²

¹Chodby spojují vždy právě dvě místnosti a mohou mít různé délky.

²Počáteční vzdálenost do cíle může být i neceločíselná.