

Do nekonečna a ještě dál I

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. PROSINCE 2015

ÚLOHA 1.

(5 BODŮ)

Na nějakém celém čísle na číselné ose sedí neviditelná blecha. V každém skoku skočí o pevně dané nenulové přirozené číslo n doleva nebo doprava (při každém skoku si může znovu vybrat směr). Mirek se snaží blechu chytit tak, že po každém skoku blechy položí na některé celé číslo past. Blechu chytí, pokud položí past na blechu nebo blecha ve svém skoku skočí do již dříve položené pasti. Ukažte, že Mirek může pasti pokládat tak, aby blechu po konečně mnoha skocích zaručeně chytí, i když nezná počáteční pozici blechy, konstantu n ani směry, kterými blecha skáče.

ÚLOHA 2.

(5 BODŮ)

Nechť X je množina všech bijekcí $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ukažte $|X| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)|$, kde symbol \mathbb{R}^+ značí množinu všech kladných reálných čísel.

ÚLOHA 3.

(5 BODŮ)

Najděte takové dvě nekonečné DUMy A, B , aby platilo $A \cdot B \simeq B$. Zdůvodněte, proč se jedná o DUMy, a popište příslušnou rostoucí bijekci.