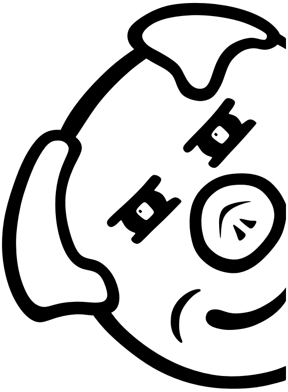
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



Dostávají se Ti do ruky první komentáře letošního ročníku. Naskýtá se otázka, co se s nimi dá dělat? Přinejmenším z nich jde poskládat čepici nebo parník. Odvážnější skladatelé nechť zkusí poskládat něco složitějšího, třeba kočku, sovu nebo ropuchu.[1]

Předtím než se pustíš do skládání, komentáře si určitě stojí za to prolistovat. Ve výsledkovce se můžeš srovnat s dalšími 214 řešiteli, kteří nám poslali svá řešení. Taky v nich najdeš tři suprové série příkladů – povede se Ti zvítězit nad příklady o mnohoúhelnících, funkcích a trojúhelnících? Nezapomeň, že ti nejúspěšnější řešitelé pojedou na jarní soustředění, které je jednou ze dvou nejlepších PraSečích akcí vůbec! Nicméně se měj při pročítání na pozoru, někde v komentářích číhá první díl seriálu o geometrii trojúhelníka, ve kterém David s Radem zjeví, co všechno se s trojúhelníky dá dělat.

Společně se všemi orgy PraSátka doufám, že se Ti řešení semináře bude líbit a že se s Tebou uvidíme na některé z PraSečích akcí.

Za orgy

Honza Krejčí

Co je dále v komentářích?

- Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?
- Poznámky k bodování a výsledkovým listinám
- Vzorové řešení 1. podzimní série
- Seriál – Geometrie trojúhelníka I. – Základní středy
- Anglické povídání ke čtvrté podzimní sérii
- Výsledková listina 1. podzimní série

- Příloha: Zadání 3. a 4. podzimní série a 1. seriálové série

Řešení úloh

Dostal(a) jsi méně bodů, než jsi čekal(a)? Ocenil(a) bys rady, jak správně zapisovat řešení úloh? Potom je právě pro Tebe určený text s názvem **Jak řešit úlohy korespondenčního semináře**. A pokud už řešíš dlouho, zkus si ho přečíst také – určitě v něm najdeš rady, jak psát ještě lépe.

Kurzy pro nadané žáky

Stejně jako loni se organizátoři MKS podílejí na přípravě přednášek pro středoškoláky se zájmem o matematiku pořádaných pod záštitou

[1] Fotky všech výtvorů přijímáme na adrese *mks@mff.cuni.cz*.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

MFF UK. Přednášky se budou věnovat přípravě k matematické olympiádě a také oblíbeným tématům jednotlivých přednášejících. Více informací a možnost přihlášení najdeš na webové stránce *olympiada.karlin.mff.cuni.cz*.

Den otevřených dveří

Ať už teprve začínáš řešit, nebo se letos chystáš maturovat, zveme Tě na Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Akce se uskuteční ve středu **23. listopadu** v Praze. Je to ideální příležitost získat bližší představu o možnostech dalšího studia a potkat ostatní řešitele. Podrobnosti včetně programu najdeš časem na stránkách *mff.cuni.cz/verejnost/dod*.

Noví organizátoři MKS

Letos k nám přišlo hned devět nových organizátorů, které bychom tímto rádi přivítali. Jsou to vesměs bývalí řešitelé *Juro Bodík*, *Víťa Kalisz*, *Áďa Kostelecká*, *Kuba Löwit*, *Marian Poljak*, *Zuzka Svobodová*, *Lucien Šíma*, *Karel Vlachovský* a *Vašek Voráček*. Už se stihli zapojit do chodu semináře – ve svých řešeních uvidíš jejich komentáře a stejně tak budeš v dalších sériích řešit i jejich úlohy.

Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?

Tento text je primárně určen méně zkušeným řešitelům. Jeho cílem je v krátkosti popsat způsob uvažování a vyjadřování, bez kterého se při řešení matematických úloh nelze obejít.

Pokud se rozhodneš řešit úlohy korespondenčního semináře, nestačí je pouze vypočítat. Body získáš jen v případě, že svůj postup nějak rozumně dostaneš na papír. Je tedy dobré si uvědomit, co se vlastně s řešením děje poté, co jej odešleš. Dostane ho do ruky nedůvěřivý opravovatel, jehož snahou je jej pochopit a nechat se přesvědčit o jeho správnosti. Není to tedy jako opravování kvízových otázek, u nichž se dá rychle ověřit, zda byly zodpovězeny správně. Zkus si proto svá řešení přečíst očima někoho, kdo zadanou úlohu vidí poprvé v životě.

Co po Tobě úloha chce?

Úloha často vybízí *„Dokažte!“*, *„Ukažte!“*, *„Zdůvodněte!“*. To znamená, že chceme, abyste ze zadání vyvodili dokazované tvrzení pomocí logických kroků podložených pádnými argumenty. Nestačí tedy nakreslit obrázek, v němž úhel ze zadání vyjde pravý, či ověřit platnost nerovnosti na kalkulačce nebo na počítači pro 150 různých hodnot. Je totiž potřeba ukázat, že tvrzení platí pro všechny možné konstelace, kterých je obvykle nekonečně mnoho.

Jiné úlohy na řešitele apelují *„Rozhodněte!“*, například *„rozhodněte, zda platí“*, *„rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii“* nebo *„rozhodněte, které z čísel je větší“*. Samotné rozhodnutí nestačí, je třeba jej zdůvodnit. To znamená tvrzení dokázat, případně najít protipříklad.

Často se setkáš s úlohami typu *„Najděte!“*, *„Najděte všechny … !“*. V prvním případě stačí, když najdeš nějaké vyhovující řešení. Je potřeba ukázat, že odpovídá požadavkům v zadání, ale už není potřeba se zabývat dalšími řešeními. Druhý případ je složitější, neboť tehdy je potřeba najít všechna vyhovující řešení, a navíc dokázat, že žádné jiné už neexistuje. Obměnou může být například *„Najděte nejmenší … !“*, kde je potřeba najít řešení a ukázat, že menší neexistuje.

Co nemáme rádi?

Do řešení piš jasná tvrzení a zdůvodňuj je. Zadání opisovat nemusíš. Pokud tvrdíš něco, co není pravda, pak je to ideální příležitost pro opravovatele strhnout Ti body. Navíc to, co z nepravdivého tvrzení vyvodíš, nejspíš také neplatí. Máš-li hypotézu, kterou neumíš dokázat, přiznej, že je to hypotéza. Sice pravděpodobně nedostaneš plný počet bodů, ale opravovatel bude rád, že nemusí ve Tvém řešení zbytečně hledat vysvětlení.

Dej si pozor na následující formulace:

- *„je zřejmé“*, *„je vidět“* – Tyto obraty lze v řešení použít. Řešitelé je ale často používají v případech, kdy daná věc není vůbec zřejmá, ba dokonce, když neplatí.

- *„provedeme analogicky“* – Tuto formulaci můžeš použít pouze v případě, že stačí v předchozích argumentech lehká změna značení. Analogie rozhodně neznamená zobecnění, například z důkazu pro 3 nelze takto vyrobit důkaz pro 50, či dokonce pro obecné n.

- *„z obrázku je patrné“* – Obrázky jsou velmi dobré k tomu, aby se opravovatel lépe orientoval v řešení a mohl jej snáze pochopit. Postup by však měl být srozumitelný i bez něj, nikdy se na něho neodkazuj jako na nedílnou součást řešení. Pokud v obrázku zavedeš nějaké značení, měl bys ho vysvětlit v textu, ne ho jen začít používat.

- *„stačí prozkoumat nejhorší variantu“* – Sice by to mohlo stačit, ale dokud neprozkoumáme všechny varianty, nelze říct, že tato konkrétní je nejhorší. Můžeme si to myslet, ale musíme to dokázat. Stejný problém nastává i u dalších formulací (*„nejlepší bude, když“* a podobně).

Pokud tedy některou z těchto frází používáš, rozmysli si, zda se nejedná o jeden z výše uvedených nešvarů.

Co a jak dokazovat?

V této sekci se nejprve podíváme, jak správně interpretovat zadání, a poté uvedeme některé základní důkazové techniky, které můžeš ve svých řešeních použít.

Důkaz by měl vycházet z předpokladů a postupovat k závěrům úlohy. Dej si pozor, abys během řešení nepoužil něco, co nevyplývá z předpokladů nebo předchozích úvah, zejména ne dokazované tvrzení!

• *„jestliže, pak“, „pokud, pak“, „Dokažte, že pokud platí A, pak platí B.“* – Kdykoliv se v zadání vyskytne věta tohoto typu, znamená to, že A je předpoklad (to, z čeho vycházíme a co můžeme při řešení používat), zatímco B je závěr (to, co chceme dokázat).

Předpoklad a závěr nesmíš za žádných okolností zaměnit! Srovnej následující tvrzení:

> Jestliže je číslo dělitelné čtyřmi, pak je sudé. (platí)
> Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné čtyřmi. (neplatí, např. pro 2)

• *„právě když“, „právě tehdy, když“, „tehdy a jen tehdy, když“, „Dokažte, že A platí právě tehdy, když platí B.“* – V tomto případě se vlastně jedná o dvě úlohy. Je totiž potřeba dokázat následující dvě tvrzení:

(i) Pokud platí A, pak platí B.
(ii) Pokud platí B, pak platí A.

Platnost tvrzení se nezmění, když A a B prohodíme, viz následující příklad.

> Dané číslo je dělitelné deseti, právě když jeho poslední cifrou je nula.
> Poslední cifrou daného čísla je nula, právě když je dělitelné deseti.

Důkazových technik je mnoho a my si zde ukážeme dvě základní – přímý důkaz a důkaz sporem.

V přímém důkazu postupujeme od předpokladů, z nichž logickými úvahami vyvozujeme dílčí závěry, až dospějeme ke kýženému výsledku. Naproti tomu v důkazu sporem si na začátku představíme, co by se stalo, kdyby tvrzení neplatilo, a z tohoto předpokladu pak odvodíme evidentně neplatné tvrzení (spor). Použití této techniky si ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že každé prvočíslo větší než 2 je liché.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že jsme našli sudé prvočíslo p větší než 2. Dvojka je jeho dělitel, který není roven ani jedné, ani p. To je spor s předpokladem, že p je prvočíslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Význam výrazů

Když matematik napíše vzoreček, nepředstavuje si pod ním nic jiného než běžné tvrzení. Pro úpravy výrazů, rovnic apod. tedy platí stejná pravidla jako pro obyčejné dokazování.

Definuj všechny proměnné, které ve vzorečcích používáš a nejsou v zadání. Opravovatel jinak těžko pozná, co jsi jimi chtěl říct. Se značením to však není třeba přehánět, a proto si označ vždy jen to, co v řešení budeš potřebovat. Příliš mnoho písmenek přehlednosti neprospívá.

Dále připomínáme, že je v důkazu třeba vycházet z předpokladů, ne z dokazovaného tvrzení. To ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$.

Správné řešení může vypadat takto:

Řešení. Kdykoli umocníme reálné číslo na druhou, získáme nezáporné číslo. Tedy

$$\begin{aligned} 0 &\le (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b, \\ 2\sqrt{ab} &\le a + b, \\ \sqrt{ab} &\le \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiná možnost je tato:

Řešení. Pro spor předpokládejme, že máme dvojici čísel a, b, pro která tvrzení neplatí, tedy $\sqrt{ab} > (a+b)/2$. Pak ovšem

$$\begin{aligned} ab &> \frac{(a+b)^2}{4}, \\ 4ab &> (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ 0 &> a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2. \end{aligned}$$

To je spor, neboť umocněním reálného čísla nemůžeme dostat záporné číslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Oba tyto postupy byly v pořádku. První (přímý) důkaz vycházel pouze ze známých faktů a dobral se kýženého výsledku, druhý důkaz (sporem) předpokládal neplatnost tvrzení a došel k něčemu, co neplatí.

K řešení ale není možné přistupovat zcela přímočaře, tedy jen upravovat dokazovaný vzoreček. To proto, že jakmile do řešení napíšeš $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$, znamená to, že již předpokládáš, že daná nerovnost platí. Jenže to nemůžeš předpokládat, neboť Tvým cílem je to teprve dokázat.

Uveďme ještě jeden příklad, na kterém si ukážeme dvě různá použití proměnných.

Příklad. V závislosti na parametrech a, b, c vyřešte kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Zadání říká, že pro libovolná, ale pevně zvolená čísla a, b, c hledáme všechna x, která vyhovují zadané rovnici. Proměnné a, b, c označují v celém příkladu stále tatáž tři (ne nutně různá) reálná čísla. Každá konkrétní volba parametrů vlastně určuje jinou úlohu, ale přitom chceme vyřešit všechny tyto úlohy naráz, obecně. Proměnná x hraje zcela odlišnou roli – její hodnota je neznámá a naším cílem je ji určit.

Používání známých tvrzení

Může se stát, že v literatuře nebo na internetu narazíš na tvrzení, které Ti usnadní řešení úlohy. Pokud je to nějaká věta, která má jméno (například Cevova věta), nezapomeň její název do řešení uvést. Pravděpodobně ji budeme znát, a když ne, dovedeme ji alespoň najít. Důkaz přitom opisovat nemusíš. V případě, že se jedná o nepojmenované tvrzení, napiš nám zdroj, kde jsi ho našel.

Vzorová řešení

V neposlední řadě bychom Tě chtěli povzbudit k řešení našich úloh. Pokud náš seminář vidíš poprvé, nedej se odradit případnými počátečními neúspěchy. Prostuduj si svá opravená řešení a nezapomeň se podívat také na vzoráky. Vzorové řešení Ti má často co nabídnout i tehdy, když jsi úlohu vyřešil správně. Můžeš v něm najít různé zajímavé přístupy či myšlenky, a něco nového se tak naučit. V poznámkách opravovatele si pak můžeš přečíst, jak se s řešením potýkali ostatní.

Věříme, že Ti tento text usnadní řešení úloh v semináři i jinde a pomůže Ti osvojit si základy matematického uvažování. To, co se naučíš, není jen schopnost řešit matematické úlohy, ale také schopnost samostatně hlouběji přemýšlet. To se Ti určitě bude někdy hodit, a to i tehdy, když se matematikou dále zabývat nebudeš.

Přejeme Ti mnoho radosti při objevování tajů matematiky!

Poznámky k bodování a výsledkovým listinám

Nejprve se zaměříme na jednu zvláštnost našeho semináře. Protože opravování úloh je komplexní záležitost, jsou komplexní i body, které obdržíte od opravovatelů. Každé řešení ohodnotíme číslem tvaru $x + yi$, kde x představuje reálné body a y jsou body imaginární. Jaký je mezi nimi rozdíl? Reálné body jsou „solidní"; jsou to body za správnost řešení, které obvykle dostáváte ve škole, na olympiádách a podobně. Jde o nezáporné celé číslo. Za naprosto správné řešení jich dostanete tolik, kolik činí bodové ohodnocení dané úlohy.

Imaginární body představují druhou, nezávislou stupnici. Vyjadřují míru elegance daného řešení. Hodnota y je celé číslo od -2 do 2. Kladné imaginární body značí řešení, které je radost číst: obsahuje šikovné triky a originální myšlenky nebo nachází souvislosti mezi zdánlivě vzdálenými pojmy. Naopak záporné imaginární body vyjadřují, že jsi někde použil zbytečně složité formulace, několikrát dokazoval totéž, všechno řešil hrubou silou nebo třeba napsal jednoduchý důkaz na pět stránek.

Od komplexních bodů k výslednému hodnocení

Každou úlohu tedy hodnotíme komplexním číslem ve tvaru $x + yi$. Do výsledků celé série pak započítáme hodnocení pěti úloh, které jsi vyřešil nejlépe (měl jsi z nich nejvíce reálných bodů, v případě rovnosti rozhoduje počet imaginárních bodů). Hodnocení těchto příkladů sečteme a tím dostaneme komplexní číslo, které označíme b.

S číslem b se dále pracuje následovně: Nejprve vypočteme *hrubý bodový zisk* – to je reálné číslo, se kterým ve výpočtu všude dále pracujeme namísto komplexního čísla, kterým byly Tvé úlohy ohodnoceny opravovateli. Při zisku b bodů za sérii je výchozí hodnota hrubého bodového zisku dána vztahem[2]

$$\tilde{h} = \Re(b) + \left(2 - \sqrt{3}\right) \Im(b).$$

Jelikož by toto číslo mohlo být teoreticky záporné nebo větší, než je maximální počet bodů za sérii (označíme ho s, obvykle je $s = 25$), „ořízneme" výchozí hodnotu do tohoto intervalu:

$$h = \begin{cases} s & \text{pokud } \tilde{h} \geq s, \\ 0 & \text{pokud } \tilde{h} \leq 0, \\ \tilde{h} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Aby byli při bodování úloh mírně zvýhodněni mladší a začínající řešitelé, určuje se u každého řešitele tzv. *koeficient*. Jeho výchozí hodnota se vypočte následovně:

$$\tilde{\kappa} = (r - 1) + \frac{2z}{450},$$

kde r je ročník[3] (přepočítaný tak, aby odpovídal čtyřletému gymnáziu, studenti a žáci plnící povinnou školní docházku mají $\frac{1}{2}$) a z je počet počet bodů, které řešitel získal během předchozích ročníků.[4] Jelikož výsledný koeficient $\tilde{\kappa}$ je vždy číslo z intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 6\rangle$, položíme $\kappa = \min(\tilde{\kappa}, 6)$.

[2]Symboly $\Re(w), \Im(w)$ značí reálnou a imaginární část komplexního čísla w.

[3]Pokud máš ve výsledkové listině uvedený čtvrtý (maturitní) ročník, a přitom jsi mladší, je to nejspíše proto, že nám nedošla informace o Tvém ročníku. Napravit to můžeš buď mailem na *mks@mff.cuni.cz*, nebo přiložením svých údajů k řešením další série.

[4]V minulých letech se při výpočtu koeficientu zohledňovalo i zaměření třídy řešitele. Počínaje loňským ročníkem se již tento údaj nezapočítává.

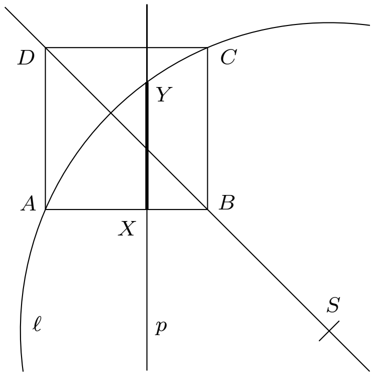
Předpokládejme dále, že $\kappa < 3$. Pro další výpočet bude podstatné číslo t definované jako

$$t = \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\kappa\pi}{6}\right).$$

Hledaný *výsledný bodový zisk* za sérii (což už je číslo, které se udává ve výsledkové listině) pak dostaneme podle vztahu

$$v = \sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (s+t-h)^2} - t.$$

Jak toto číslo interpretovat geometricky? Uvažujme v rovině čtverec $ABCD$ o straně s. Na přímku BD vyneseme bod S ve vzdálenosti $\sqrt{2}\,t$ od bodu B, přičemž celá úsečka BS je vně čtverce. Dále nechť je dána kružnice ℓ o středu S procházející body A a C. Na úsečce AB najdeme bod X takový, že $|AX| = h$, a povedeme jím kolmici p ($p \perp AB$). Kružnice ℓ a přímka p se protnou ve dvou bodech, ten uvnitř čtverce označíme Y. Výsledný bodový zisk za sérii je $v = |XY|$.



V případě, že $\kappa > 3$, postupujeme takto: číslo t se nyní zvolí jako

$$t = \frac{s}{2}\left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{(6-\kappa)\pi}{6}\right)$$

a výsledný bodový zisk je

$$v = s - \left(\sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (t+h)^2} - t\right).$$

Tento vzorec lze interpretovat tak, že kružnice ℓ je obrazem kružnice získané dle postupu uvedeného výše pro koeficient $6-\kappa$ v osové souměrnosti podle osy AC, jinak zůstává postup stejný.

Nakonec zbývá případ $\kappa = 3$ – tehdy je prostě $v = h$. Lze si to představit tak, že střed S je „v nekonečnu“, tudíž se kružnice změnila na přímku AC.

Další detaily a statistiky úloh

Kromě výsledného bodového zisku lze ve výsledkové listině najít i další údaje. Je v ní po řadě uvedeno jméno, příjmení, třída, zkratka školy, reálné body za jednotlivé příklady a celkové body za sérii.

Do závěrečného hodnocení se počítají všechny série, takže se vyplatí poslat z každé série byť jen jedinou úlohu. Co se naopak nevyplatí, je poslat řešení pozdě: jak ses mohl již v minulých letech přesvědčit, netolerujeme žádné zpoždění! Tedy pokud pošleš své řešení pozdě, sice Ti ho opravíme, ale body za něj nečekej.

Prázdniny

1. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Při potápění v Karibiku objevilo PraSátko poklad – tři zavřené truhly s cedulkami zlaté mince*,* diamanty *a* zlaté mince a diamanty*. Jak ale praví legenda, žádná cedulka není umístěna správně. Pomozte PraSátku cedulky opravit, smíte-li z právě jedné truhly vytáhnout jeden kus pokladu bez dívání se dovnitř.*

(Matěj Konečný)

ŘEŠENÍ:

PraSátko začne tak, že vytiahne jeden kus pokladu z truhlice s nápisom *zlaté mince a diamanty*. Z tejto truhlice vytiahne diamant alebo zlato. Keďže vie, že v tejto truhlici nebudú oba predmety naraz (lebo ceduľka musí klamať), tak predmet, ktorý vytiahne, musí byť aj skutočný názov truhlice. Teda ak vytiahne diamant, musia tam byť iba diamanty, a ak zlato, tak zlato.

Ak je v truhlici, z ktorej ťahalo, zlato, potom čo bude v truhlici s ceduľkou *diamanty*? Nemôžu tam byť diamanty (lebo ceduľka musí klamať) a ani zlato (pretože to je už v inej truhlici). Ostáva mu teda, že tam bude zlato a diamanty. No a na poslednú truhlicu mu už ostali diamanty.

Rovnako to bude, ak vytiahne diamant. V truhle s ceduľkou *zlaté mince* budú zlaté mince a diamanty a v poslednej truhlici budú zlaté mince.

POZNÁMKY:

Vačšine nerobil príklad problém, jedine pár chýb bolo, ak si riešitelia zle prečítali zadanie a mysleli si, že môžu ťahať z každej truhlice.

(Juraj Bodík)

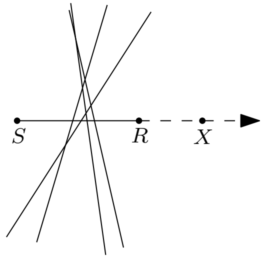
Úloha 2.

Rado byl na dovolené v Rovině. Jednoho večera se pohádal se svou prázdninovou láskou Sofií. A protože Rado všechno řeší fatalisticky, začal vztekle kreslit přímky mezi sebe a Sofii a křičet: „Opovaž se někdy překročit tuhle přímku! Ty budeš na své straně a já zas na své.“ Dokažte, že až se Rado uklidní, může od Sofie důstojně odejít libovolně daleko a nepřekročit přitom žádnou z nakreslených přímek.

(Matěj Konečný)

ŘEŠENÍ:

Označme bodem R Rada a bodem S Sofii. Protože Rado kreslil přímky mezi sebe a Sofii, všechny jeho přímky protnuly přímku SR na úsečce SR (mimo její koncové body). Označme X bod na polopřímce $\overrightarrow{SR}$, který neleží na úsečce SR. Protože dvě různoběžné přímky v rovině mají nejvýše jeden průsečík, může Rado odejít libovolně daleko po polopřímce $\overrightarrow{RX}$ a nepřekročit při tom žádnou přímku.



Poznámky:

Řešení se sešla spousta a většina z nich byla správná. Nejvíce řešitelů dokazovalo úlohu vložením pomocné přímky SR, po které může Rado důstojně odkráčet. Jiní předpokládali, že existuje mnohoúhelník, který Rada ohraničuje, a poté došli ke sporu. Někteří však pouze nakreslili obrázek a řekli, že důkaz je zřejmý. Tímto však plného počtu bodů nedosáhli. Ve spoustě řešení neodcházel Rado, ale Sofie, za což jsem body samozřejmě nestrhávala. Jiným řešitelům zase vrtalo hlavou, jak je Rado schopen nakreslit přímku, když je nekonečná. *(Adéla Kostelecká)*

Úloha 3.

Orgové na devíti kánoích sjížděli Vltavu z Vyššího Brodu do Krumlova. Jako vždy měli všichni zpoždění, a proto každá posádka vyjela v jiný čas. Kánoe celou dobu udržovaly konstantní rychlost, nicméně ne nutně všechny stejnou, a tak se občas předjížděly. Dokažte, že nemohla každá z posádek cestou potkat právě čtyři jiné posádky.

(Matěj Konečný)

Řešení:

Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že každá posádka potkala právě čtyři jiné posádky. Začněme lodí, která dorazila do cíle první. Žádná loď ji nemohla v průběhu cesty předjet, neboť lodě udržují konstantní rychlost. Kdyby ji tedy nějaká loď předjela, už by před ní zůstala a námi vybraná loď by nedorazila první. Proto aby potkala čtyři jiné lodě, musela je předjet sama. Z toho vyplývá, že musela vyrazit v pořadí jako pátá.

Podobně loď, která dorazila jako poslední, musela po cestě předjet čtyři jiné lodě, protože jinak by ony samy skončily poslední. Protože doplula v pořadí devátá, musela startovat jako pátá. To ale není možné, neboť jedna loď nemůže zároveň dojet do cíle jako první a jako devátá. Dostáváme tedy spor s tím, že každá posádka potkala právě čtyři jiné.

Poznámky:

Správná řešení se dělila zpravidla na dva typy. Buďto řešitelé uvažovali lodě, co dojely jako první a jako poslední, nebo naopak lodě, co vyjely jako první a jako poslední. Druhý způsob však musel být doplněn diskusí, neboť obě dvě lodě by dojely nastejno.

Mezi nejčastější chyby patřil předpoklad, že se těch devět lodí rozdělí na dvě skupinky po pěti a po čtyřech. Další častou chybou bylo, že ačkoliv je v zadání, že orgové sjíždějí Vltavu z Vyššího Brodu do Krumlova, uvažovali řešitelé trasu jako nekonečnou a pak pracovali s tvrzením, že rychlejší loď předjede všechny pomalejší před sebou. *(Karel Vlachovský)*

Úloha 4.

Pepa si na prázdniny od Štěpána půjčil jeho chloubu – tři 2016*ciferná čísla, jejichž desítkové zápisy neobsahují nuly a liší se od sebe jen pořadím cifer, přičemž třetí číslo je součtem prvních dvou. Protože je ale Pepa roztržitý, tak ta čísla někde ztratil. Pomozte Pepovi nějakou takovou trojici čísel najít.* *(Rado Švarc)*

Řešení:
Začneme tím, že najdeme tři n-ciferná čísla vyhovující všem ostatním podmínkám zadání pro nějaké $n \mid 2016$ (n je dělitelem 2016). Pak by nám pouze stačilo napsat tato čísla $2016/n$-krát za sebe a součet prvních dvou by byl stále roven třetímu. Pokud totiž budeme čísla sčítat pod sebou, budeme je sčítat v rámci jednotlivých n-ciferných úseků, neboť na jejich rozhraních nebudeme „přecházet přes desítku“ (součet původních n-ciferných čísel byl také n-ciferný). Protože $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$, máme opravdu hodně možností na volbu n. Pro $n \in \{1, 2\}$ taková čísla najít neumíme, ale už pro $n = 3$ můžeme nalézt jednu vyhovující trojici čísel $(495, 459, 954)$. Dále vyhovují například čtyřciferná čísla $(2538, 3285, 5823)$ nebo devíticiferná čísla $(123456789, 864197532, 987654321)$.

Jiné řešení:
Pokud najdeme libovolnou trojici n-ciferných čísel (pro $n \leq 2016$) vyhovující všem ostatním podmínkám, ve které při písemném sčítání alespoň jednou „přenášíme jedničku“, můžeme konstrukci dokončit také jiným způsobem. Bezprostředně vlevo od řádu, ze kterého byla jednička „přenesena“, můžeme dopsat do všech tří čísel libovolný počet devítek (tolik, aby výsledné číslo mělo 2016 cifer). Snadno pak ověříme, že vzniklá čísla stále vyhovují všem podmínkám. Takto můžeme zkonstruovat například z trojice použité v minulém řešení trojici $(4999\ldots9995, 4599\ldots9999, 9599\ldots9994)$.

Poznámky:
Většina řešitelů měla úlohu správně a za pět bodů. Nejvíce řešení postupovalo jako v prvním vzorovém řešení, konkrétních vyhovujících period se objevilo mnoho. V hodnocení jsem byl velmi mírný – často nebylo dostatečně zdůvodněno, že po zapsání čísel „za sebe“ se mezi jednotlivými úseky nebudou „převádět jedničky“. Stejně tak několikrát chybělo dostatečné odůvodnění, že $n \mid 2016$ (jinak konstrukce nefunguje). Protože zadání explicitně neříkalo, jestli se Štěpánova čísla musí lišit, uznával jsem také řešení, ve kterých se dvě z nich rovnala. Imaginární bod $+i$ si zasloužila čtveřice řešení, ve kterých byl ke konstrukci kratších n-tic použit nějaký pěkný trik – třeba desetinný zápis zlomků tvaru $i/7$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ nebo pěkný iterativní postup, který hledaná čísla sám zkonstruoval. *(Jakub Löwit)*

Úloha 5.

Marta našla na chalupě pastelky, a tak obarvila všechna přirozená čísla – každé buď červeně, nebo zeleně. Potom si všimla, že každou z obou barev použila alespoň jednou, součet dvou různobarevných čísel je vždy zelený a součin dvou různobarevných čísel je vždy červený. Ukažte, že součet a součin libovolných dvou červených čísel musí být červený. *(Rado Švarc)*

Řešení:
Nejprve ukážeme, že číslo 1 je zelené. Pro spor předpokládejme, že je červené. Zvolme si libovolné zelené číslo a označme ho z. Protože ale součin červeného čísla 1 a zeleného čísla z musí být červený, dostáváme, že číslo z je zároveň zelené a červené, což nelze.

Označme si c nejmenší červené číslo. Dokážeme, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ je číslo kc červené. Pokud je k zelené, pak to vyplývá z podmínky ze zadání. Pro červené k dokážeme tvrzení sporem. Nechť je pro spor kc zelené. Přičtením červeného c získáme zelené $kc + c$. Přičtením zelené 1 k červenému k získáme zelené $k + 1$. To vynásobíme červeným c a dostaneme červené $kc + c$, což je spor, a kc je tedy červené číslo pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

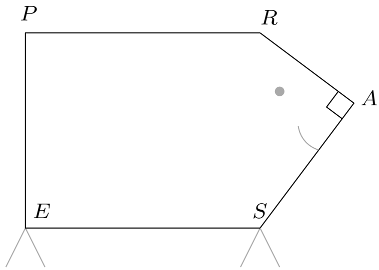
Nyní dokážeme, že všechna čísla nedělitelná c musí být zelená. Čísla menší než c jsou zelená z definice c. Všechna větší čísla nedělitelná c musí být zelená, jelikož je můžeme zapsat jako součet nejbližšího nižšího násobku čísla c (který je červený) a zeleného čísla menšího než c.
Součet a součin dvou červených čísel (tedy čísel dělitelných c) musí být dělitelný c, tudíž červený.

Poznámky:
Došlo mnoho řešení, bohužel jen malá část z nich si zasloužila plný počet bodů. Většina řešitelů se snažila najít obarvení vyhovující podmínkám v zadání. Aby byl důkaz kompletní, je potřeba najít opravdu všechna obarvení a dokázat, že žádná další neexistují. Několik řešitelů zkoušelo upravovat

vztahy mezi zelenými a červenými čísly. V tomto případě je potřeba si dát pozor na to, že tvrzení v zadání jsou implikace (nikoliv ekvivalence), a že je potřeba tvrzení dokázat pro každá dvě červená čísla.
(Lucien Šíma)

Úloha 6.

Matěj měl o prázdninách narozeniny! Dostal k nim dort ve tvaru PraSátka – tj. pětiúhelníka $PRASE$ takového, že $PRSE$ je obdélník a RAS je (ne nutně rovnoramenný) pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u A. Povšiml si, že obsah celého dortu je roven $|PR|^2$. Pak si ale uvědomil, že být o rok blíže smrti není vůbec šťastná událost a že do ní nechce PraSátko tahat, a proto se rozhodl předělat dort do nudnějšího čtvercového tvaru. Ukažte, že umí dvěma rovnými řezy rozdělit pětiúhelník na tři díly tak, že bude možné je přeskládat na čtverec (dílky je možné posouvat, otáčet, a protože je to odolný dort, tak dokonce i překlápět).



(Rado Švarc)

Řešení (podle Danila Koževnikova):

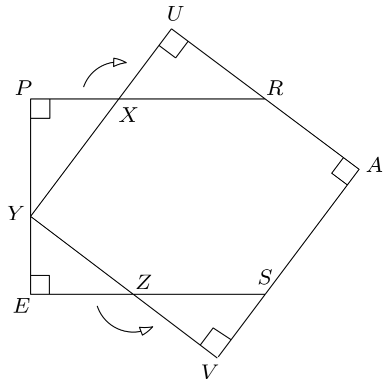
BÚNO nechť PR a ES mají délku 1 a PE a RS délku d. Očividně $0 < d < 1$. Označme si postupně jako a a b délky RA a AS. Platí $0 < a, b < 1$, protože d je délka přepony trojúhelníku RAS a a, b jsou odvěsny.

Obsah $PRSE$ je roven d a obsah RAS je roven $ab/2$. Vzhledem k tomu, že obsah celého útvaru je 1, musí platit $ab = 2 - 2d$. Pythagorova věta nám dává vztah $a^2 + b^2 = d^2$. Z ní a vztahu $ab = 2 - 2d$ získáme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = d^2 - 4d + 4 = (2 - d)^2$$

neboli $a + b = 2 - d$ (protože $a + b$ i $2 - d$ jsou kladná čísla).

Tento vztah se dá ekvivalentně přepsat na $(1 - a) + (1 - b) = d$, takže na straně PE existuje takový bod Y, že $PY = 1 - a$ a $YE = 1 - b$. Definujeme dále bod X jako průsečík strany PR a rovnoběžky s AS vedené bodem Y. Analogicky definujme bod Z jako průsečík strany ES a rovnoběžky s AR vedené bodem Y. Jako U označme průsečík YX a AR a V průsečík AS a YZ. Protože $UX \parallel AS$ a $AR \perp AS$, úhel YUA je pravý. Analogicky je i úhel YVA pravý, takže $UAVY$ je obdélník. Ukažme, že je to dokonce čtverec.



Platí $\sphericalangle XPY = 90° = \sphericalangle RAS$ a $\sphericalangle PYX = \sphericalangle ASR$, protože $AS \parallel XY$ a $RS \parallel PY$. Trojúhelníky XPY a RAS jsou proto podobné z věty *uu*. Úhel XUR je pravý a $\sphericalangle UXR = \sphericalangle PXY$. Odtud pomocí věty *uu* aplikované na $\triangle XPY$ a $\triangle XUR$ dostáváme, že $\sphericalangle PYX = \sphericalangle XRU$. Nyní ukážeme, že trojúhelníky PXY a UXR jsou dokonce shodné podle věty *usu*.

K tomu nám stačí ukázat, že platí $XY = XR$. Z výše zmíněné podobnosti $\triangle XPY$ a $\triangle RAS$ a ze vztahu $PY = 1 - a$ plyne $PX = a(1-a)/b$, $XY = d(1-a)/b$ a $XR = 1 - PX = 1 - a(1-a)/b$. Dokazovaná rovnost je tedy ekvivalentní s

$$1 - \frac{a(1-a)}{b} = \frac{d(1-a)}{b},$$

což po roznásobení a vynásobení b vyjde jako $b - a + a^2 = d - ad$. Víme, že platí $d = 2 - a - b$, z čehož po dosazení dostáváme $a^2 - a + b = 2 - a - b - 2a + a^2 + ab$ neboli $ab = 2a + 2b - 2 = 2 - 2d$, což platí. Všechny úpravy byly ekvivalentní, takže jsme prokázali platnost $XY = XR$. Trojúhelníky PYX a UXR jsou tedy shodné. Z toho vyplývá $UR = PY = 1 - a$ a tedy $UA = 1$. Zcela obdobně dokážeme, že $AV = 1$. To znamená, že $AVYU$ je čtverec o stranách délky 1.

Teď už je řešení vidět na první pohled. Vedeme řezy přímkami XY a YZ, čímž $PRASE$ rozdělíme na 3 díly. Čtverec poskládáme tak, že umístíme $\triangle PYX$ na místo dokresleného $\triangle URX$ a $\triangle EYZ$ na místo $\triangle SVZ$. Díky shodnosti těchto dvojic trojúhelníků tak z pětiúhelníku PRASE vytvoříme jednotkový čtverec $AVYU$, čímž je úloha vyřešena.

Poznámky:
Dortové úlohy mám moc rád, jelikož jsou ukrutně sladké. Úloha šla řešit několika různými, stejně správnými postupy. Za správnou úvahu, jakým směrem by se řešení mělo ubírat, často prezentovanou skrze obrázek, jsem dával jeden bod a to byl také bohužel často jediný bod, který řešitelé za své řešení obdrželi. Při řešení podobných úloh v budoucnu je třeba si pečlivě rozmyslet, co všechno je nutné ukázat, následně vyslovit tvrzení a všechna nezřejmá tvrzení podložit důkazem.

Sešlo se také několik opravdu hezkých řešení jak analytických, tak diskuzí. Nakonec se mi také do rukou dostalo pár řešení psaných na poslední chvíli, což se podepsalo na jejich kvalitě. Dovolím si tedy doporučit sepisovat úlohy zavčas. *(Víťa Kalisz)*

Úloha 7.

PraSe se rozhodlo expandovat do zahraničí a jako první cíl si vybralo Flatlandii. Organizátoři chtěli začít masivní billboardovou kampaní. Vypočítali, že nejefektivnější by bylo postavit billboardy přesně do středu spojnice každých dvou obcí (které považujeme za body). Na to by jim ale nestačil rozpočet, a proto obce přesunuli tak, aby se žádné dvě nepřekrývaly a billboardů bylo potřeba co nejméně. Kolik jich nakonec vylepili, pokud se ve Flatlandii nachází právě n obcí?

(Rado Švarc)

Řešení:

Uvažujme libovolnou vyhovující množinu n obcí a jim příslušných billboardů v rovině. Dále si vezměme nějakou přímku, která není kolmá na žádnou ze spojnic dvou obcí. Tato podmínka nám zakazuje pouze konečně mnoho směrů, kdežto my si svou hledanou přímku můžeme zvolit nekonečně mnoha směry. Vždy tedy takovou přímku najít umíme. Nyní uvažme kolmý průmět všech obcí i billboardů na tuto námi vybranou přímku.

Žádné dva obrazy obcí na této přímce nemohou splývat, je jich tedy stále n. Pokud jsme v rovině měli jejich vyhovující rozmístění, pak je vyhovující i nové rozmístění na přímce – to lze snadno nahlédnout z toho, že byl-li billboard středem dvojice obcí, pak nutně musí být středem té samé dvojice obcí i na přímce po provedení kolmého průmětu. Vidíme, že jsme tedy buď zachovali, nebo zmenšili počet billboardů (některé mohly splynout). To znamená, že máme-li libovolné vyhovující řešení v rovině, pak toto rozmístění můžeme převést na vyhovující rozmístění na přímce a buď zachovat počet billboardů, nebo jej dokonce zmenšit. Existuje-li tedy řešení s nejmenším počtem billboardů, určitě jej lze dosáhnout se všemi obcemi na přímce.

Uvažujme proto libovolných n obcí na přímce (z nichž žádné dvě nesplývají) a označme je postupně a_1 až a_n podle jejich pořadí na této přímce, přičemž ještě přidáme počátek souřadnicové soustavy O před první obec. Nyní můžeme obce porovnávat podle vzdálenosti od tohoto počátku (např. obec $a_2 <$ obec a_3). Definujme $S(a_i, a_j)$ jako střed dvojice vesnic a_i a a_j. Uvažujme body $S(a_1, a_2), S(a_1, a_3), \ldots, S(a_1, a_n)$ a $S(a_2, a_n), S(a_3, a_n), \ldots, S(a_{n-1}, a_n)$. Platí následující uspořádání:

$$S(a_1, a_2) < S(a_1, a_3) < \cdots < S(a_1, a_n) < S(a_2, a_n) < S(a_3, a_n) < \cdots < S(a_{n-1}, a_n).$$

Vidíme, že pro libovolných n vesnic na přímce máme těchto $2n-3$ určitě různých středů některých spojnic dvou vesnic. Protože tyto středy vzhledem k ostrému seřazení nemohou nikdy splynout, musíme určitě využít alespoň $2n-3$ billboardů. Kdybychom jich měli méně, tak by na jednom z těchto bodů chyběl billboard a rozmístění by nebylo vyhovující.

Rozložíme-li obce na jednu přímku tak, že mezi každými dvěma sousedními budou stejné vzdálenosti, bude postačovat $2n-3$ billboardů, které umístíme mezi každé dvě sousední obce a do každé obce kromě obou krajních. Když přiřadíme i-té obci x-ovou souřadnici $2i$ a takto je umístíme na číselnou osu, dáme billboardy přesně na čísla 3, 4, ..., $2n-2$, $2n-1$. Pokud si nyní vezmeme libovolné dvě různé obce i a j, pak je jejich střed (tedy průměr jejich souřadnic) v bodě $(2i+2j)/2$, neboli v bodě s celočíselnou souřadnicí $i+j$. Jelikož $3 \leq i+j \leq 2n-1$, tak takový bod zřejmě splývá s nějakým billboardem, který jsme už umístili.

Ukázali jsme tedy, že umíme dosáhnout počtu $2n-3$ billboardů, a zároveň také to, že jich méně než $2n-3$ být nemůže. Jedná se proto o hledaný minimální počet billboardů pro správné rozjetí kampaně!

Poznámky:

Spousta řešitelů měla problém se správným chápáním stavění billboardů do „středu spojnice každých dvou obcí“. Znamená to, že ať nám nepřítel vybere jakékoliv dvě obce, tak mu musíme ukázat, že jsme do středu jejich spojnice postavili billboard. Hodně řešitelů přišlo na správnou konstrukci obcí na přímce, při které lze docílit počtu $2n-3$ billboardů. K úplnému důkazu je však ještě třeba ukázat, že neexistuje konstrukce, kde by jich bylo méně ;)

Většina správných řešení byla více méně podle vzorového. Imaginární bod si vysloužili *Josef Minařík* a *Lucie Kundratová* za cool využití konvexního obalu a *Ondřej Svoboda* za řešení pomocí extremálního prvku.

(Marian Poljak)

Úloha 8.

Tonda byl o prázdninách ve Vietnamu na návštěvě ve své rodné vesnici. Ta má tvar čtverce o straně délky dva kilometry, je v ní n bodových domů a v každém z nich bydlí jeden člověk. Ve 12:00 se Tonda začal sám doma nudit a rozhodl se, že v 19:00 uspořádá velikou party. Ihned se proto vydal obcházet svoje sousedy s pozváním. Jakmile některý z obyvatel vesnice informaci dostal, šel ji šířit mezi ostatní, kteří zatím odpočívali ve svých domovech, dokud se k nim informace nedonesla. Pokud všichni Vietnamci chodí rychlostí 3 km/h, rozhodněte, zda mohli nezávisle na n a rozmístění domů spolupracovat tak, aby se všech n obyvatel vesnice sešlo v 19:00 u Tondy doma.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

Ano, stihnout to mohli, a to dokonce s nemalou rezervou.

Pro jednoduchost předpokládejme, že žádné dva domy nesplývají. Pokud by tomu tak někde nebylo, tak všem obyvatelům v tomto bodě určíme, že vždy budou chodit spolu, i když bychom je mohli poslat do více různých směrů.

Jelikož je bodů jen konečně mnoho, je konečně mnoho i vzdáleností mezi dvojicemi domů. Z předpokladu dále víme, že všechny vzdálenosti mezi domy jsou kladné. Vezměme tedy nejmenší z těchto vzdáleností a označme ji d. Pro toto d najděme nejmenší $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$d > \frac{2\sqrt{2}}{2^k}\,\text{km}.$$

Víme, že nejdelší úsečka ve čtverci o straně a je jeho úhlopříčka, ta má délku $\sqrt{2}a$. Pokud tedy rozdělíme vesnici na $2^k \times 2^k$ shodných čtverečků, bude v každém čtverečku nejvýše jeden dům. (Každé dva domy jsou od sebe dále, než je délka úhlopříčky, což je největší možná vzdálenost v těchto čtverečcích.) Informovaní vesničané mohou postupovat následovně:

(1) Pokud ve tvém čtverci (na začátku máme čtvercovou vesnici, kterou pak rozdělujeme na menší čtverečky) existuje nejvýše jeden neinformovaný vesničan, navštiv ho (existuje-li) a jděte k Tondovi domů.

(2) Pokud ve tvém čtverci existují dva či tři neinformovaní vesničané, nejdřív dojdi k jednomu z nich a pak spolu dojděte ke zbylému (zbývá-li jeden), nebo každý dojděte k jednomu ze zbylých (zbývají-li dva). Následně jděte také k Tondovi domů.

(3) Pokud ve tvém čtverci existují více než tři neinformovaní vesničané, nejprve zvol libovolné tři z nich a pak podobně jako v předchozím případě nejprve dojdi za jedním z nich a následně se každý vydejte za jedním ze zbylých dvou. Nakonec si rozdělte čtverec na čtyři čtverečky o poloviční délce strany a každý se přesuňte do svého nového čtverečku.

Víme, že těchto podrozdělení provede každý vesničan nejvýše k, neboť poté v jeho čtverečku už nemůže být více než jeden neinformovaný vesničan. Odhadněme tedy, za jakou maximální dobu se tímto způsobem všichni vesničané o párty dozví:

Pokud má čtverec nějakého vesničana stranu délky a, pro navštívení prvního neinformovaného vesničana bude muset ujít nejvýše $\sqrt{2}a < \frac{3}{2}a$ km (přes celou úhlopříčku). Pro navštívení zbylých dvou opět každému z vesničanů stačí ujít nanejvýš tuto délku. Nakonec přechod do nového čtverečku (toho, ve kterém bude vesničan opakovat proces „v příštím kole“) můžeme odhadnout také touto délkou.

Během jedné fáze tedy každý z vesničanů ujde nejvýše $3 \cdot \frac{3}{2}a$ km, tj. stihne ji do

$$\frac{3 \cdot \frac{3}{2}a}{3} = \frac{3}{2}a$$

hodin. Pokud se podíváme na posloupnost délek stran čtverečků v jednotlivých fázích (v první fázi je čtverečkem celá vesnice a informovaný vesničan je jen Tonda), zjistíme, že tvoří část z geometrické posloupnosti

$$\left(\frac{2}{2^i}\,\text{km}\right)_{i=0}^{\infty}.$$

Sečteme-li tuto posloupnost, dostaneme

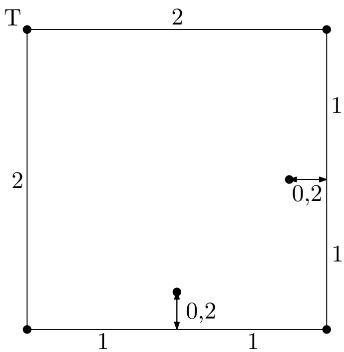
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{2}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2}{2^i} = 4,$$

a tudíž celkový čas, za který budou všichni vesničané informováni, je nejvýše

$$4\frac{3}{2} = 6$$

hodin. Nesmíme však zapomenout na cestu k Tondovi; ta je ovšem dlouhá nejvýše $2\sqrt{2} < 3$ km, což do zbývající hodiny všichni ujít stihnou.

Poznámky:
Úloha byla trochu zjednodušena vysokou časovou rezervou (i v tomto řešení jsme používali zbytečně hrubé odhady, a přesto jsme se do sedmi hodin vešli), což mnoho řešitelů přimělo k sepsání řešení typu „to přeci musejí stihnout“, za což jsem bohužel body udělovat nemohl. Tato řešení měla obvykle vyřešený nějaký speciální případ (často domy uspořádané do mřížky) s tím, že o moc horší rozmístění neexistuje, nebo přímo tvrdila, že dané rozmístění již nejhorší je. Tak tomu ovšem není, dobrým protipříkladem je toto rozmístění šesti domů (včetně Tondova):



Při tomto rozmístění není možné párty uspořádat do

$$\frac{2\sqrt{2} + 2 + 2}{3} \doteq 2{,}28$$

hodin (což je hodnota, která stačí pro libovolnou podmnožinu pravidelné mřížky 3×3), neboť rozebráním případů zjistíme, že nejrychleji to lze až po

$$\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{1 + 0{,}04} + 2}{3} \doteq 2{,}29$$

hodinách. To je sice minimální rozdíl (rozložení domů se příliš neliší od umístění jen na okraj vesnice), nicméně jako funkční protipříklad to stačí.

Bonusové $+i$ si vysloužil *Václav Volhejn*, který použil a elegantně dokázal odlišnou konstrukci dělením vesnice na pruhy. Ta umožňuje dostat všechny vesničany k Tondovi za méně než 4 hodiny. Pokud toto řešení ještě vylepšíme přesnějšími odhady, lze ukázat, že pro libovolné n a rozmístění domů by stačily dokonce jen 3 hodiny a 10 minut, tudíž párty může začít už chvíli po 15. hodině!

(Tomáš Novotný)

Geometrie trojúhelníka I – Základní středy

Life without geometry is pointless. – neznámý autor

Vítáme vás u letošního PraSečího seriálu. Každoročně pro svoje řešitele připravujeme trojdílný text, který se podrobně zabývá nějakým odvětvím matematiky. Ke každému dílu patří série tří úloh hodnocených nejvýše pěti body, které se všechny počítají do celkového bodového zisku (lze tedy získat až 15 bodů za sérii). Letošním tématem je *Geometrie trojúhelníka* a seriál pro vás připravují *David Hruška* a *Rado Švarc.*

Kde jsme to vyhrabali?

Geometrie jako taková je nedílnou součástí matematiky všech vyspělých civilizací. Jakmile lidé zvládli aritmetiku a kupecké počty, začali se zabývat tím, co viděli kolem sebe – tvary, délkami, obsahy, úhly atd. Přitom byli motivováni otázkami typu „Kolik kamene bude potřeba na tuto zeď?“, „Jak daleko je loď na obzoru?“, „Jak vysoká je pyramida?“, „Kdy bude další zatmění Slunce?“ nebo „Jak mám co nejlevněji oplotit co největší pozemek?“[5]. Velkého vývoje a obliby se geometrie dočkala v antickém Řecku, kde se stala prostředkem pro vyjádření množství (a to ve všech možných významech) a byla v podstatě synonymem pro matematiku. Napomohl tomu objev iracionálních čísel, která se v geometrii přirozeně vyskytovala jako délky, ale nedala se „zapsat číslem“. Jistě vám nemusíme představovat jména jako Thalés, Archimédes, Pythagoras nebo Eukleides. Poslední ze jmenovaných položil *Základy*[6] modernímu pojetí matematiky.

S objevem analytické geometrie[7], rozvojem algebry a diferenciálního počtu se klasická syntetická[8] geometrie stala spíše okrajovou oblastí, přesto byla dále rozvíjena velikány jako Leonhard Euler (1707–1783), Gaspard Monge (1746–1818), Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Jakob Steiner (1796–1863) nebo Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834). I s jejich objevy se v seriálu potkáme.

Proč ne třeba geometrie lichoběžníka? A co jsou základní středy?

Téma tohoto seriálu je ještě o něco specifičtější než rovinná geometrie (planimetrie). Cílem geometrie trojúhelníka je systematicky studovat významné body (a další objekty) v trojúhelníku. Ukazuje

[5] Ne že by byla pro matematika zrovna uvěřitelná, ale existuje zajímavá legenda o založení Kartága (pozdější) královnou Dido: *https://cs.wikipedia.org/wiki/Kartágo*.

[6] Jedná se o soubor třinácti knih pojednávajících o základech matematiky axiomatickým způsobem a jednu z nejvydávanějších knih všech dob.

[7] Za jejího zakladatele je považován francouzský filozof a matematik René Descartes (1596–1650).

[8] Analytická geometrie „rozkládá“ geometrické objekty na jednoduché algebraické objekty (např. bod je dán svými souřadnicemi), syntetická naproti tomu vychází z několika intuitivních geometrických faktů a „skládá“ z nich složitější tvrzení.

se totiž, že i tak jednoduchý útvar jich má opravdu hodně. Existuje dokonce *The Encyclopedia of Triangle Centers*[9] obsahující přes 10 000 význačných bodů. A čím že jsou zajímavé? Zejména nečekaným množstvím souvislostí, které mezi nimi matematici stále nacházejí. Už při letmém zkoumání trojúhelníka budeme totiž svědky takové spousty pozoruhodných a krásných „náhod“, že nám snad dáte za pravdu, že to za tu námahu stojí. Ale nebojte se, naším cílem kromě samotného budování teorie kolem trojúhelníku bude i použití nabytých znalostí v obecných geometrických úlohách, takže kromě jiného se určitě dočkáte i nějakého víceúhelníku. Ještě dodáme, že *střed trojúhelníka* je skutečně termín a používá se pro takový bod v rovině trojúhelníka, který je definovaný pouze pomocí jeho vrcholů a nezmění se při jejich záměně. Například těžiště trojúhelníka ABC je jistě stejný bod jako těžiště trojúhelníka BCA, na druhou stranu středy stran tuto vlastnost nemají (proto jsou také tři). Takovým bodům se budeme v prvním dílu převážně věnovat.

Značení a názvosloví

Z důvodů přehlednosti a stručnosti a hlavně proto, že nás to prostě baví, jsme se rozhodli používat ne vždy oficiálních názvů definovaných objektů. V seriálových úlohách a obecně v PraSátku je určitě můžete používat také, ale v Matematické olympiádě (české, jakož i mezinárodní) nebo jiných oficiálních soutěžích, které s námi na první pohled nesouvisí, může být jejich použití ošidné a spíš jej nedoporučujeme. Doufáme, že se vám přesto bude naše názvosloví líbit a shledáte jej praktickým. Při zavádění každého takového názvu na to v textu upozorníme a doplníme oficiálnější alternativu. Pokud byste váhali, odkud se berou písmenka pro označení bodů, tak vězte, že často pocházejí z anglických názvů.

Jak seriál číst?

Přestože první díl začíná skutečně od píky, je přece jen poměrně rozsáhlý a obsahuje mnoho úloh (ve formě cvičení s návody). Je-li vám tedy nějaká část důvěrně známá, neváhejte si jen projet příslušná cvičení a pokračovat dál.[10] Jinak ale doporučujeme číst seriál postupně, neboť se místy odkazujeme zpět (mělo by vždy být přesně patrné kam). Při řešení úloh a cvičení si kreslete co nejhezčí obrázky, opravdu to pomáhá. Můžete také využít výborný program GeoGebra.[11] Pokud byste si s nějakým cvičením nevěděli rady ani po přečtení návodu, obraťte se na nás prostřednictvím e-mailu[12] nebo matematického chatu na PraSečích stránkách.

---

[9] *http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html*

[10] Přeskakovat celý seriál je ovšem přísně zakázáno, už jen kvůli podobným neodolatelně vtipným vsuvkám, jako je tato.

[11] https://www.geogebra.org/

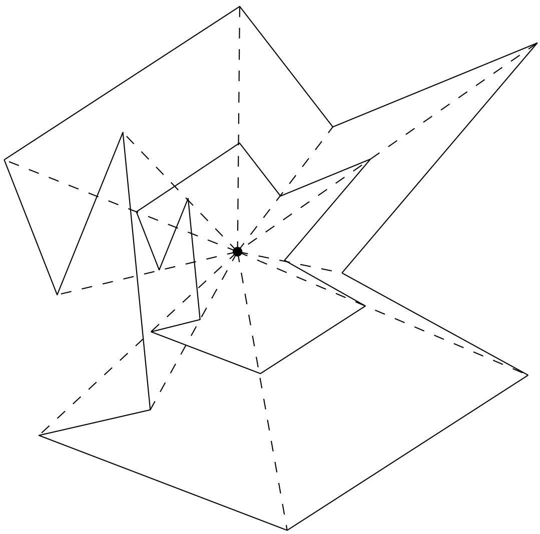
[12] Adresy najdete na *http://mks.mff.cuni.cz/organizatori.php*

Geometry is the science of correct reasoning on incorrect figures. – George Polya

Něco málo do začátku

Při našem putování trojúhelníkem budeme předpokládat jen znalost základních poznatků z geometrie, které se běžně probírají na střední škole. Jsou tu ovšem dvě témata, která nechceme podrobně vysvětlovat, ale budeme je potřebovat. V první řadě jde o větu o obvodovém a středovém úhlu a související kapitolu o tětivových čtyřúhelnících. Ty budeme v prvním dílu používat jen zřídka a příslušné shrnutí můžete najít třeba v naší knihovničce.[13] Pro další díly už budou ale tětivové čtyřúhelníky poměrně nezbytné, takže doporučujeme se s nimi výhledově blíže seznámit. Druhý koncept – stejnolehlost – budeme používat častěji, takže krátce připomeneme, o co se jedná.

Stejnolehlost je geometrické zobrazení, které má za úkol správným způsobem „nafouknout“ nebo „smrsknout“ rovinu kolem sebe. Je určeno středem stejnolehlosti S a koeficientem stejnolehlosti k. Pokud je $k > 0$, potom se při stejnolehlosti libovolný bod roviny X přesune po polopřímce SX tak, aby byl od S vzdálen $k \cdot |SX|$. Pokud $k < 0$, potom se každý bod X přesune na polopřímku opačnou k SX tak, aby byl od S vzdálen $|k| \cdot |SX|$. Konkrétně např. případ $k = -1$ odpovídá středové souměrnosti se středem v S a případ $k = 1$ nic nezmění.



Důležitá fakta o stejnolehlosti, která budeme používat, jsou:

(1) Stejnolehlost je tzv. podobné zobrazení, tj. obraz a vzor jsou vždy podobné.

(2) Speciálně kružnice přechází na kružnici, přičemž střed původní kružnice přechází na střed nové kružnice.

(3) Přímky se zobrazují na své rovnoběžky.

(4) Střed stejnolehlosti, bod a obraz bodu ve stejnolehlosti leží na jedné přímce.

(5) Průsečík dvou objektů se zobrazí na průsečík jejich obrazů.

[13] *https://mks.mff.cuni.cz/library/TetivoveCtyruhelnikyMT/TetivoveCtyruhelnikyMT.pdf*.

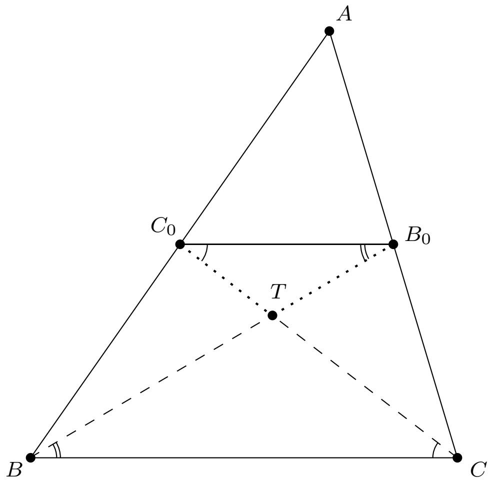
Toto je vše, co budeme o stejnolehlosti potřebovat. Ty zvědavější, kteří si chtějí přečíst o stejnolehlosti více, odkazujeme na seriál *Geometrická zobrazení*[14] od *Pepy Tkadlece* a *Mirka Olšáka*. Nyní jsme už opravdu připraveni pustit se do práce. Příjemnou zábavu, radost z objevování a dobré nápady při řešení úloh vám přejí autoři.

Těžiště

Středy stran BC, AC a AB značíme postupně A_0, B_0 a C_0. Spojnice vrcholu trojúhelníka se středem protější strany se nazývá *těžnice*. Těžnice z vrcholů A, B a C značíme postupně t_a, t_b a t_c.

Tvrzení 1. *Těžnice se protínají v jednom bodě, který dělí každou těžnici v poměru* $1 : 2$, *přičemž kratší úsek je mezi těžištěm a středem příslušné strany. Nazýváme jej těžiště a značíme* T.

Důkaz. Průsečík těžnic t_b a t_c označme T. Trojúhelníky AC_0B_0 a ABC jsou podobné s koeficientem $1/2$, takže střední příčka B_0C_0 je rovnoběžná se stranou BC a má poloviční velikost. Ze dvou dvojic střídavých úhlů dostáváme podobnost trojúhelníků B_0TC_0 a BTC. Tato má opět koeficient $1/2$, takže platí $|BT| = 2|B_0T|$ a $|CT| = 2|C_0T|$. Dokázali jsme, že dvě těžnice se protínají v bodě, který obě dělí v poměru $1 : 2$ a leží blíž ke středu příslušné strany. Můžeme tedy těžiště definovat jako bod ležící v tomto poměru na t_b a vidíme, že jím procházejí i zbylé dvě těžnice.



□

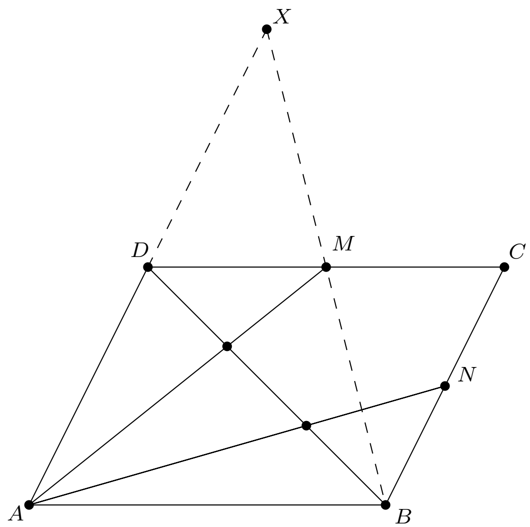
Objevíme-li v obrázku těžnici, střední příčku nebo dokonce těžiště, často nás to podstatně přiblíží k řešení úlohy.

Příklad 2. Buď $ABCD$ rovnoběžník. V jakém poměru rozdělují přímky procházející vrcholem A a středy stran BC resp. CD úhlopříčku BD? (MKS 35–2–3)

Řešení. Označme X průsečík přímek AD a BM, kde M je střed CD. V trojúhelníku ABX je DM střední příčkou, neboť je rovnoběžná s AB a má poloviční délku. Proto je M středem BX, D je středem AX a úsečky AM a BD se jakožto těžnice protínají v těžišti, které speciálně dělí BD

[14] *http://mks.mff.cuni.cz/archive/31/9.pdf*

v poměru 1 : 2. Analogický výsledek dostaneme i pro spojnici vrcholu A se středem BC, takže BD je zmíněnými přímkami rozdělena na třetiny.[15]



Cvičení 3. V trojúhelníku ABC platí $|AT| = |BC|$. Dokažte, že $|\sphericalangle BTC| = 90°$.

Návod. Využijte poměr, v němž T dělí těžnici, a Thaletovu větu.

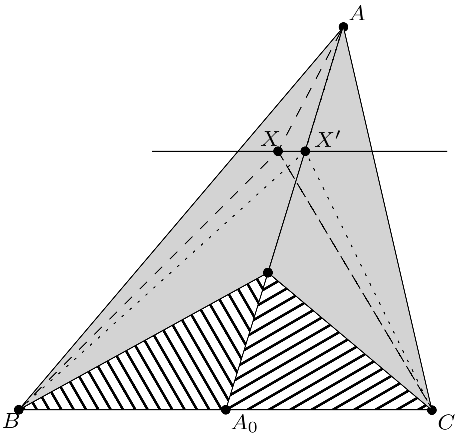
Těžnice a těžiště lze charakterizovat pomocí obsahů, což se občas hodí.

Tvrzení 4. (Těžnice a obsahy) *Těžnice t_a v trojúhelníku ABC je množinou těch bodů X, pro které mají trojúhelníky ABX a ACX stejný obsah.*

Důkaz. Nechť X leží na t_a. Trojúhelníky BA_0X a A_0CX mají stejně dlouhou základnu i příslušnou výšku, takže mají stejný obsah. To samé platí i pro dvojici trojúhelníků BA_0A a A_0CA (odpovídající případu $A = X$). Odečtením dostaneme $S_{ABX} = S_{ACX}$. Pokud X leží mimo t_a, nechť leží BÚNO[16] vlevo od t_a. Označme X' průsečík t_a a rovnoběžky s BC vedené bodem X. Pro X' rovnost obsahů platí, takže $S_{ABX} < S_{ABX'} = S_{ACX'} < S_{ACX}$. Body mimo t_a tedy tuto vlastnost nemají.

[15] Tato konfigurace je doslova plná těžnic, těžišť, středních příček a dobrých poměrů, viz vzorové řešení na *http://mks.mff.cuni.cz/archive/35/komplet2p.pdf.*

[16] Tato zkratka znamená „bez újmy na obecnosti“. Používá se, když si v důkazu z několika případů stačí vybrat jednu konkrétní a důkaz provést pouze pro ni. BÚNO totiž naznačuje, že v ostatních případech by důkaz vypadal skoro stejně (například bychom pouze prohodili některá písmenka nebo zaměnili slova „levý“ za „pravý“ a „nad“ za „pod“). Náš důkaz představuje typický příklad využití.



□

Cvičení 5. S pomocí předchozího tvrzení si rozmyslete, že těžnice na stranu a je množina bodů v určitém pevném poměru vzdáleností od b a c.

Návod. Použijte vzoreček pro výpočet obsahu trojúhelníka.

Cvičení 6. Rozmyslete si, že těžnice dělí trojúhelník na šest částí o stejném obsahu.

Návod. Opakovaně použijte tvrzení o obsazích.

Cvičení 7. Na stranách BC a CD kosočtverce $ABCD$ jsou zvoleny po řadě body P a Q tak, že $|BP| = |CQ|$. Ukažte, že těžiště trojúhelníku APQ leží na úsečce BD.

Návod. Body P a Q jsou stejně vzdálené od střední příčky v trojúhelníku BCD.

Cvičení 8. Dokažte, že trojúhelník vytvořený z těžnic by měl obsah rovný $\frac{3}{4}S$, kde S je obsah původního trojúhelníku.

Návod. Doplňte trojúhelník na rovnoběžník $ABXC$ a dokreslete středové obrazy A, B a X podle C. Vzniklý šestiúhelník je přirozeně rozdělený na šest kopií původního trojúhelníka. Najděte trojúhelník z těžnic.

Cvičení 9. (těžší) Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \le 2$, $t_b \le 3$ a $t_c \le 4$. (MO 61–III–2)

Návod. Využijte cvičení o šesti trojúhelníčcích. Odhadněte obsah jednoho z nich pomocí odhadů délek stran. Najděte trojúhelník, který realizuje maximum.

Není náhoda, že jsme nepotkali skoro žádné související úhly. Smutnou skutečností je, že těžnice ani těžiště obecně žádné dobré úhly nevyrábí.[17] Například úhel u těžnice (tj. třeba úhel BAA_0) nelze jednoduše vyjádřit pomocí vnitřních úhlů. Není to ale vždy úplně beznadějné, viz následující cvičení.

Cvičení 10. Na straně BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC leží body P a Q tak, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCA|$ a $|\sphericalangle CAQ| = |\sphericalangle ABC|$. Body M a N leží po řadě na přímkách AP a AQ, přičemž bod P je středem úsečky AM a bod Q je středem úsečky AN. Dokažte, že přímky BM a CN se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (IMO 2014)

Návod. Dokreslete středy AB a BC. Úhly u těžnice jsou sice tajemné, ale ty odpovídající si v podobných trojúhelnících jsou určitě stejné.

[17]Pokud ale o nějakých víte, určitě nám dejte vědět. :-)

Poznámka. (O fyzikálním těžišti) Pojem těžiště (neboli hmotný střed) známe kromě geometrie také z fyziky, kde označuje bod, v němž musíme těleso podepřít, aby bylo v rovnováze (která ale nemusí být stabilní). Zkuste pověsit homogenní (tedy s rovnoměrně rozloženou hmotou) trojúhelník[18] za vrchol. Kam bude směřovat příslušná těžnice? Tušíte (snad) správně, bude mířit svisle dolů. To znamená, že fyzikální těžiště na ní leží (jinak by spadlo ještě trochu níž), a protože to platí i pro ostatní těžnice, musí fyzikální těžiště splývat s geometrickým. Pokud namítáte, že to nebyl pořádný důkaz, tak máte pravdu, ale na ten nám naše skromné geometrické prostředky nestačí. Pokud umíte aspoň malinko zacházet s vektory, můžete se přesvědčit, že hmotný střed trojice stejně těžkých hmotných bodů se také nachází v těžišti jimi určeného trojúhelníka. Naproti tomu trojúhelník z homogenního drátu má obecně hmotný střed jinde (představte si hodně úzký a vysoký trojúhelník, jeho hmotný střed bude jistě výš než ve třetině výšky).

Opsiště

Začneme opět trochou značení. Velikosti úhlů v trojúhelníku ABC značíme standardně $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$ a $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Přímka kolmá na stranu a procházející jejím středem se nazývá *osa strany.*

Tvrzení 11. *Osy stran trojúhelníka se protínají v jediném bodě, který je středem kružnice trojúhelníku opsané (to je oficiální název). Značíme jej O a krátce nazýváme opsiště.*

Důkaz. Osa strany BC je množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od B jako od C a osa strany AB je množinou bodů stejně vzdálených od A jako od B, takže jejich průsečík (který vždy existuje, neboť strany trojúhelníka nemohou být rovnoběžné) mající obě vlastnosti leží i na ose strany AC a je středem kružnice opsané. □

A kde máme opsiště hledat?

Cvičení 12. Rozmyslete si, že opsiště leží uvnitř trojúhelníka, právě když je ostroúhlý.

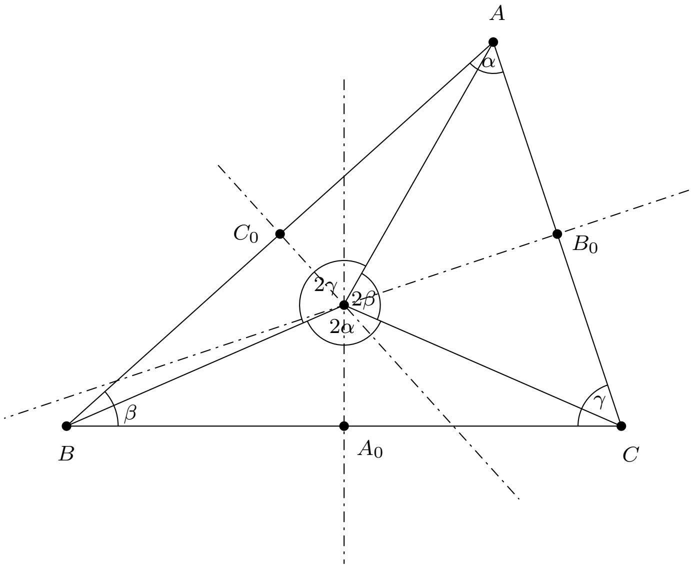
Toto jednoduchoučké tvrzení jsme si všichni vyzkoušeli na vlastní kůži[19] při konstrukci kružnice opsané. Opsiště má ale spoustu dalších vlastností – to nejzákladnější si ukážeme hned, na ty zajímavější si budeme muset ještě chvilku počkat.

Tvrzení 13. (O úhlech kolem opsiště) *V ostroúhlém trojúhelníku platí* $|\sphericalangle BOC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle AOC| = 2\beta$ a $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$.

Důkaz. Plyne z věty o obvodovém a středovém úhlu. □

[18] Doporučujeme nějaký méně abstraktní a více hmotný, než jaké potkáváme obvykle, zkuste třeba papírový.

[19] A vlastní trojúhelník s ryskou.



Věta o obvodovém a středovém úhlu nám dává trochu víc: pomocí α, β a γ umíme snadno vyjádřit každý úhel tvaru $\sphericalangle XPY$, kde P leží na kružnici opsané a X, Y jsou vrcholy trojúhelníka ABC.

Podíváme-li se nyní na trojúhelník BOA_0 s pravým úhlem u vrcholu A_0 a s úhlem $|\sphericalangle BOA_0| = \alpha$, dostáváme snadno následující vztah.[20]

Tvrzení 14. (Sinová věta) *Platí*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Cvičení 15. V rovině jsou dány body A, B, C, D tak, že platí $|\sphericalangle ACB| = 20°$, $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ABC| = 40°$ a $|\sphericalangle ADC| = 80°$. Určete $|\sphericalangle ABD|$.

Návod. Poznejte opsiště.

My geometry teacher was sometimes acute and sometimes obtuse, but always, he was right.
– neznámý autor

Kolmiště

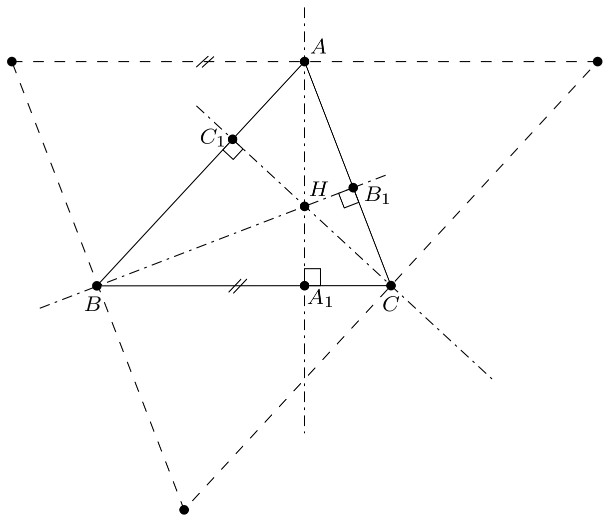
Tvrzení 16. *Kolmice na strany trojúhelníka vedené protějšími vrcholy (tzv. výšky) se protínají v jediném bodě, kterému říkáme*[21] *kolmiště. Výšku na stranu BC značíme v_a a podobně pro ostatní strany, kolmiště značíme*[22] *H a paty výšek A_1 atd.*

[20] Tímto jsme jej přesně vzato dokázali jen pro ostroúhlé trojúhelníky, ale platí obecně. Zkuste si případ tupoúhlého trojúhelníku sami.

[21] Běžně se nazývá *průsečík výšek* nebo *ortocentrum*

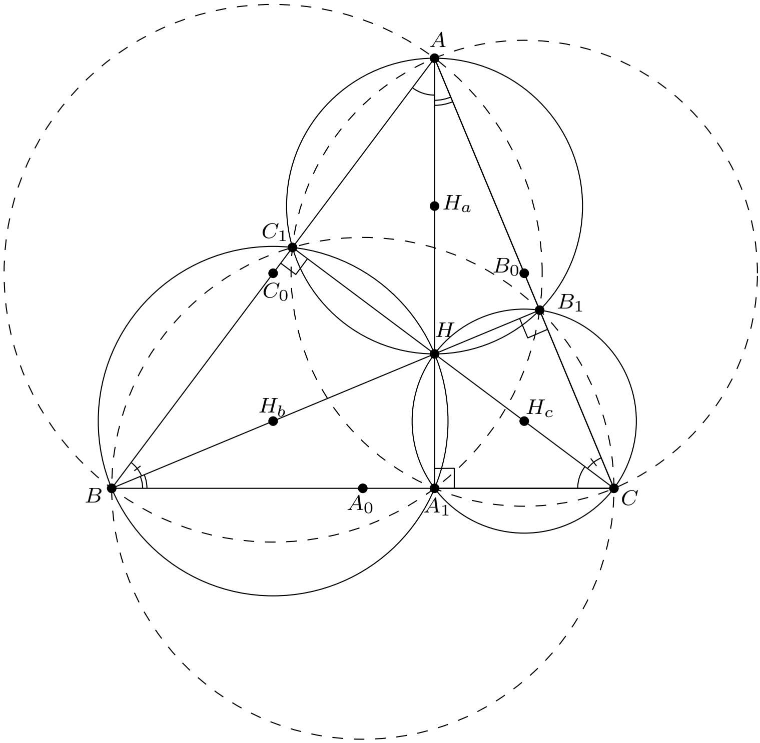
[22] Neptejte se proč, ale je to standardní značení a K už je zabrané, jak uvidíme v příštím dílu.

Důkaz. Vrcholem A veďme rovnoběžku se stranou BC a analogicky pro zbylé dva vrcholy. Tyto tři přímky určují trojúhelník, v němž tvoří strany toho původního střední příčky (střídavé úhly u rovnoběžek generují podobné trojúhelníky se společnými odpovídajícími si stranami, čili shodné trojúhelníky), a tedy výšky v původním trojúhelníku zde tvoří kolmice na strany vedené jejich středy, které se protínají v opsišti.



□

Kolmiště je skvělý bod a bude nás provázet až do konce seriálu. Pro začátek vytváří spoustu pravých úhlů, kružnic a jiných snadno dopočitatelných úhlů. Nenechte se odradit spoustou čar a kružnic a pořádně si prohlédněte následující obrázek. Díky množství pravých úhlů můžeme totiž vesele aplikovat Thaletovu větu:



Tvrzení 17. (Základní vlastnosti výšek a kolmiště v ostroúhlém trojúhelníku) *Na obrázku je velikost jednoproužkovaného úhlu $90° - \beta$, dvouproužkovaného $90° - \gamma$ a přeškrtnutého $90° - \alpha$. Středy čárkovaných kružnic jsou středy příslušných stran, středy plných jsou středy spojnic vrcholů s kolmištěm (body H_a, H_b a H_c).*

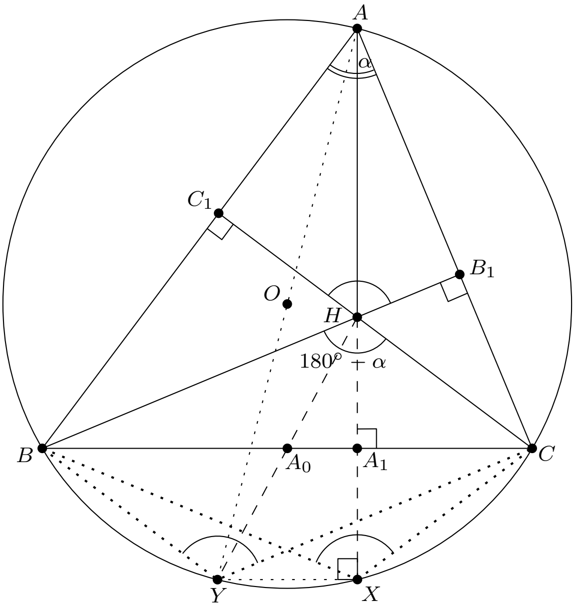
Podobně jako u opsiště si snadno rozmyslíme, že kolmiště leží uvnitř svého trojúhelníku právě tehdy, když tento je ostroúhlý. Platí dokonce něco lepšího. Jaký bod je kolmištěm trojúhelníka ABH? Pohledem na obrázek snadno zjistíme, že je to C. Z analogických tvrzení o zbylých stranách dostáváme, že kolmištěm trojúhelníka s vrcholy ve třech ze čtyř bodů A, B, C a H je čtvrtý z nich. Toto se může hodit, pokud pracujeme s tupoúhlým trojúhelníkem a nelíbí se nám, že je kolmiště venku. Můžeme tak například dostat minulý obrázek i pro tupoúhlý trojúhelník (jedním z vrcholů bude H). Další vlastnost vyjadřující, že body A, B, C a H jsou v jistém smyslu rovnocenné, popisuje následující cvičení.

Cvičení 18. (Stejné kružnice opsané) Kružnice opsaná trojúhelníku HBC je shodná (tedy má stejný poloměr) s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC.

Návod. Jak velké úhly odpovídají tětivě BC v obou kružnicích?

Tvrzení 19. (Překlápění kolmiště) *Obrazy H v osové souměrnosti podle BC a středové souměrnosti podle A_0 (tj. středu BC) leží na kružnici opsané. Druhý z obrazů navíc tvoří s A průměr kružnice opsané.*

Důkaz. Označme X obraz H podle BC a Y středový obraz H podle A_0. Pak platí $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BYC| = |\sphericalangle BHC| = 180° - \alpha$ a body A, X leží v opačných polorovinách určených přímkou BC (pokud je ABC ostroúhlý), nebo $|\sphericalangle BXC| = |\sphericalangle BYC| = |\sphericalangle BHC| = \alpha$ a body A, X leží ve stejné polorovině určené přímkou BC (pokud je ABC tupoúhlý). Dále vidíme, že body X a Y jsou oba vzdáleny od BC stejně jako H, takže XY je rovnoběžná s BC, a tedy komá na výšku AX. Proto je $\triangle AXY$ pravoúhlý a z Thaletovy věty je AY průměr kružnice opsané.



□

Poznámka. Předchozí důkaz ilustruje častou nepříjemnost provázející řešení geometrických úloh dopočítáváním velikostí úhlů (tzv. *úhlením*) a dokazováním, že různé čtveřice bodů tvoří tětivové čtyřúhelníky. Tětivovost daného čtyřúhelníka je totiž vyjádřena dvěma různými rovnostmi úhlů, které odpovídají různým konfiguracím těchto bodů nebo eventuálně jejich pořadím na kružnici. Jednoduše řečeno odpovídají „různým obrázkům“. Existují dvě možnosti, jak se s tím vypořádat. Jednou z nich je důsledné rozebrání všech (typicky dvou) případů – ostroúhlý vs. tupoúhlý trojúhelník v minulém důkazu – a druhou je tzv. *orientované úhlení*, které je méně intuitivní než klasické úhlení, ale umožňuje korektně se vyhnout rozebírání případů. Více se o něm dočtete v naší knihovničce.[23] My zůstaneme u první možnosti.

Cvičení 20. Dokažte $|HA| \cdot |HA_1| = |HB| \cdot |HB_1| = |HC| \cdot |HC_1|$.

Návod. Podobné trojúhelníky nebo (poloilegálně – bude v příštím dílu) mocnost.

Cvičení 21. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P tak, že platí $|\sphericalangle ABP| = 30°$, $|\sphericalangle PBC| = 40°$, $|\sphericalangle BCP| = 20°$ a $|\sphericalangle PCA| = 30°$. Ukažte, že $AP \perp BC$.

Návod. Poznejte kolmiště.

Cvičení 22. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s kolmištěm H. Nechť M a N jsou postupně středy úseček BC a AH. Dokažte $MN \perp B_1C_1$.

Návod. Uvažte kružnice nad průměry AH a BC.

[23] *http://mks.mff.cuni.cz/library/OrientovaneUhleniMO/OrientovaneUhleniMO.pdf*.

Cvičení 23. V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV.

(A–60–III–5)

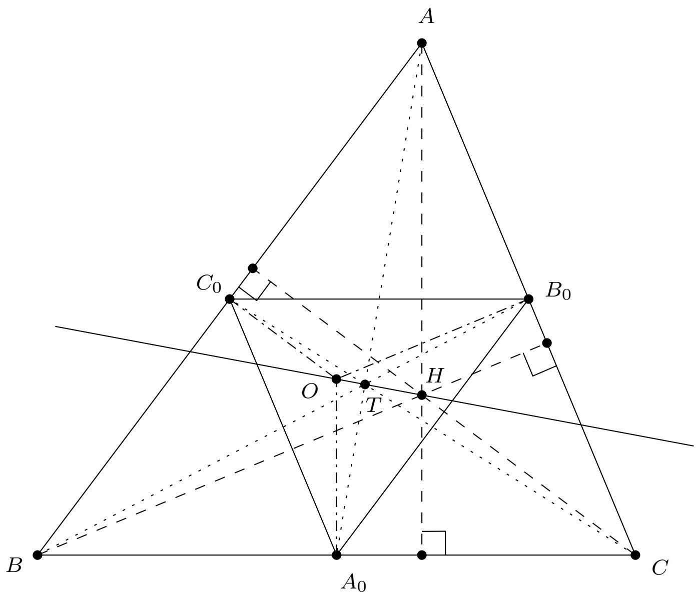
Návod. Vzpomeňte si na překlápění a poznejte střední příčku.

Eulerova přímka

S Eulerovou[24] přímkou se běžně ve škole nepotkáme, takže se konečně dostáváme do neprobádaného terénu.

Tvrzení 24. (O Eulerově přímce) *Opsiště, těžiště a kolmiště leží na jedné přímce (mohou splynout v jeden bod) a platí $|HT| = 2|OT|$. Této přímce se říká Eulerova přímka.*

Důkaz. Použijeme stejný trik jako v důkazu existence kolmiště – osy stran jsou výšky v trojúhelníku ze středních příček, tedy opsiště v ABC je kolmištěm v $A_0B_0C_0$. Tyto dva trojúhelníky jsou stejnolehlé se středem v těžišti a koeficientem -2, takže H se zobrazí na O a navíc T leží na OH tak, že $|HT| = 2|OT|$.



Příklad 25. Nechť X je bod na kružnici opsané trojúhelníka ABC. Dokažte, že přímka TX půlí úsečku HX', kde XX' je průměr opsané kružnice.

Řešení. Podívejme se na trojúhelník HXX'. Bod T leží na jeho těžnici HO ve třetině blíž k O (tady používáme Eulerovu přímku), je to tedy těžiště a přímka XT jakožto těžnice jistě půlí stranu HX'.

---

[24] Švýcar Leonhard Euler (1707–1783) byl jedním z největších novověkých matematiků, který svou prací přispěl k vývoji snad všech odvětví matematiky.

V následujících cvičeních zkuste vždy najít ten správný trojúhelník, jehož Eulerova přímka (a zejména známé poměry vzdáleností H, T a O na ní) nám dá, co potřebujeme.

Cvičení 26. Označme S střed úsečky BH a X průsečík přímek CS a HA_0. Dále nechť O' je osový obraz O podle BC. Dokažte, že body A, X a O' leží na jedné přímce.

Návod. Co je Eulerova přímka trojúhelníku HBC?

Cvičení 27. Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník. Označme H_C a H_D kolmiště trojúhelníků ABC a ABD. Dokažte, že $H_C H_D \parallel CD$. (MO 58–A–I–2)

Návod. Uvažte příslušná těžiště T_C a T_D a dokažte $T_C T_D \parallel CD$. Co nám říkají „Eulerovy poměry“ v $\triangle ABC$ a $\triangle ABD$?

Cvičení 28. Dokažte $|OH| < 3R$, kde R je poloměr kružnice opsané.

Návod. Nejdřív si uvědomte, že jde o zajímavé tvrzení jen pro „hodně tupoúhlý“ trojúhelník. Jelikož T leží vždy uvnitř trojúhelníka, leží i uvnitř opsané kružnice, tedy $|OT| < R$. Použijte Eulerovu přímku.

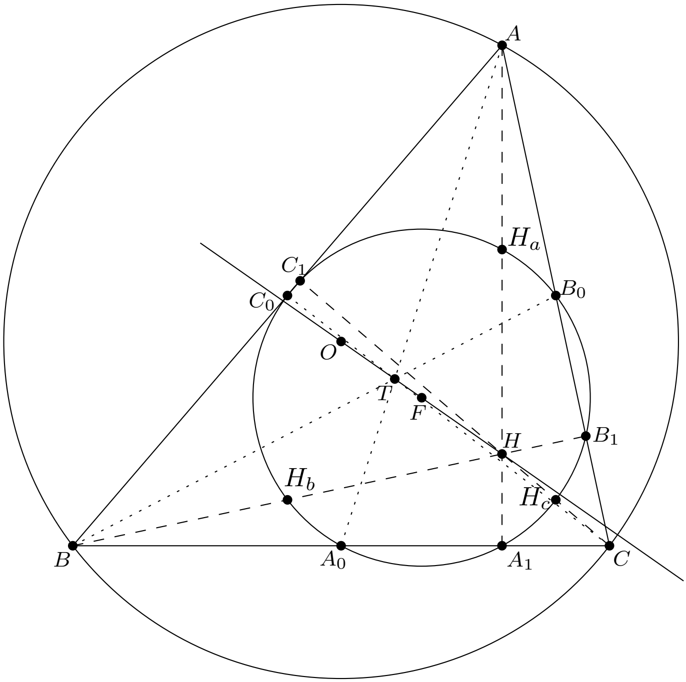
Feuerbachova kružnice

Vzpomeňme si na tvrzení o překlápění kolmiště podle stran a středů stran. Víme, že příslušných šest obrazů leží na kružnici opsané. Uvažme stejnolehlost se středem v H a koeficientem $1/2$. V ní se kružnice opsaná zobrazí na kružnici procházející středy všech úseček HX, kde za X můžeme dosadit libovolný z výše zmíněných bodů nebo vrcholů trojúhelníka. Jinými slovy prochází všemi středy stran, patami výšek a středy úseček AH, BH a CH. Středy kružnic se ve stejnolehlosti zobrazují na středy, takže dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 29. (O Feuerbachově kružnici) *Středy stran, paty výšek a středy úseček AH, BH a CH leží na kružnici se středem F v polovině úsečky OH. Tuto kružnici nazýváme Feuerbachova*[25] *kružnice nebo také kružnice devíti bodů*[26].

[25] Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834) byl německý geometr. Proslavil se důkazem věty, o které uslyšíme později.

[26] Hádejte proč.



Poznámka. Rádi bychom zdůraznili, že se nám právě povedlo něco pozoruhodného. Jen s pomocí základních vlastností stejnolehlosti a troškou vybudované teorie jsme získali devět (dobrých) bodů ležících na jedné kružnici! V porovnání s tím, jakou dá někdy práci dokázat to o pouhých čtyřech bodech, to bylo skoro zadarmo a do skládačky geometrie trojúhelníka jsme tím doplnili podstatný dílek.

Příklad 30. Dokažte, že F leží na Eulerově přímce a platí $|FO| = |FH| = 3|FT|$.

Řešení. Jak jsme již zmínili, F jakožto obraz kružnice opsané ve stejnolehlosti s koeficientem $1/2$ leží ve středu úsečky OH, což je jistě bod Eulerovy přímky splňující zmíněnou rovnost.

Cvičení 31. Je známo, že až na degenerované případy mají dvě kružnice právě dva středy stejnolehlosti. Najděte druhý střed stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na Feuerbachovu kružnici a znovu ověřte tvrzení z minulého příkladu.

Návod. Je to těžiště.

Cvičení 32. Najděte Feuerbachovu kružnici trojúhelníka BHC.

Návod. Je to Feuerbachova kružnice pro původní $\triangle ABC$. Rozmyslete si, jak se mění role jednotlivých trojic bodů (středy stran, paty výšek, středy spojinic vrcholů s kolmištěm).

Cvičení 33. Ukažte, že Eulerovy přímky trojúhelníků BHC, CHA a AHB prochází jedním bodem.

Návod. Využijte minulé cvičení.

Cvičení 34. Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Tečny k půlkružnici vedené body C, D se protnou v X a úhlopříčky AC, BD v bodě Y. Označme M průsečík EF s AB. Dokažte, že body E, C, M, D leží na jedné kružnici.

Návod. Dokreslete průsečík AD s BC a ve vzniklém trojúhelníku najděte Feuerbachovu kružnici.

Cvičení 35. Rozmyslete si, že A_0, B_0 a středy AH a CH jsou vrcholy obdélníka.

Návod. Tvrzení o překlápění říká, že A a obraz H přes A_0 tvoří průměr opsané. Co to znamená na Feuerbachově kružnici?

Vepsiště a připsiště

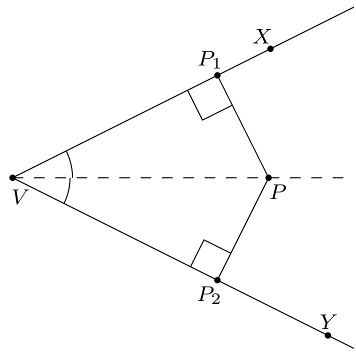
Už víme, že pro osy stran, pro těžnice i pro výšky platí, že se protínají v jednom bodě. Další rozumnou množinou přímek jsou osy (vnitřních) úhlů. Pro důkaz, že se skutečně protínají v jednom bodě, potřebujeme následující jednoduché tvrzení.

Tvrzení 36. *Mějme bod P nacházející se uvnitř konvexního úhlu XVY. Potom P leží na ose vnitřního úhlu XVY právě tehdy, když je vzdálenost P od polopřímek VX a VY stejná.*

Důkaz. Paty kolmic z P na VX a VY nazvěme P_1 a P_2.

Pokud je P na ose úhlu XVY, potom platí $|\sphericalangle PVP_1| = |\sphericalangle PVP_2|$. Proto můžeme použít větu *usu*, z níž dostaneme shodnost trojúhelníků PVP_1 a PVP_2. Z ní plyne $|PP_1| = |PP_2|$, takže vzdálenost P od VX a VY je stejná.

Pokud naopak víme, že je vzdálenost P od VX a VY stejná, pak $|PP_1| = |PP_2|$. Proto jsou z věty *Ssu* trojúhelníky PVP_1 a PVP_2 opět podobné. Dostáváme $|\sphericalangle PVP_1| = |\sphericalangle PVP_2|$, neboli P leží na ose úhlu XVY.

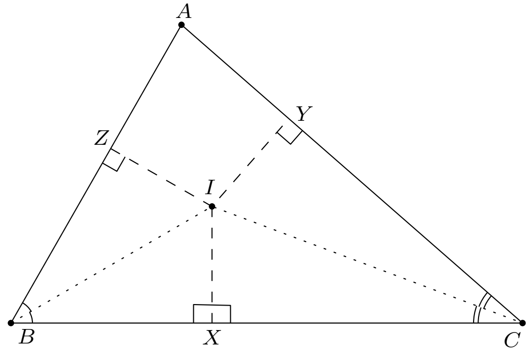


□

Nyní už jsme schopni dokázat, že se osy vnitřních úhlů protínají v jednom bodě.

Tvrzení 37. *V trojúhelníku ABC se osy vnitřních úhlů CAB, ABC a BCA protínají v jednom bodě.*

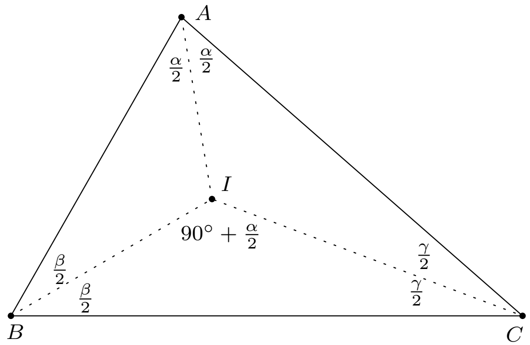
Důkaz. Nechť se osy vnitřních úhlů ABC a BCA protínají v bodě I. Nechť jsou X, Y a Z postupně paty kolmic z I na strany BC, CA a AB. Jelikož I leží na ose úhlu ABC, je díky předchozímu tvrzení $|IZ| = |IX|$. Protože I leží i na ose úhlu BCA, platí i $|IX| = |IY|$. Proto $|IZ| = |IY|$, z čehož ale díky předchozímu tvrzení plyne, že I leží na ose úhlu BAC. Z toho důvodu se osy všech vnitřních úhlů protínají v I.



□

Průsečík os vnitřních úhlů budeme v našem seriálu označovat jako *vepsiště* a obvykle pro něj budeme používat písmenko I (z anglického *incenter*).

Stejně jako u ostatních středů, i zde se vyplatí pamatovat si úhly mezi vrcholy a příslušným středem. Úhly typu „vrchol–vrchol–vepsiště“ jsou jednoduché – přímo z definice plyne $|\sphericalangle CAI| = \alpha/2 = |\sphericalangle IAB|$ atp. Co se týče úhlů typu „vrchol–vepsiště–vrchol“, jednoduše aplikujme rovnost $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 90°$. Díky tomu, že se úhly v trojúhelníku sečtou na 180 stupňů, dostáváme $|\sphericalangle CIB| = 90° + \alpha/2$ atp.



Angle bisector theorem

Osy úhlů mají jednu zajímavou vlastnost, která s vepsištěm přímo nesouvisí. Jedná se o poměr, ve kterém osa protíná příslušnou stranu. Zatímco u těžnic a os stran je tento poměr nezajímavý (jedna) a u výšek ošklivý (tj. nějaký fujky zlomek s kosiny), u os úhlu dává velmi pěkný výsledek.

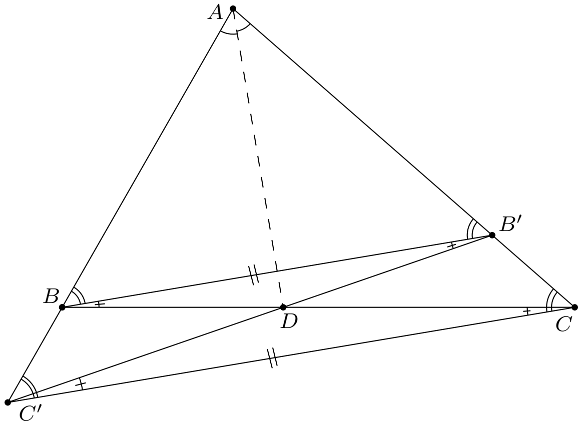
Tvrzení 38.[27] *V trojúhelníku ABC nazvěme jako D patu*[28] *osy vnitřního úhlu u A. Potom*

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}.$$

[27] Tomuto tvrzení se někdy (obzvláště v anglické literatuře) říká *Inner angle bisector theorem.*

[28] Slovo *pata* budeme používat dosti liberálně, tj. jako průsečík libovolné přímky z vrcholu trojúhelníka s protější stranou. V matematické olympiádě a ve škole ovšem toto označení spíše nepotkáte, a proto ho používejte s opatrností.

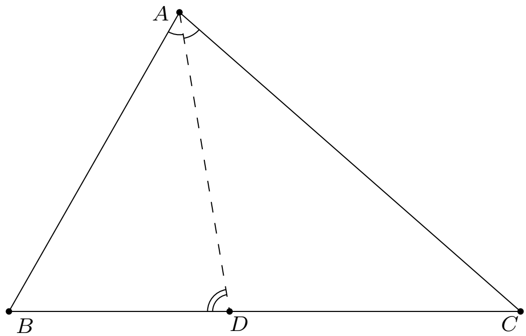
Důkaz. (Syntetický) Nechť B' a C' jsou obrazy B a C v osové souměrnosti podle AD. Potom B' a C' leží postupně na přímkách AC a AB. Protože $|AB| = |AB'|$ a $|AC| = |AC'|$, jsou BAB' a CAC' rovnoramenné trojúhelníky se stejným úhlem naproti základně. Proto jsou podobné, takže $\frac{|BA|}{|AC|} = \frac{|BB'|}{|CC'|}$. Dále $|DB| = |DB'|$ a $|DC| = |DC'|$, takže analogicky jsou i trojúhelníky BDB' a CDC' podobné. Proto $\frac{|BB'|}{|CC'|} = \frac{|BD|}{|DC|}$. Z toho již plyne $\frac{|BA|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$, což jsme chtěli.



Důkaz. (Sinthétický) Označme velikost úhlu BDA jako ϑ. Aplikací sinové věty na trojúhelníky BDA a ADC dostaneme

$$\frac{|BD|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|BA|}{\sin\vartheta} \quad \text{a} \quad \frac{|DC|}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{|AC|}{\sin\left(180^\circ - \vartheta\right)}.$$

Protože $\sin\vartheta = \sin(180^\circ - \vartheta)$, dostáváme po podělení předchozích dvou rovností přesně $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$, což jsme chtěli.[29]



□

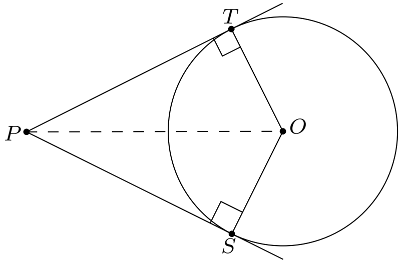
Kružnice vepsaná

Nechť X, Y a Z jsou opět paty kolmic z I postupně na BC, CA a AB. Protože $|IX| = |IY| = |IZ|$, je I opsištěm trojúhelníka XYZ. Protože u X, Y i Z jsou pravé úhly, jsou BC, CA a AB tečny

[29]Pokud zatím nevíte, jak se počítá sinus tupého úhlu, vůbec se tímto důkazem netrapte.

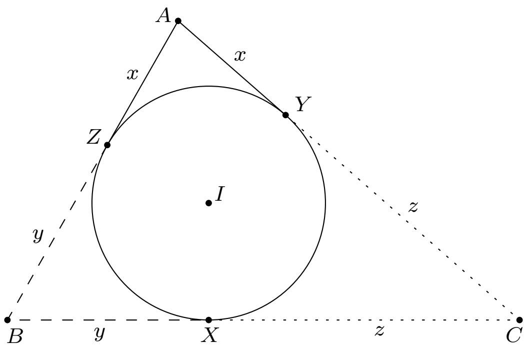
k této kružnici. Proto se kružnice opsaná $\triangle XYZ$ dotýká všech stran původního trojúhelníka. Této kružnici říkáme *kružnice vepsaná*[30] a její poloměr obvykle značíme r.[31] Pro další práci s ní budeme potřebovat následující tvrzení.

Lemma 39.[32] *Nechť ω je kružnice se středem O a P bod mimo ni. Dotyky tečen z P k ω označme jako S a T. Potom $|PS| = |PT|$.*



Důkaz. Trojúhelníky PSO a PTO jsou shodné z věty *Ssu*, z čehož tvrzení hned plyne. □

Z tohoto tvrzeníčka vyplývá, že $|AY| = |AZ|$, $|BZ| = |BX|$ a $|CX| = |CY|$. Označme si tyto hodnoty postupně jako x, y a z. Potom dostáváme sérii rovností $y + z = a$, $z + x = b$ a $x + y = c$. Z nich lze dostat vztahy $(-a + b + c)/2 = x$, $(a - b + c)/2 = y$ a $(a + b - c)/2 = z$. To znamená, že umíme vyjádřit délku z vrcholů k bodům dotyku!



Úmluva. Pokud nebude řečeno jinak, budeme ve zbytku seriálu používat značení

$$x = \frac{-a+b+c}{2}, \quad y = \frac{a-b+c}{2}, \quad z = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{a} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Poslední z těchto hodnot nazýváme *poloobvod.*

Jeden ze způsobů, jak interpretovat I, je „bod, který je nad všemi stranami stejně vysoko“. Z toho plyne následující tvrzení.

Tvrzení 40. *Obsah trojúhelníku ABC je roven rs.*

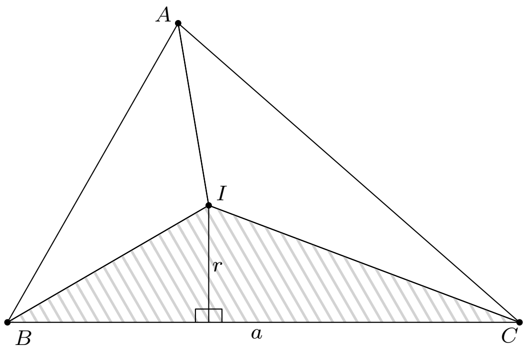
---

[30]Jejím středem je zjevně I. Proto se vepsišti „oficiálně“ říká *střed kružnice vepsané.*

[31]V českém prostředí se často používá r pro poloměr kružnice opsané, což vede k používání ρ v případě vepsané. Ve světě je ovšem obvyklé značit je tak, jak to děláme my.

[32]Tomuto lemmátku se obvykle přezdívá *Equal tangents.*

Důkaz. Trojúhelník ABC můžeme rozřezat na trojúhelníky BIC, CIA a AIB. Trojúhelník BIC má stranu o velikosti a a výšku na ni rovnou r. Proto je obsah $\triangle BIC$ roven $r \cdot \frac{a}{2}$. Sečtením analogických hodnot pro zbylé dva trojúhelníky dostaneme, že obsah $\triangle ABC$ je roven $r \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = rs$, což jsme chtěli ukázat.



□

Cvičení 41. Buď ABC trojúhelník s pravým úhlem u A. Ukažte, že

$$r = \frac{b + c - a}{2}.$$

Návod. Buď si všimněte, že $AYIZ$ je čtverec, a proto $r = x$, nebo vypočítejte obsah trojúhelníka dvěma způsoby a upravte pomocí Pythagorovy věty.

Cvičení 42. Buď $ABCD$ rovnoběžník, ve kterém platí $|AB| > |BC|$. Nechť K a M jsou body dotyků kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC a ADC se stranou AC. Podobně nechť jsou L a N body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD a ABD se stranou BD. Ukažte, že $KLMN$ je obdélník.

Návod. Ukažte, že průsečík AC a BD má ke K, L, M i N stejnou vzdálenost.

Cvičení 43. Trojúhelník s výškami o velikostech h_1, h_2 a h_3 má obvod p. Ukažte, že trojúhelník se stranami $1/h_1$, $1/h_2$, $1/h_3$ má poloměr kružnice vepsané roven $1/p$. (MKS 35–4–6)

Návod. Uvědomte si, že nový trojúhelník je podobný novému s koeficientem $\frac{1}{2S}$, kde S je obsah původního trojúhelníka. Použijte vzorec pro obsah.

Připsiště

Můžeme se zabývat otázkou, co se stane, pokud místo os vnitřních úhlů uvažujeme osy vnějších úhlů. Bohužel se tyto tři osy neprotínají v jednom bodě. Ovšem určitá verze tohoto tvrzení stále platí.

Věta 44. *V trojúhelníku ABC se osy vnějších úhlů CBA a BCA protínají na ose vnitřního úhlu BAC.*

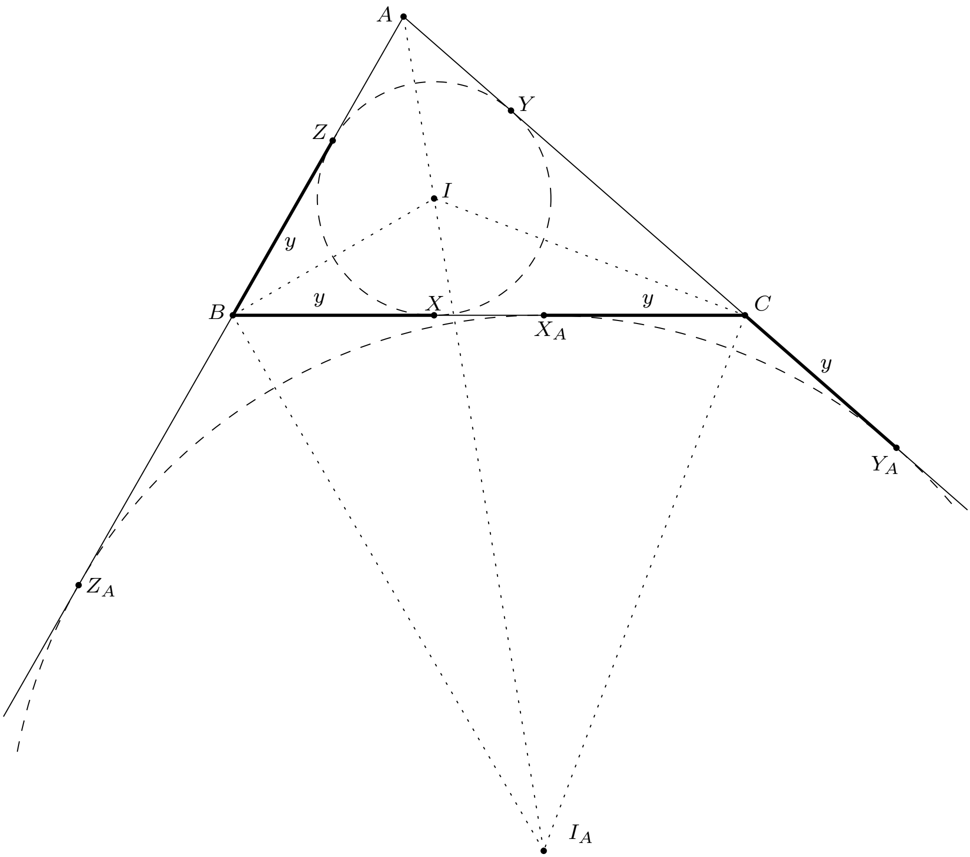
Důkaz. Nechť se osy vnějších úhlů CBA a ACB protínají v bodě I_A. Nechť jsou X_A, Y_A a Z_A postupně paty kolmic z I_A na přímky BC, CA a AB. Protože I_A je na ose úhlu CBZ_A, platí $|I_AZ_A| = |I_AX_A|$. Protože I_A leží i na ose úhlu X_ACB, platí i $|I_AX_A| = |I_AY_A|$. Proto $|I_AZ_A| = |I_AY_A|$, z čehož ale plyne, že I_A skutečně leží na vnitřní ose úhlu BAC. □

Tento průsečík budeme v tomto seriálu označovat jako *připsiště příslušející vrcholu* A a obvykle pro něj budeme používat symbol I_A. Analogické body samozřejmě existují i pro zbylé vrcholy.

Cvičení 45. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle BAC| = 120°$. Označme D, E a F postupně paty os úhlů z A, B a C. Dokažte, že $|\sphericalangle EDF| = 90°$.

Návod. Co jsou připsiště $\triangle ABD$ a $\triangle ACD$?

Obecná pomůcka pro práci s připsištěm zní „pokud něco platí pro vepsiště, dost možná to v nějaké formě platí i pro připsiště“. Porovnáním důkazů existence vepsiště a připsiště vidíme, že většina úvah funguje dosti analogicky. Následuje série tvrzení o připsištích, která jsme v případě vepsiště už potkali. Všechny důkazy jsou podobné důkazům pro vepsiště, a proto je přenecháváme čtenáři jako domácí cvičení.



Tvrzení 46.[33] *Nazvěme jako D patu osy vnějšího úhlu u A. Pak platí* $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AC|}$.

Tvrzení 47. *Kružnice opsaná trojúhelníku $X_AY_AZ_A$ má střed v I_A a přímky AC, CB a BA se jí dotýkají. Této kružnici říkáme kružnice připsaná příslušející bodu A a její poloměr značíme r_a.*

Tvrzení 48. *Platí $|BZ_A| = |BX_A| = z$, $|CX_A| = |CY_A| = y$ a $|AY_A| = |AZ_A| = s$. Z toho také plyne, že střed XX_A splývá se středem BC.*

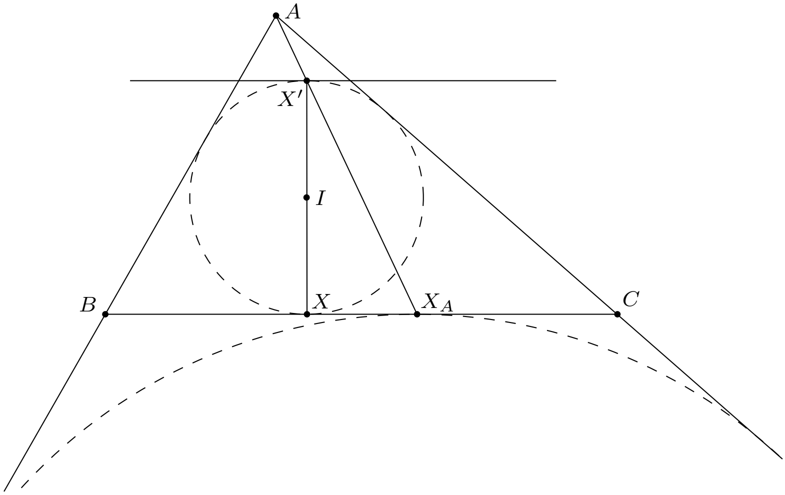
[33]Tomuto tvrzení se občas říká *Outer angle bisector theorem.*

Tvrzení 49. *Obsah trojúhelníku ABC je roven $r_a x$.*

Můžeme vidět, že kružnice připsaná je vlastně jen „nafouklá“ kružnice vepsaná. Toho využívá následující lemma.

Lemma 50. *Nechť X a X_A jsou body dotyku kružnice vepsané a kružnice A-připsané se stranou BC. Nechť přímka XI podruhé protíná kružnici vepsanou v bodě X'. Potom A, X' a X_A leží na jedné přímce.*

Důkaz. Protože se obě kružnice dotýkají polopřímek AB a AC, existuje stejnolehlost se středem v A, která převede připsanou na vepsanou. Bod X_A se v tu chvíli přenese na průsečík kružnice vepsané s obrazem strany BC. A co je obrazem BC? Inu, protože je BC tečna ke kružnici připsané, jejím obrazem je tečna ke kružnici vepsané. Navíc tato tečna musí být s BC rovnoběžná, což nám nechává jen dvě možnosti – tečnu vedenou bodem X a tečnu vedenou bodem naproti X, tedy X'. Proto je obrazem X_A buď X, nebo X'. Protože ovšem $X_A X$ neprochází A, musí hledaným obrazem být X', takže A, X' a X_A skutečně leží na jedné přímce.

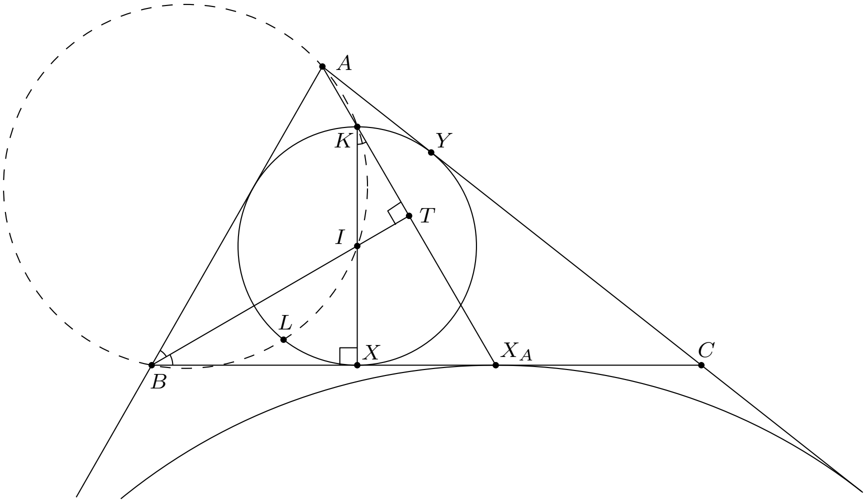


Příklad 51. Trojúhelník ABC splňující $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$ má vepsiště I. Jeho kružnice vepsaná se dotýká stran BC a CA v bodech X a Y. Nechť K a L jsou obrazy X a Y ve středové souměrnosti se středem v I. Ukažte, že A, B, K a L leží na jedné kružnici. (IMO shortlist 2005)

Řešení. Podmínka $|AC| + |BC| = 3 \cdot |AB|$ se dá přepsat jako $|AB| = z$. Nechť X_A je bod dotyku kružnice A-připsané se stranou BC. Potom $|BX_A| = z$, takže ABX_A je rovnoramenný trojúhelník. Protože BI je osou úhlu v tomto trojúhelníku, je BI kolmá na AX_A. Nazvěme průsečík těchto dvou přímek jako T.

Díky výše uvedenému lemmatu leží A, K a X_A na jedné přímce. Tudíž $|\sphericalangle KTB| = 90^\circ = |\sphericalangle KXB|$, takže $KTXB$ je tětivový čtyřúhelník. Proto $|\sphericalangle XKT| = |\sphericalangle XBT| = |\sphericalangle XBI| = |\sphericalangle ABI|$. Ale $|\sphericalangle IKA| = 180^\circ - |\sphericalangle XKT| = 180^\circ - |\sphericalangle ABI|$, takže K leží na kružnici opsané AIB. Analogicky dostaneme, že i L leží na té samé kružnici,[34] z čehož už plyne požadované tvrzení.

[34] Všimněte si, že je k tomu potřeba provést znovu úplně celý postup včetně definování nového bodu T.



Cvičení 52. Ukažte, že střed úsečky AX leží na přímce s I a A_0.

Návod. Co se stane, když tyto body posunete do dvojnásobné vzdálenosti od X?

Cvičení 53. Buď Ω kružnice a ℓ tečna k Ω. Nechť bod M leží na ℓ. Najděte množinu všech bodů P, pro něž lze na ℓ najít body Q a R tak, aby byl M střed QR a Ω kružnice vepsaná $\triangle PQR$.
(IMO 1992)

Návod. Nechť X je bod dotyku ℓ a Ω. Uvažte bod Y, který je obrazem X ve středové souměrnosti podle M, a bod Z, který leží naproti X v Ω. Jak spolu souvisí P, Y a Z?

Cvičení 54. (těžší) V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky IS a CT jsou rovnoběžné.
(MO 62–A–III)

Návod. Využijte výše zmíněného lemmatu pro trojúhelník ABD. Pak dopočítejte poměry.

Závěrem

You can't criticize geometry. It is never wrong. – Paul Rand

Tímto první díl seriálu končí. Doufáme, že vám úvod do říše trojúhelníků líbil a že se k nám příště opět připojíte.[35]

Pokud jste nepochopili všechno, nezoufejte. Nebojte se na cokoliv zeptat, ať už e-mailem nebo na PraSečím chatu. A určitě nepotřebujete vyřešit všechna cvičení, ba ani pochopit celý seriál, na to, abyste byli schopni zvládnout alespoň některé z úloh. Proto se jich nebojte a každopádně je vyzkoušejte. Při jejich řešení pamatujte na to, že v seriálových sériích úlohy nejsou řazeny podle obtížnosti.

V příštím díle se můžete těšit na Simsonovu přímku, Švrčkův bod, kamarádství v trojúhelníku a mnoho[36] dalšího.

Geometrii zdar!

[35] Pokud se vám nelíbil, tak sorry. Napište nám, co se vám nelíbilo, a my to možná příště nebudeme dělat.

[36] Nebo alespoň trochu.

Introduction to Functions

The topic of the 4^{th} autumn series is functions. In this text, we try to get you acquainted with them.

Functions

It is actually rather difficult to define a function formally. For us, it will be an object – a blackbox – that takes certain inputs (called *arguments*). A function always returns one output for each input. Functions are usually denoted by letters f, g, h, or F, G, H.

Let us assume we have a function f. The set of all its inputs is called the *domain* of f and it is usually denoted by $D(f)$. A *range* (or *image*) $\mathrm{Rng}(f)$ of f is the set of all possible outputs of f.

When we write $f\colon X \to Y$, we mean that f is a function with X being its domain and Y its *codomain* – a set that has $\mathrm{Rng}(f)$ as a subset. The codomain, however, does not have to be equal to the image. For instance, if we define a function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by the formula $f(x) = x^2$ then its codomain is all real numbers while its image is only non-negative real numbers. In this text (as well as in the problems), we will deal with real functions of a real variable, which means all domains and codomains of all functions will be given subsets of real numbers. By the equality of functions $f = g$ we mean that $D(f) = D(g)$ and $f(x) = g(x)$ for all $x \in D(f)$. A number $x \in D(f)$ is said to be a *root* of f if $f(x) = 0$.

A crucial fact about functions is that they are not the formulae or expressions that define them. If we, for example, define $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by $g(x) = (x-1)^2 + 2x - 1$ and $f(x) = x^2$, then $f = g$ even though the expressions defining them are different. Furthermore, a function does not have to be defined by a formula. Such function may be $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ that assigns to each real number the number of sevens in its decimal representation if it is finite and -1 if it is infinite.

Basic Properties

Functions may have many interesting properties, some of which are so common or so interesting that they have their own name. In this text, we shall mention only those that are needed to understand the problems given in the 4^{th} autumn series. A function $f\colon X \to Y$ is called

(1) *injective* if for each $x, y \in X$ the following holds: if $x \neq y$ then $f(x) \neq f(y)$,
(2) *bounded* if there is a constant $C > 0$ such that $|f(x)| \leq C$ for all $x \in X$,
(3) *nonincreasing* if $f(x_1) \geq f(x_2)$ for every x_1, $x_2 \in X$, $x_1 \leq x_2$.

Function Composition

Considering two functions $f\colon X \to Y$ and $g\colon Y \to Z$, one might wonder, what happens when we apply function g to an output of f. This *composition* of functions creates a function $h\colon X \to Z$ defined for any $x \in X$ by $h(x) = g(f(x))$. Such composed function is often denoted by $g \circ f$. If $f\colon X \to X$, we may compose f with itself. If we compose it multiple times, we usually use the following notation: $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f \circ f}_{n}$.

Functional Equations

A functional equation is an equation where the unknowns are functions. In other words, we are searching for a function with a given domain and codomain for which the given equality holds. There is no universal way to solve a functional equation. However, we usually assume that we have a solution F of the equation and by clever manipulation with the given equation, we find what properties F must have. When we finally discover what relation describes F, it is necessary to verify if it satisfies the equation. To show the proccess let us solve the following problem.

Problem. Find all functions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all reals x, y it holds that

$$f(xy) = yf(x). \tag{1}$$

Solution. Let us assume that a function $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a solution of the given equation. Then (1) has to hold for $f = F$ and $x = 1$, which means

$$F(y) = yF(1),$$

where $F(1)$ is a constant. Thus we get that F is a linear function, i.e. $F(y) = cy$. Now we must find out for which constants c – if for any – such F is a solution of the given equation. The only thing we need to verify is $F(xy) = yF(x)$. For a linear function F, we get $F(xy) = cxy = ycx = yF(x)$, so $F(y) = cy$ is the solution for all $c \in \mathbb{R}$.

As you can see in the problem, functional equation may have more than one solution (or none at all).

Functional equations and functions in general are a wide topic that cannot be summarized in such a short text. If you want to learn more about it you may search through our library[37] or archive[38]. Especially recommended is a thorough text devoted to functional equations[39] written in Czech by Vejtek Musil. You may also focus on a similar text[40] which was used as a model for this introduction.

[37] https://mks.mff.cuni.cz/library/library.php
[38] https://mks.mff.cuni.cz/archive/archive.php
[39] http://mks.mff.cuni.cz/library/FunkcionalniRovniceVM/FunkcionalniRovniceVM.pdf
[40] http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/uvod3p.pdf

1. podzimní série – Prázdniny

Výsledková listina

1.–5.	*Filip*	*Bialas*	4	GOpatovPH	– – – 5 5 5 5 5	25	**25,00**
1.–5.	*Petr*	*Gebauer*	3	G Mělník	3 3 – 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
1.–5.	*Pavel*	*Hudec*	3	GJarkovPH	– 3 – 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
1.–5.	*Danil*	*Koževnikov*	3	GKepleraPH	– – – 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
1.–5.	*Martin*	*Melicher*	2	GPošKošice	3 3 3 5 5 5 5 5	$25 + i$	**25,00**
6.	*Michal*	*Krtouš*	1	GÚstavníPH	3 3 3 5 5 1 5 –	21	**23,42**
7.	*Václav*	*Volhejn*	4	GKepleraPH	3 – 3 5 5 – 5 5	$23 + 2i$	**23,08**
8.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	1	GJHroncaBA	3 3 3 5 5 5 – –	$21 + i$	**23,00**
9.	*Josef*	*Minařík*	2	GJarošeBO	3 3 3 5 5 3 5 –	$21 + i$	**22,95**
10.	*Radek*	*Olšák*	2	GMensaPH	3 – – 5 5 4 5 –	22	**22,64**
11.	*Lucie*	*Kundratová*	2	G TGM Zlín	3 3 3 5 5 1 5 –	$21 + i$	**22,51**
12.–15.	*Jakub*	*Janků*	1	GMLerchaBO	3 3 3 5 2 5 0 –	19	**22,43**
12.–15.	*Jan*	*Kaifer*	1	GKepleraPH	3 3 3 5 5 – – –	19	**22,43**
12.–15.	*Miroslav*	*Macko*	1	ŠpMNDaG BA	3 3 3 5 5 3 2 –	19	**22,43**
12.–15.	*Jakub*	*Parada*	1	G Gröss BA	3 3 3 5 0 5 – –	19	**22,43**
16.	*Ákos*	*Záhorský*	3	G VJM Šahy	3 3 3 5 5 – 5 –	$21 + i$	**22,37**
17.	*Pavel*	*Turek*	4	GTomkovaOL	3 3 3 5 5 5 5 4	24	**22,33**
18.	*Matěj*	*Konvalinka*	3	GOA Sedlča	3 3 3 5 5 5 – –	21	**21,93**
19.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	2 2 0 5 5 2 2 –	16	**21,64**
20.	*Matej*	*Moško*	2	G Gröss BA	3 3 3 5 2 5 – –	19	**21,52**
21.	*Radka*	*Křížová*	1	GHeyrovPH	3 3 3 5 0 3 0 0	17	**21,30**
22.	*Timur*	*Sibgatullin*	2	PČGKarVary	3 3 3 5 2 0 0 5	19	**21,15**
23.	*Marek*	*Černoch*	1	G ValMez	3 3 3 5 1 – 2 0	16	**20,67**
24.–25.	*Anna*	*Mlezivová*	3	GCoubTábor	3 3 3 5 5 3 – –	19	**20,63**
24.–25.	*Martin*	*Raška*	3	WichtG OS	3 3 3 5 5 – – –	19	**20,63**
26.	*Ondřej*	*Svoboda*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 5 – 5 –	$21 + i$	**20,15**
27.	*Victória*	*Žužičová*	2	GBilíkovBA	3 3 0 5 0 4 2 0	17	**20,12**
28.	*Lenka*	*Kopfová*	2	MendelG OP	3 3 3 5 5 – – –	19	**19,92**
29.	*Ludmila*	*Bujnovská*	3	MendelG OP	3 3 3 5 4 – – –	18	**19,83**
30.	*Richard*	*Hladík*	4	GaOA MarLáz	3 3 3 5 5 – 5 –	21	**19,31**
31.	*Martin*	*Hubata*	1	GMikul23PL	3 3 2 5 1 – – –	14	**19,28**
32.	*Štěpán*	*Řehák*	4	SGFryčovPH	3 3 3 5 5 1 2 0	19	**19,00**
33.	*Bára*	*Tížková*	3	G Bílovec	3 3 1 5 4 – 2 –	17	**18,87**
34.	*Pavel*	*Havlín*	2	NPorg	3 3 3 5 0 2 – –	16	**18,69**
35.	*Hedvika*	*Ranošová*	3	GBudějovPH	0 3 3 5 4 5 – –	20	**18,68**
36.	*Ondřej*	*Motlíček*	4	G Šumperk	3 3 3 5 4 5 – –	20	**18,66**
37.–39.	*Karel*	*Balej*	2	G Rokycany	3 3 0 5 2 2 – –	15	**18,59**
37.–39.	*Anna*	*Kovárnová*	2	G Jírov ČB	3 3 3 5 – 1 – –	15	**18,59**
37.–39.	*Veronika*	*Zámečníková*	2	GBalbínaHK	3 – 3 5 2 2 2 –	15	**18,59**
40.–42.	*Dita*	*Chabičovská*	1	GNadKavaPH	3 2 – 5 – 1 2 –	13	**18,52**

40.–42.	*Veronika*	*Šritterová*	1	PORG PH	3 3 0 5 2 – – –	13	**18,52**
40.–42.	*Lenka*	*Tomanová*	1	G VelMezř	3 1 0 5 0 2 2 0	13	**18,52**
43.–45.	*Denisa*	*Chytilová*	3	GJŠkodyPŘ	3 3 3 5 4 – – –	18	**17,77**
43.–45.	*Oldřich*	*Jandl*	2	NPorg	3 3 3 5 0 – – –	14	**17,77**
43.–45.	*Filip*	*Vosáhlo*	2	WaldPHa	3 3 1 5 0 – 2 0	14	**17,77**
46.–47.	*Daniela*	*Holubová*	1	GMikul23PL	3 – – 5 2 2 0 –	12	**17,70**
46.–47.	*Jan*	*Nekarda*	1	GUHradiště	3 3 3 – 1 – 2 0	12	**17,70**
48.	*Vít*	*Gaďurek*	2	PORG PH	3 3 3 5 0 – – –	14	**17,51**
49.	*Vojtěch*	*Lanz*	3	GZborovPH	3 3 3 5 5 – – –	$19 + i$	**17,44**
50.	*Jan*	*Vavřín*	0	PORG PH	3 3 0 – 2 – 2 –	10	**17,36**
51.	*Václav*	*Kubíček*	3	AGKroměříž	3 2 3 0 5 – 2 –	15	**17,27**
52.	*Jáchym*	*Solecký*	4	PORG PH	3 3 3 5 5 1 – –	19	**17,17**
53.	*Veronika*	*Roubínová*	3	G Kadaň	3 3 3 – 5 – 2 –	16	**17,14**
54.–56.	*Daniel*	*Bárta*	2	GChodoviPH	3 3 – 5 2 – – –	13	**16,90**
54.–56.	*Jakub*	*Hemala*	2	G Zastávka	3 1 1 5 0 2 2 0	13	**16,90**
54.–56.	*Anna*	*Mírková*	2	G LPika PL	3 3 3 – 1 2 2 –	13	**16,90**
57.	*Martin*	*Zimen*	2	GJMasar JI	3 3 3 – 5 – – –	14	**16,87**
58.	*František*	*Záhorec*	1	G Roudnice	3 3 3 – – – 2 –	11	**16,83**
59.	*Matěj*	*Doležálek*	2	G Humpolec	3 3 3 – 5 – – –	14	**16,72**
60.	*Martin*	*Bakoš*	3	GPBystrica	3 3 – 5 4 – – –	15	**16,60**
61.	*František*	*Szczepanik*	1	BiskG Brno	3 3 3 – 2 – 0 –	$11 - i$	**16,59**
62.	*Filip*	*Čermák*	3	MendelG OP	3 3 3 5 2 – 0 –	16	**16,54**
63.	*Julie*	*Rubášová*	0	BiskG Brno	3 2 3 – 0 1 0 –	9	**16,42**
64.	*Štefan*	*Hollán*	3	G Bytča	3 3 3 5 – – – –	14	**16,36**
65.	*Tomáš*	*Domes*	4	MendelG OP	3 3 3 5 5 – – –	19	**16,30**
66.	*Veronika*	*Hladíková*	4	GMikul23PL	3 3 3 5 5 – – –	19	**16,29**
67.–73.	*Matúš*	*Galba*	4	GHodžuLM	3 3 3 5 0 2 2 0	16	**16,00**
67.–73.	*Eliška*	*Poláchová*	2	GNovýJičín	3 2 0 5 0 2 0 0	12	**16,00**
67.–73.	*Kristián*	*Rigász*	2	SŠNvh	3 3 0 5 0 – 1 0	12	**16,00**
67.–73.	*Jaromír*	*Sladkovský*	2	PORG PH	3 3 1 5 – – – –	12	**16,00**
67.–73.	*Antonín*	*Štrpka*	2	G Šumperk	3 3 – 5 1 – 0 –	12	**16,00**
67.–73.	*Rafael*	*Tadevosjan*	4	GKepleraPH	3 3 3 5 1 – 2 –	16	**16,00**
67.–73.	*Matěj*	*Žáček*	4	GJarošeBO	3 3 3 5 2 – 2 –	16	**16,00**
74.	*Jonáš*	*Stoilov*	1	PORG PH	3 3 3 – 1 – 0 –	10	**15,89**
75.	*Alexandr*	*Jankov*	3	MatičníGOS	3 3 – 5 2 2 2 0	15	**15,86**
76.	*Adam*	*Mendl*	0	GCoubTábor	3 3 0 – 5 – – –	11	**15,65**
77.–78.	*Tomáš*	*Jirsa*	3	GNPražačPH	3 2 – 5 1 – 2 –	13	**15,43**
77.–78.	*Kristína*	*Szabová*	3	GVarŽilina	3 3 – 5 2 – – –	13	**15,43**
79.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	3	GZborovPH	3 3 3 5 3 1 2 –	$17 + i$	**15,28**
80.–82.	*Jonáš*	*Suvák*	2	GRaymanaPV	3 3 2 2 0 1 0 0	11	**15,05**
80.–82.	*Martin*	*Števko*	2	GAlejKošic	3 3 3 – 0 2 – –	11	**15,05**
80.–82.	*Petr*	*Zahradník*	2	GŠmejkalÚL	3 3 – – 5 – – –	11	**15,05**
83.–84.	*Ester*	*Friedlaenderová*	4	GKepleraPH	3 3 0 5 2 – 2 –	15	**15,00**
83.–84.	*Jiří*	*Jechumtál*	4	GVoděraPH	3 3 – 5 2 1 2 0	15	**15,00**
85.–89.	*David*	*Horský*	1	GHeyrovPH	3 3 2 – 1 – 0 0	9	**14,89**
85.–89.	*Lucie*	*Kunčarová*	1	GVolgogrOS	3 3 1 – 0 2 – 0	9	**14,89**
85.–89.	*Alina*	*Mojšová*	1	GNVPlániPH	3 0 0 5 0 1 0 0	9	**14,89**
85.–89.	*Samuel*	*Soukup*	1	ArcibisGPH	3 3 3 – 0 – – –	9	**14,89**
85.–89.	*Jan*	*Šrejbr*	1	GJungmanLT	3 – 0 5 0 1 0 0	9	**14,89**
90.	*Martin*	*Pašen*	4	GRaymanaPV	3 3 3 5 0 – 2 –	16	**14,67**
91.	*Alžběta*	*Manová*	2	G UherBrod	3 2 0 5 0 1 0 0	11	**14,65**
92.–93.	*Michal*	*Chudoba*	2	GLitoměřPH	3 3 0 5 – – – –	11	**14,47**

92.–93.	*Viktor*	*Procházka*	3	G LPika PL	3 1 3 – 0 3 2 –	12	**14,47**
94.	*Martin*	*Spišák*	3	GAlejKošic	3 3 – 5 0 2 – –	13	**14,34**
95.	*Barbora*	*Dohnalová*	0	GBalbínaHK	2 3 – – 1 1 0 –	7	**14,27**
96.	*Tomáš*	*Drobil*	2	G Dačice	3 3 0 5 – – – –	11	**14,25**
97.	*Zuzana*	*Urbanová*	4	GUBalvanJN	3 3 3 – 4 2 – –	15	**14,09**
98.	*Cyril*	*Škorvaga*	4	GKepleraPH	3 3 – 5 2 – 1 0	14	**14,00**
99.	*Jana*	*Pallová*	2	GJŠkodyPŘ	3 3 3 – 2 – – –	11	**13,97**
100.	*Adam*	*Doubrava*	1	GMasarykKM	3 – 3 3 – – – –	9	**13,82**
101.–103.	*Klára*	*Hloušková*	1	G Kolín	3 – – 5 – – – 0	8	**13,81**
101.–103.	*David*	*Klement*	1	GNadAlejPH	3 – 3 – – – 2 –	8	**13,81**
101.–103.	*Tereza*	*Žmolová*	1	GHeyrovPH	3 3 0 2 0 – – –	8	**13,81**
104.	*Jaroslav*	*Paidar*	3	SPŠMasarLI	3 3 – 5 1 1 1 –	13	**13,49**
105.–107.	*Filip*	*Brunclík*	3	GNPražačPH	3 3 – 5 – – 0 0	11	**13,47**
105.–107.	*David*	*Dvořák*	3	G Konice	3 3 – 5 0 – – –	11	**13,47**
105.–107.	*Michal*	*Kasarda*	3	G Stropkov	3 3 – 5 – – – –	11	**13,47**
108.	*Alžběta*	*Neubauerová*	3	GNadKavaPH	3 – – 5 – 2 2 –	12	**13,27**
109.	*Petr*	*Ježek*	3	GBNěmcovHK	3 3 – 5 – 1 – –	12	**13,09**
110.–113.	*Ondřej*	*Gonzor*	0	G Brandýs	3 3 – – 0 – – –	6	**13,03**
110.–113.	*Petr*	*Khartskhaev*	0	PORG PH	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
110.–113.	*Kateřina*	*Ševčíková*	0	ZSSLOUP	3 3 0 – 0 – – –	6	**13,03**
110.–113.	*Matěj*	*Široký*	0	ZšSmrž	3 3 – – – – – –	6	**13,03**
114.–115.	*Martina*	*Kalašová*	2	GJHroncaBA	3 3 3 – – – – –	9	**13,00**
114.–115.	*Petra*	*Melicharová*	2	GDomažlice	3 1 3 – – 2 0 0	9	**13,00**
116.	*Kamila*	*Kyzlíková*	3	GZborovPH	3 3 0 5 2 – – –	13	**12,70**
117.	*Kateřina*	*Nová*	4	G Vimperk	3 3 3 5 2 – – –	16	**12,67**
118.–121.	*Tomáš*	*Bajer*	1	SPŠstJG	3 2 0 – 0 – 2 0	7	**12,64**
118.–121.	*Matěj*	*Krátký*	1	PORG PH	3 3 – – 1 – – –	7	**12,64**
118.–121.	*Nikol*	*Krejčí*	1	PORG PH	3 3 0 – 0 1 0 –	7	**12,64**
118.–121.	*Tatiana*	*Ondrejková*	1	GNovéZámky	3 3 0 – 0 – 1 0	7	**12,64**
122.	*Zuzana*	*Tréglová*	4	G Žatec	3 3 – – 5 2 2 –	15	**12,59**
123.	*Evžen*	*Wybitul*	3		3 3 – 5 0 – 0 –	11	**12,38**
124.	*Tomáš*	*Čelko*	3	GPBystrica	3 3 – – 4 1 0 –	11	**12,21**
125.	*Matěj*	*Kraft*	2	GMikul23PL	3 3 – 1 2 – – –	9	**12,10**
126.	*Ondřej*	*Krabec*	2	G KomHavíř	3 3 3 – – – – –	9	**12,04**
127.	*David*	*Ha*	2	MasG Plzeň	3 3 – 2 – – – –	8	**11,89**
128.	*Václav*	*Steinhauser*	3	G Dačice	2 3 0 5 5 – – –	15	**11,85**
129.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	0	PORG PH	2 3 0 – 0 – 0 –	5	**11,66**
130.	*Filip*	*Geib*	3	GHodžuLM	3 3 1 0 0 – 2 0	9	**11,39**
131.–137.	*Barbora*	*Česalová*	1	GJarošeBO	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
131.–137.	*Marek*	*Heide*	1	GJatečníÚL	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
131.–137.	*Marie*	*Margin*	1	GNadAlejPH	3 3 – – 0 – – –	6	**11,38**
131.–137.	*Adéla*	*Krylová*	1	SGChomutov	3 1 – – 0 – 2 –	6	**11,38**
131.–137.	*Marek*	*Otruba*	1	GZborovPH	3 3 – – 0 – – –	6	**11,38**
131.–137.	*Julie*	*Přerovská*	1	GNVPlániPH	3 3 – – – – – –	6	**11,38**
131.–137.	*Thao*	*Tranova*	1	GDomažlice	3 – 1 2 0 – – –	6	**11,38**
138.	*Kateřina*	*Charvátová*	2	GBNěmcovHK	3 3 – – 0 – 2 –	8	**11,00**
139.	*Tomáš*	*Dolák*	4	GNovéStraš	3 3 – 5 0 – – –	11	**10,82**
140.–142.	*Michal*	*Jelínek*	2	GOhradníPH	3 3 0 – 1 – 0 –	7	**10,72**
140.–142.	*Tereza*	*Pavlišová*	2	GTomkovaOL	3 3 0 0 0 0 1 0	7	**10,72**
140.–142.	*Martin*	*Putzer*	2	G Jírov ČB	3 3 – – 0 1 – –	7	**10,72**
143.	*Jan*	*Hrůza*	4	G Kadaň	3 3 – – 4 – 2 –	12	**10,62**
144.–145.	*Viktor*	*Materna*	1	GJarošeBO	3 – – – – – 2 –	5	**10,00**

144.–145.	*Michal*	*Pisca*	4	DievčenOŠ	3 – 0 5 0 – 2 –	10	**10,00**
146.–147.	*Marek*	*Malý*	4	G Neratov	3 3 – – 4 2 – –	12	**9,99**
146.–147.	*Dominika*	*Mokroszová*	2	G FrýdČTěš	3 – 3 – 0 1 – –	7	**9,99**
148.	*Filip*	*Chudoba*	3	PORG PH	3 3 3 – – – – –	9	**9,81**
149.	*Anna*	*Šírová*	3	GJilemnice	1 3 – – – 2 2 –	8	**9,73**
150.–151.	*Martina*	*Hofmanová*	2	G Mělník	3 2 0 – 0 1 – 0	6	**9,48**
150.–151.	*David*	*Šnajdr*	2	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**9,48**
152.	*Tomáš*	*Pishovaký*	2	RGZS Prost	3 2 1 – – – – –	6	**9,36**
153.	*Petr*	*Jakubčík*	3	PORG PH	3 3 3 – – – – –	9	**9,25**
154.–155.	*Přemysl*	*Kaucký*	3	MasG Plzeň	3 2 0 – 2 – – 0	7	**9,17**
154.–155.	*Michaela*	*Šedová*	3	GŽidlochov	3 2 – – 0 – 2 –	7	**9,17**
156.–157.	*Nikita Edward*	*Carulkov*	4	GMHS	0 2 0 5 0 – 2 0	9	**9,00**
156.–157.	*Barbora*	*Schererová*	4	GB Sučany	3 3 3 – 0 – 0 0	9	**9,00**
158.	*Pavel*	*Čácha*	2	GMikul23PL	3 3 – – – – – –	6	**8,88**
159.–162.	*Peter*	*Debnár*	1	SpojenáŠ	3 1 0 – 0 – 0 –	4	**8,48**
159.–162.	*Ján*	*Kršiak*	1	GTim Lučen	3 0 – – 0 1 0 0	4	**8,48**
159.–162.	*Stanislav*	*Kvirenc*	1	G Dobruška	2 2 0 0 0 0 0 0	4	**8,48**
159.–162.	*Bronislav*	*Theuer*	1	G Žatec	3 0 – – 0 – 1 0	4	**8,48**
163.	*Vojtěch*	*Jílek*	4	VOŠKutHora	3 – – 5 1 – – –	9	**8,33**
164.–166.	*Peter*	*Brezina*	2	SPŠNitra	3 2 0 – – – – –	5	**8,17**
164.–166.	*Tereza*	*Kinská*	2	GBNěmcovHK	3 2 – – 0 – 0 0	5	**8,17**
164.–166.	*Hana*	*Tomanová*	2	GHeyrovPH	3 1 – – 1 – 0 –	5	**8,17**
167.	*Johana*	*Dvořáková*	2	G Trutnov	3 2 0 – 0 – – –	5	**8,01**
168.–172.	*Jan*	*Bohadlo*	3	G Náchod	3 3 0 – 0 0 0 0	6	**8,00**
168.–172.	*Vladimír*	*Lukačko*	3	GVarŽilina	3 3 – – 0 – – –	6	**8,00**
168.–172.	*Lukáš*	*Račko*	3	GLettMart	3 0 2 0 1 – 0 0	6	**8,00**
168.–172.	*Jana*	*Staňová*	3	GŠkolDubni	3 3 0 – 0 – – –	6	**8,00**
168.–172.	*Matúš*	*Varhaník*	3	G Bytča	3 – 3 – – – – –	6	**8,00**
173.	*Jaromír*	*Mielec*	4	GVolgogrOS	3 3 3 – 3 – – –	12	**7,64**
174.	*Jan Antonín*	*Musil*	0	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**7,58**
175.	*Daniel*	*Herman*	4	GŠroKošice	3 3 0 – 2 – 0 0	8	**7,21**
176.	*Ondřej*	*Dušek*	3	PORG PH	3 3 – 0 0 – – –	6	**7,16**
177.–184.	*Alexandra*	*Géciová*	1	GJHroncaBA	3 – – – – – – –	3	**6,79**
177.–184.	*Aneta*	*Haderová*	3	VOŠpSPgŠ	2 3 – – – – – –	5	**6,79**
177.–184.	*Alice*	*Janáčková*	1	G Chotěboř	3 – – – 0 – – –	3	**6,79**
177.–184.	*Kateřina*	*Mannlová*	3	VOŠpSPgŠ	1 3 – – – 1 – –	5	**6,79**
177.–184.	*Anežka*	*Novotná*	1	GJeronýmLI	3 – – – – – – –	3	**6,79**
177.–184.	*Markéta*	*Petrtýlová*	1	GSRandyJN	3 – – – – – – –	3	**6,79**
177.–184.	*Adam*	*Vavrečka*	1	GBezručeFM	3 – – – – – – –	3	**6,79**
177.–184.	*Václav*	*Zvoníček*	1	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**6,79**
185.	*Šárka*	*Míchalová*	2	G Kralupy	3 – – – 0 – 1 –	4	**6,76**
186.	*Karolína*	*Tulingerová*	2	AkademG PH	2 2 – – – – – –	4	**6,72**
187.	*Anna*	*Musilová*	1	PORG PH	3 – – – – – – –	3	**6,20**
188.	*Kateřina*	*Fuková*	4	GOhradníPH	3 3 – – 0 – 0 –	6	**6,00**
189.	*Dominik*	*Bartošek*	3	SŠŽivSokol	3 0 – – 1 – – 0	4	**5,53**
190.–193.	*Magdaléna*	*Bártová*	2	GDašickáPA	3 – – – – – – –	3	**5,27**
190.–193.	*Michaela*	*Bobeničová*	2	GPošKošice	3 – – – – – – –	3	**5,27**
190.–193.	*Jan*	*Česnek*	2	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**5,27**
190.–193.	*Aneta*	*Titzová*	2	GJarošeBO	3 – – – – – – –	3	**5,27**
194.	*Ha Mi*	*Dao*	2	GŠmejkalÚL	3 – – – – – – –	3	**5,13**
195.	*Vladimír*	*Kelbl*	4	GJarošeBO	3 2 – – – – – –	5	**5,00**
196.–198.	*Jiří*	*Janoušek*	1	GBudějovPH	0 – – – – – 2 –	2	**4,89**

196.–198.	*Michal*	*Stratený*	1	GŠkolDubni	0 0 0 2 0 0 0 –	2	**4,89**
196.–198.	*Anna*	*Švarcová*	1	G Prachati	0 2 0 – 0 – – 0	2	**4,89**
199.	*Jakub*	*Horyna*	4	GNVPlániPH	3 2 0 – – – – –	5	**4,83**
200.–202.	*Patrik*	*Beliansky*	3	SŠNvh	3 – – – – – – –	3	**4,23**
200.–202.	*Jana Viktória*	*Kováčiková*	3	GŠkolDubni	3 – – – 0 – – –	3	**4,23**
200.–202.	*Tomáš*	*Svoboda*	3	G Třinec	3 – – – – – – –	3	**4,23**
203.	*Michal*	*Rickwood*	3	G ČTřebová	3 – – – – – – –	3	**4,21**
204.	*Michal*	*Töpfer*	4	GJPekařeMB	3 3 – – – – – –	6	**4,13**
205.	*Hana*	*Jirovská*	3	NPorg	3 – – – – – – –	3	**3,98**
206.	*Markéta*	*Machalová*	4	WichtG OS	3 0 – – – – – –	3	**3,00**
207.	*Marika*	*Šejblová*	3	VOŠpSPgŠ	0 2 – – – – – –	2	**2,88**
208.	*Barbora*	*Lišková*	4	GJPekařeMB	3 – – – – – – –	3	**2,56**
209.	*Laura*	*Špaková*	2	G Kežmarok	– – – – 1 – – –	1	**1,91**
210.–215.	*Anna*	*Jandová*	2	G Leg PB	0 – 0 – – – – –	0	**0,00**
210.–215.	*Adam*	*Ječmínek*	0	G Česká ČB	– 0 – – 0 – – –	0	**0,00**
210.–215.	*Filip*	*Kubálek*	1	GNeumannŽR	0 – 0 – 0 – – –	0	**0,00**
210.–215.	*Milan*	*Šaržík*	3	G Púchov	0 – 0 – – – 0 –	0	**0,00**
210.–215.	*Anna*	*Tritschlerová*	0	G Česká ČB	0 – – – 0 – – 0	0	**0,00**
210.–215.	*Petra*	*Vávrová*	3	VOŠpSPgŠ	– – – – – 0 – –	0	**0,00**

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*