Geometrie trojúhelníka 3 – Trojúhelník vrací úhel

Hamiltonova kružnice se dotýká Pascalova trojúhelníku v bodě varu. – neznámý autor

Vítejte u dalšího dílu seriálu. V tomto díle už budeme skutečně pracovat s těžkým kalibrem. Začneme pokračováním z minulého dílu, povídáním o Lemoinově bodě a Tuckerových kružnicích. Zadefinujeme Gergonnův a Nagelův bod a vyslovíme další kamarádská tvrzení. Potom nás bude čekat Ponceletovo porisma, které následně rozšíříme na obecnější tvrzení (stále zvané Ponceletovo porisma). Zakončíme formulací Feuerbachovy věty, kterou rozšíříme na takzvanou třetí Fonteného větu. Tu pak společně s prvními dvěma dokážeme.

Lemoinův bod

Minulý díl jsme zakončili zkoumáním symedián a slíbili jsme si něco říct o jejich průsečíku – Lemoinově[1] bodu, jenž značíme K. Než se do toho pustíme, připomeneme si krátce symediány, neboť je budeme hodně používat.

Tvrzení. (Opakování o symediánách) *Je dán trojúhelník ABC. Izogonály (přímky osově souměrné podle příslušných os úhlů) k těžnicím se nazývají symediány a protínají se v Lemoinově bodě. Symediána z bodu A (a-symediána) je množinou středů všech antirovnoběžek (jakožto úseček s krajními body na přímkách AB a AC) se stranou BC (vůči úhlu BAC). Také je množinou všech takových bodů roviny, jejichž poměr vzdáleností od přímek AB a AC je roven $\frac{|AB|}{|AC|}$.*

Cvičení. Ke stranám AB a AC trojúhelníka ABC připíšeme zvenku čtverce a průsečík jejich stran rovnoběžných s přímkami AB a AC (ale různých od nich) označíme X. Dokažte, že X leží na a-symediáně.

Návod. Bod X má správný poměr vzdáleností od AB a AC.

Teď už nám[2] nic nebrání pustit se do Lemoinova bodu.

Tvrzení. (Kosinová kružnice) *Když bodem K vedeme antirovnoběžky se stranami, vytnou na stranách trojúhelníka (přesněji na přímkách jimi určených) šestici bodů ležících na jedné kružnici. Středem této kružnice je bod K.*

Důkaz. Z opakovacího tvrzení víme, že K leží ve středu všech tří antirovnoběžek. Stačí tedy dokázat, že průsečíky antirovnoběžek s AB a AC se stranou BC tvoří spolu s K rovnoramenný trojúhelník. To je ale jasné díky antirovnoběžkám – oba vnitřní úhly zmíněného trojúhelníka při straně ležící na BC mají velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$. Analogická tvrzení platí pro zbylé dvě antirovnoběžky a my vidíme, že K je skutečně od všech šesti bodů stejně vzdálený.

[1] Émile Lemoine ([lemuán]; 1840–1912) byl francouzský inženýr a matematik. Máme ho rádi.

[2] A vám snad také ne.

Cvičení. Dokažte, že šest bodů z posledního tvrzení leží uvnitř stran, právě když je daný trojúhelník ostroúhlý.

Návod. Zkoumejte limitní případ, kdy je nějakou z antirovnoběžek z minulého tvrzení přímo symediána. Zbývá dokázat nerovnost pro úhel u symediány (ten je z definice roven nějakému úhlu u těžnice) v ostroúhlém trojúhelníku.

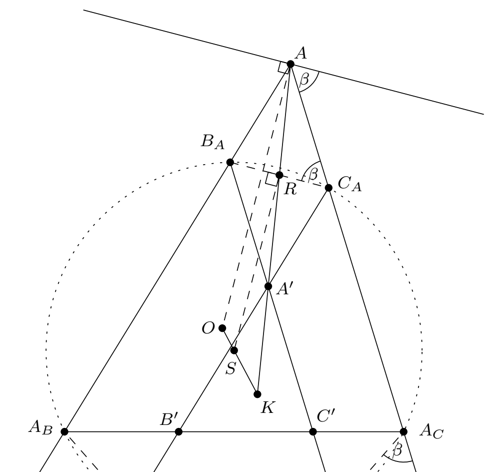
Cvičení. Dokažte, že v pravoúhlém trojúhelníku leží Lemoinův bod na některé výšce.

Cvičení. (těžší) Ukažte, že trojice úseček spojujících střed strany se středem odpovídající výšky prochází Lemoinovým bodem.

Návod. Ukažte, že každá z přímek je množina středů obdélníků vepsaných do ABC ležících na jedné ze stran. Rozmyslete si, že všechny vepsané obdélníky ležící na BC dostanete aplikováním vhodné stejnolehlosti se středem v A na nějaký obdélník zvenku připsaný ke straně BC, jehož střed umíte dobře popsat. Dopočítejte. Také se dá rovnoměrně hýbat s jedním vrcholem BÚNO po AB a nahlédnout, že střed obdélníka se pohybuje po správné úsečce. Nakonec použijte kosinovou kružnici.

Tvrzení. (Tuckerovy kružnice) *Uvažme vhodnou*[3] *stejnolehlost se středem v K a obrazy přímek AB, BC a CA v ní. Ty vytnou na obvodu trojúhelníka šestici bodů ležících na kružnici, jejíž střed leží na úsečce OK. Takové kružnice nazýváme Tuckerovy kružnice.*

Důkaz.



Označme si průsečíky podle obrázku. Čtyřúhelník $AB_AA'C_A$ je zřejmě rovnoběžník, takže úsečka B_AC_A je rozpůlena a-symediánou. Z toho plyne, že je to antirovnoběžka s BC. Vskutku, nechť B_AX je antirovnoběžka s BC a X leží na AC. Pak i B_AX je rozpůlena a-symediánou (opakovací tvrzení), z čehož plyne, že XC_A je rovnoběžná s a-symediánou, čili musí být $X = C_A$. S pomocí tohoto a analogických tvrzení jsou všechny tři „rohové“ trojúhelníčky (AB_AC_A a další dva) podobné

[3] Omezíme se jen na takové případy, v nichž každá z těchto zobrazených přímek protíná strany (úsečky) trojúhelníka ABC právě ve dvou bodech. Koeficient stejnolehlosti budeme tedy uvažovat z intervalu $\langle x, 1)$, kde x je vhodné záporné číslo. Nakreslete si v Geogebře.

trojúhelníku ABC. Speciálně je čtyřúhelník $B_AC_AA_CB_C$ rovnoramenný lichoběžník, tedy jeho vrcholy leží na jedné kružnici, a analogicky pro zbylé dvě strany.

Nabízí se otázka, zda už je z toho jasné, že všech šest bodů leží na jedné kružnici. Úplně jasné to není, ale pomůžeme si jednoduchým trikem. Dejme tomu, že by se ve skutečnosti jednalo o tři různé kružnice (zřejmě nemohou být právě dvě různé). Pak ale chordály jejich dvojic jsou přímky AB, BC a CA. Ty se mají podle tvrzení o potenčním středu protínat, což ale evidentně neplatí. Takže musí být všechny tři kružnice shodné a jsme hotovi, co se týče koncykličnosti.

Nyní uvažme stejnolehlost se středem v K takovou, že obraz bodu A je střed rovnoběžníka $AB_AA'C_A$ (označme jej R) a označme S obraz opsiště O v ní. Obraz tečny ke kružnici opsané ABC vedené bodem A je přímka B_AC_A, protože první z nich prochází bodem A, druhá bodem R a obě jsou antirovnoběžné s BC (u tečny to plyne z úsekového úhlu). Dále AO se zobrazí na RS (z definice), a tedy RS je kolmice na B_AC_A procházející jejím středem, čili je to osa úsečky B_AC_A. Analogicky bychom dokázali, že S leží i na dalších osách, takže S je středem naší Tuckerovy kružnice.

Důsledek. (Lemoinova kružnice) *Rovnoběžky se stranami vedené bodem K vytnou na obvodu trojúhelníka šestici bodů, které leží na jedné kružnici, kterou nazýváme Lemoinova kružnice.*[4] *Její střed je středem úsečky OK.*

Důkaz. Je to Tuckerova kružnice pro „koeficient stejnolehlosti rovný nule". Přísně vzato by taková stejnolehlost všechny tři přímky zobrazila do bodu K. My ji ale v tomto případě bereme tak, že je posune do nulové vzdálenosti od K, tedy uvažujeme trojici rovnoběžek se stranami vedených bodem K. Její existence by se dokázala zcela analogicky jako v případě Tuckerových kružnic (onu stejnolehlost jsme používali pouze na rovnoběžnost se stranami, takže úvahy o rovnoběžnících atd. projdou úplně stejně). Jelikož v našem případě splývá bod A' z minulého důkazu s bodem K, musí mít stejnolehlost použitá v jeho poslední části koeficient $\frac{1}{2}$, z čehož plyne, že její střed leží uprostřed úsečky OK.

Na tvrzení o Tuckerových kružnicích lze pohlížet i jinak. V důkazu jsme nakreslili nějaké rovnoběžky se stranami a dokázali, že spojnice jejich průsečíků jsou antirovnoběžky (s něčím, viz důkaz a obrázek). Vytvořili jsme tedy šestiúhelník (přesněji uzavřenou lomenou čáru o šesti úsecích), který dvakrát „objede" obvod trojúhelníka a je tvořen střídavě rovnoběžkami a antirovnoběžkami s protější stranou. To vede k následující formulaci tvrzení o Tuckerových kružnicích.

Cvičení. (Tuckerův magický šestiúhelník[5]) Zvolme bod na obvodu trojúhelníka. Konstruujme lomenou čáru s vrcholy na sousedních stranách po směru hodinových ručiček, jejíž úseky jsou střídavě rovnoběžkami a antirovnoběžkami s protější stranou. Předpokládejme, že celá leží uvnitř trojúhelníka. Dokažte, že tato lomená čára se po šesti úsecích uzavře a její vrcholy leží na kružnici se středem na úsečce OK.

Návod. Stačí dokázat, že „rovnoběžkové části" lomené čáry se protínají na symediánách. Z toho už plyne, že jsme je mohli obdržet z přímek AB, BC a CA pomocí vhodné stejnolehlosti se středem v K. Tím jsme převedli úlohu na tvrzení o Tuckerových kružnicích. První zmíněnou vlastnost ale snadno dostaneme z obrácené úvahy o rovnoběžníku – jeho vrchol a střed úhlopříčky (antirovnoběžka) leží na symediáně, tedy tam leží i jeho protější vrchol.

Na této formulaci je pozoruhodné, že Lemoinův bod K se objeví až při zkoumání středu výsledné kružnice – konstrukce lomené čáry ho nijak nepoužívá.

---

[4]Terminologie kolem Lemoinovy a kosinové kružnice kolísá. Například v angličtině převažuje po řadě First Lemoine Circle a Second Lemoine Circle, v češtině se jim někdy říká první a druhá Lemoinova kružnice, avšak naopak.

[5]Název je odvozen od notoricky známého kabaretního triku, ve kterém iluzionista vyzve diváka, aby ve zcela obyčejném trojúhelníku začal dokola po jeho obvodu kreslit střídavě rovnoběžky a antirovnoběžky.

Je dobré si uvědomit, jaké speciální případy Tuckerových kružnic už známe. Pokud zvolíme stejnolehlost s koeficientem 1 (což striktně vzato nesmíme, ale je to limitní případ), zdegenerují antirovnoběžky do bodů a výsledkem bude samotný obvod trojúhelníka, potažmo jeho kružnice opsaná. Pro „nulový koeficient“ dostaneme Lemoinovu kružnici. Pokud budeme pokračovat dál (pošleme koeficient do záporných čísel) a rovnoběžky budeme kreslit „až za“ bod K, projdou v jednom okamžiku bodem K všechny antirovnoběžky, kteréžto situaci odpovídá tvrzení o kosinové kružnici. Že se tak pro všechny tři antirovnoběžky stane v jednom okamžiku, plyne z toho, že poměr $\frac{|KR|}{|KA|}$ lze vyjádřit jen pomocí koeficientu původní stejnolehlosti, takže bod R a jeho dva analogy splynou s bodem K ve stejném okamžiku.

Cvičení. Ukažte, že kosinová kružnice je rozpůlena Lemoinovou kružnicí.

Návod. Stačí, že K leží na jejich chordále.

Nechť X je bod uvnitř trojúhelníka ABC. Jeho *úpatnicovým*[6] *trojúhelníkem* myslíme trojúhelník s vrcholy v patách kolmic z X na strany AB, BC a CA. S použitím tohoto pojmu můžeme například Tvrzení 54 z minulého dílu (Six feet theorem) zformulovat tak, že úpatnicové trojúhelníky kamarádů sdílejí kružnici opsanou.

Vzhledem k tomu, kolik věcí o Lemoinově bodu platí, bylo by zvláštní, aby žádné známé tvrzení neneslo jméno stejného velikána.

Tvrzení. (Lemoine theorem) *Lemoinův bod je jediný bod, který je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka.*

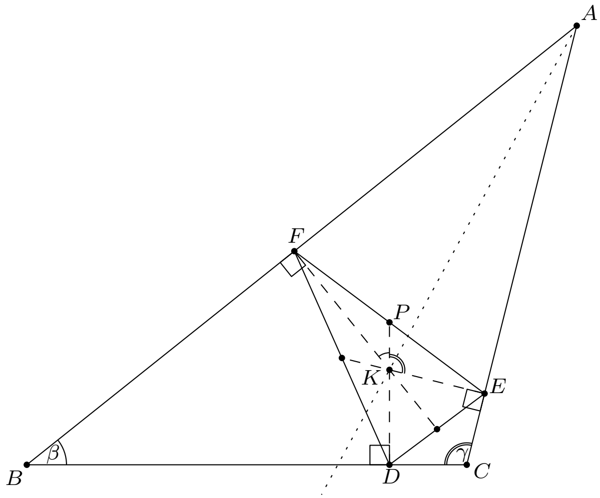
There is no royal road to geometry. – Eukleides

Důkaz. Jak naznačuje citát, budeme muset trochu počítat. Označme paty kolmic z K na strany BC, AC a AB po řadě D, E a F a dále průsečík přímky DK s úsečkou EF jako P. Pro první implikaci stačí dokázat, že bod P je středem úsečky EF. Tím bude přímka PK těžnicí v trojúhelníku DEF na stranu EF a analogicky to bude platit pro ostatní strany, čili K bude vskutku těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka DEF. Ze sinové věty pro trojúhelník KFP plyne: $|FP| = |FK|\frac{\sin|\sphericalangle FKP|}{\sin|\sphericalangle FPK|}$. Analogicky z trojúhelníku KPE odvodíme $|EP| = |KE|\frac{\sin|\sphericalangle PKE|}{\sin|\sphericalangle KPE|}$. Díky pravým úhlům u bodů E a F (paty kolmic) víme, že $|\sphericalangle FKP| = \beta$ a $|\sphericalangle EKP| = \gamma$. Jelikož K leží na a-symediáně a vzdálenost od přímky se měří na komici, platí $\frac{|KF|}{|KE|} = \frac{c}{b}$. Dohromady dostáváme

$$\frac{|FP|}{|PE|} = \frac{|FK|}{|EK|}\frac{\frac{\sin\beta}{\sin|\sphericalangle FPK|}}{\frac{\sin\gamma}{\sin|\sphericalangle KPE|}} = \frac{c\sin\beta}{b\sin\gamma} = 1,$$

což plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC (v předposlední rovnosti jsme využili, že úhly, jejichž součet je 180°, mají stejnou hodnotu sinu).

[6]Tento název je sice krásně český, ale téměř výhradně se místo něj používá anglický *pedal triangle*.



Pro opačnou implikaci uvažme bod X, který je těžištěm svého úpatnicového trojúhelníka, a uvažme stejnou konstrukci jako na obrázku (pro jednoduchost použijeme i stejné označení, pouze místo K máme X). Postupem podobným tomu z předchozí části můžeme vyjádřit poměr délek XE a XF jako

$$\frac{|XF|}{|XE|} = \frac{|FP|}{|PE|} \frac{\frac{\sin|\sphericalangle FPX|}{\sin\beta}}{\frac{\sin|\sphericalangle XPE|}{\sin\gamma}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b},$$

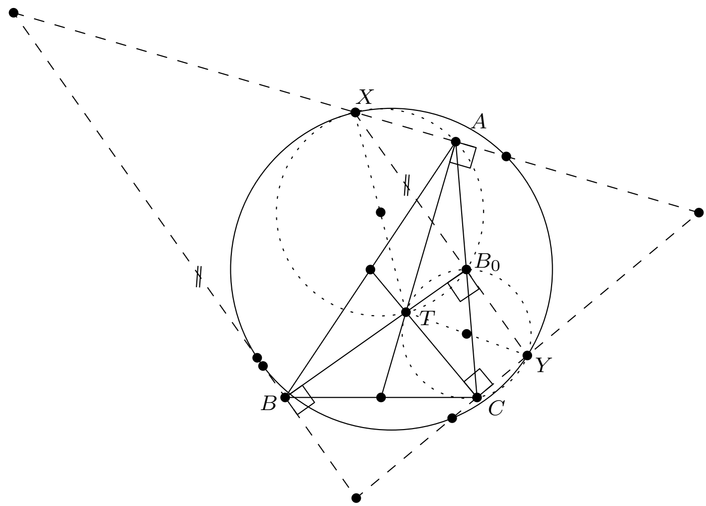
z čehož vyvodíme, že X leží na a-symediáně. Analogicky leží i na zbylých dvou symediánách, tedy platí $X = K$.

Ukážeme si, jak lze teorii získanou v této části aplikovat na úlohu, jejíž formulace obsahuje jen ty nejzákladnější středy, a přesto je k jejímu řešení potřeba[7] teorie z této části seriálu.

Příklad. Tři těžnice dělí trojúhelník ABC na šest trojúhelníků. Ukažte, že jejich opsiště leží na jedné kružnici.

Řešení. Vrcholy A, B a C veďme kolmice na příslušné těžnice. Tak vznikne trojúhelník, v němž je ABC úpatnicový trojúhelník bodu T, který je v něm těžištěm. Z minulého tvrzení plyne, že T je Lemoinův bod v novém trojúhelníku.

[7]Pravděpodobně; autorům není znám jednodušší důkaz.



Když se ale podíváme na obrázek, jsou opsiště malých trojúhelníčků nějak divně uvnitř a kružnice, kterou by měly určovat, nevypadá povědomě. Není ale třeba si zoufat. Uvažujme stejnolehlost se středem v T (jako vždy stejnolehlíme z Lemoinova bodu) a koeficientem 2. Kam se při ní zobrazí našich šest opsišť? Každé z nich leží na osách stran malých trojúhelníčků, jejich obrazy tedy budou ležet na přímkách dvakrát vzdálenějších od T. Speciálně každý z obrazů opsišť leží na osách spojnic vrcholů s těžištěm, které od těžiště dvakrát vzdálíme. To znamená, že leží na stranách nového trojúhelníku, protože ten má strany kolmé na těžnice v ABC.

Nyní stačí dokázat, že těchto šest bodů na obvodu trojúhelníka, v němž něco víme o Lemoinově bodu, leží na kružnici. Zní to povědomě? Asi tušíte, že naše kružnice je jedna z Tuckerových. Označme B_0 střed strany AC a zobrazená opsiště trojúhelníků ATB_0 a CTB_0 po řadě X a Y (viz obrázek). Obě původní opsiště leží na ose úsečky TB_0, takže X a Y leží na kolmici na b-těžnici vedené bodem B_0. To je jedna ze stran velkého trojúhelníka (kolmice na b-těžnici vedená bodem B) zobrazená ve stejnolehlosti se středem v T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Analogicky to platí i pro zbylé dvě dvojice sousedních trojúhelníčků. Tedy naše šestice bodů leží na Tuckerově kružnici ve velkém trojúhelníku odpovídající koeficientu $-\frac{1}{2}$.

Cvičení. (Kružnice šesti bodů) Z paty výšky z vrcholu A trojúhelníku ABC spustíme kolmice na strany AB a AC a uvážíme jejich paty. Podobně sestrojíme další čtyři paty. Dokažte, že všech šest takto získaných bodů leží na kružnici.

Návod. Je to jedna z Tuckerových kružnic. Spojte body lomenou čarou střídavě rovnoběžnou a antirovnoběžnou s protější stranou.

Cvičení. Mějme různostranný trojúhelník ABC, jeho těžiště označme T a kolmiště H. Jeho vrcholy veďme kolmice na příslušné těžnice (jako v minulém příkladu). Dokažte, že těžiště vzniklého trojúhelníka leží na přímce TH.

Návod. Použijte Lemoine theorem stejně jako v posledním příkladě. Vzpomeňte si na Eulerovu přímku a Six feet theorem.

Další kamarádi

Těsně před koncem minulého dílu jsme tvrdili, že z kamarádů nejdůležitějších středů trojúhelníka nám chybí jen kamarád těžiště, neboli Lemoinův bod. Vzhledem k času, který jsme s ním strávili, jej tímto prohlašujeme za dostatečně prozkoumaný. Z těch pokročilejších středů jsme ještě nemluvili o kamarádovi středu Feuerbachovy kružnice F. Následující tvrzení to alespoň informativně napravuje, nebudeme ho totiž dokazovat.

Tvrzení. *Kamarád bodu F (středu Feuerbachovy kružnice) je průsečík přímek AO_A, BO_B a CO_C, kde O_A je opsiště trojúhelníku OBC atd.*

A kde ještě můžeme potkat kamarády? Jste-li alespoň trochu obeznámeni s elipsami, můžete si dokázat následující tvrzení.

Tvrzení. *Ohniska elipsy vepsané do trojúhelníku spolu kamarádí.*

A nakonec jedno malé okénko do třetího rozměru.

Cvičení. Koule vepsaná čtyřstěnu $ABCD$ se dotýká stěny ABC v bodě E. Koule jemu připsaná vzhledem k vrcholu D se stěny ABC dotýká v bodě F. Dokažte, že E a F jsou kamarádi v trojúhelníku ABC. (MKS–33–3j–7)

Návod. Dokažte izogonalitu v jednom vrcholu. Vepsaná koule a připsaná koule jsou stejnolehlé podle D. Pomocí toho a stejných tečen najděte shodné trojúhelníky a dopočítejte. Podívejte se na řešení. :-)

Kdybyste stále nebyli zcela přesvědčeni, že jsou kamarádi v geometrii trojúhelníka opravdu na každém rohu, další kapitolka by to mohla napravit.

Gergonnův a Nagelův bod

Abychom neměli v seriálu málo exoticky znějících jmen, přidáme si dvě další.

Mějme trojúhelník ABC. Dotyky jeho kružnice vepsané se stranami BC, AC a AB označíme po řadě D, E, F a dotyky kružnic připsaných ke stejným stranám po řadě P, Q a R. Z Cevovy věty (viz začátek sekce o kamarádech z prvního dílu) plyne, že se úsečky AD, BE a CF protínají v jednom bodě. Opravdu, jelikož se jedná o kružnici vepsanou, platí díky stejně dlouhým úsekům tečen $|AF| = |AE|$, $|BF| = |BD|$ a $|CD| = |CE|$, takže poměr z Cevovy věty vyjde 1. Tento průsečík nazýváme *Gergonnovým*[8] *bodem* a značíme jej G. Jelikož jsou na každé straně body dotyku vepsané a opsané kružnice symetrické podle středu oné strany (viz Tvrzení 48 z prvního dílu), plyne z Cevovy věty, že se úsečky AP, BQ a CR protínají v jednom bodě. Ten nazýváme *Nagelův*[9] *bod* a značíme jej N.

Cvičení. Při značení zavedeném výše platí, že Gergonnův bod v trojúhelníku ABC je Lemoinovým bodem trojúhelníka DEF.

Návod. Vzpomeňte si na Tvrzení o průsečíku tečen z minulého dílu.

Cvičení. (těžší) Nagelův bod trojúhelníku ze středních příček je vepsištěm původního trojúhelníku. Dokažte.

Návod. Nejprve dokažte pomocné tvrzení: Nechť $ABCD$ je rovnoběžník a body X, Y leží postupně na jeho stranách BC a CD tak, že $|BX| = |DY|$. Označme Z průsečík úseček BY a DX. Dokažte,

[8] Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) byl francouzský matematik a logik.

[9] Christian Heinrich von Nagel (1803–1882) byl německý matematik a geometr.

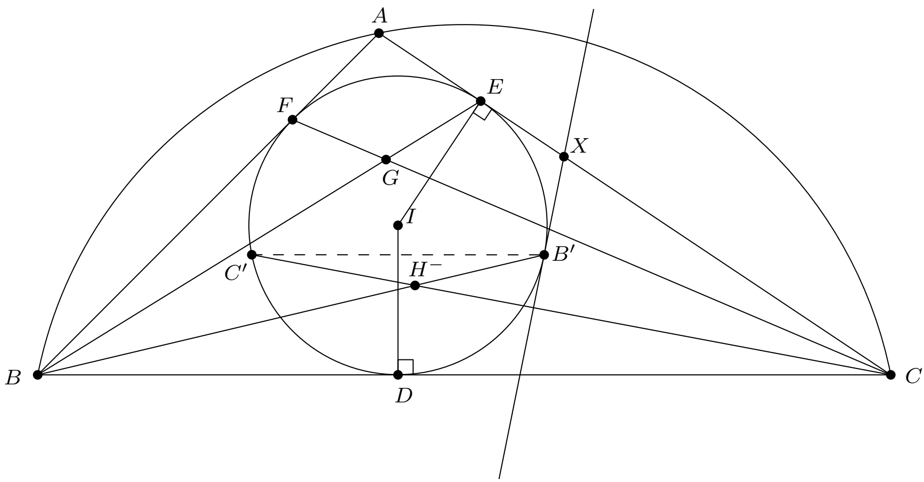
že přímka AZ je osou úhlu BAD. Toto tvrzení aplikujte na každý z rovnoběžníků vzniklých v daném trojúhelníku po dokreslení středních příček.

Důsledek. *Jelikož je Nagelův bod trojúhelníka ze středních příček (čili vepsiště původního trojúhelníka) obrazem Nagelova bodu původního trojúhelníka ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $-\frac{1}{2}$, leží body I, T a N na jedné přímce v poměru $|IT| : |TN| = 1 : 2$. Tato přímka se nazývá Nagelova přímka.*

Před následujícími dvěma tvrzeními je dobré si připomenout, že dvě kružnice (až na degenerované případy) mají dva středy stejnolehlosti, z nichž jedna má kladný koeficient a druhá záporný.

Tvrzení. *Kamarádem Gergonnova bodu G je střed záporné stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na vepsanou.*

Důkaz. Na úvod poznamenejme, že tento důkaz funguje pouze pro situace podobné té na našem obrázku, ostatní případy nebudeme rozebírat. Označme D, E a F doteky vepsané kružnice po řadě se stranami BC, AC a AB. Gergonnův bod označme G, obraz bodu E v osové souměrnosti podle osy vnitřního úhlu ABC označme B' a obraz bodu F v osové souměrnosti podle osy vnitřního úhlu ACB označme C'. Jelikož je vepsaná kružnice osově souměrná podle osy úhlu, leží body B' a C' na ní. Přímky BB' a CC' jsou izogonály přímek BG a BE, takže jejich průsečík je kamarád bodu G. Označme jej sugestivně H^-. Pokud dokážeme, že je přímka $B'C'$ rovnoběžná s BC, budeme mít vyhráno, protože pak bude platit $\frac{|H^-B|}{|H^-B'|} = \frac{|H^-C|}{|H^-C'|}$. Z toho a z analogických tvrzení pro analogicky definovaný bod A' dostaneme, že stejnolehlost se středem v H^- mající takový (rozmyslete si, že musí být záporný) koeficient, aby se bod B zobrazil na B', zobrazuje i C na C' a A na A'. Zobrazuje na sebe tedy i kružnice opsané těmto trojicím, což jsou přesně kružnice opsaná a vepsaná.



Vraťme se k důkazu zmíněné rovnoběžnosti. Vyjádříme velikost úhlu DIB'. Platí $|\sphericalangle DIB'| = |\sphericalangle DIE| - |\sphericalangle EIB'|$. Z deltoidu $IDCE$ vidíme, že $|\sphericalangle DIE| = 180^\circ - \gamma$. Dále nechť tečna ke kružnici vepsané vedená bodem B' protne stranu AC v bodě X. Vzhledem ke konstrukci bodu B' musí být tato tečna osově souměrná s přímkou AC podle osy úhlu ABC. Z toho dopočítáme $|\sphericalangle EIB'| = |\sphericalangle B'XC| = 180^\circ - (360^\circ - 2\alpha - \beta)$. Získané vztahy dosadíme do prvního výpočtu a dostáváme

$$|\sphericalangle DIB'| = 180^\circ - \gamma - 180^\circ + 360^\circ - 2\alpha - \beta = 180^\circ - \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že tato hodnota nezávisí na β a γ, musí být ze symetrie stejná jako velikost úhlu DIC'. Jelikož je úsečka ID kolmá na BC, plyne z dokázaného, že je úsečka $B'C'$ opravdu rovnoběžná s BC, a jsme hotovi.

Z podobných úvah vyplývá následující tvrzení.

Tvrzení. *Kamarádem Nagelova bodu N je střed kladné stejnolehlosti zobrazující opsanou kružnici na vepsanou.*

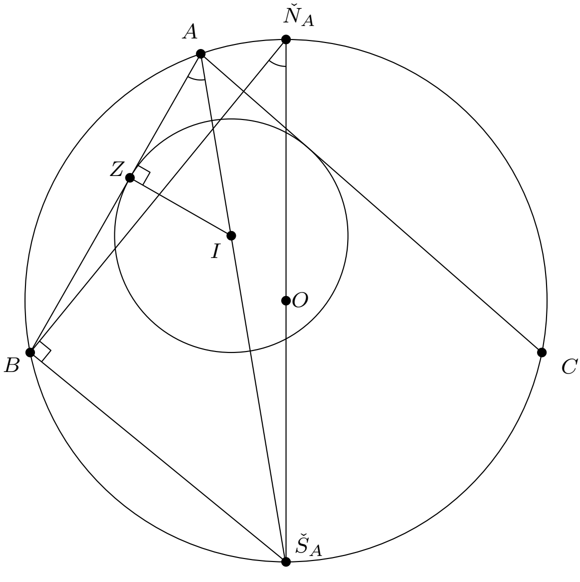
Ponceletovo porisma

Kružnice je zakulacená přímka s dírou uprostřed. – neznámý autor

V tomto oddíle bude třeba zavzpomínat na předcházející díl. Konkrétně budeme pracovat se Švrčkovými body, antišvrky a některými jejich vlastnostmi.

Věta. *(Eulerova formule, Ponceletovo porisma) Nechť kružnice ω se středem I a poloměrem r leží uvnitř kružnice Γ se středem O a poloměrem R. Nechť A, B a C jsou body na Γ takové, že AB i AC se dotýkají ω. Potom se BC dotýká ω právě tehdy, když $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$.*

Důkaz. Zjevně platí, že BC se dotýká ω právě tehdy, když je ω kružnice vepsaná trojúhelníku ABC.



Označme jako $\check{S}_A$ a $\check{N}_A$ Švrčkův bod a antišvrk příslušné A v trojúhelníku ABC. Dále buď Z bod dotyku AB s ω. Zjevně AI je osou úhlu BAC, takže $\check{S}_A$ leží na AI. Proto $|\sphericalangle IAZ| = |\sphericalangle \check{S}_A AB| = |\sphericalangle \check{S}_A \check{N}_A B|$. Navíc zjevně $|\sphericalangle AZI| = 90^\circ = |\sphericalangle \check{N}_A B \check{S}_A|$. Trojúhelníky AZI a $\check{N}_A B \check{S}_A$ jsou tudíž podobné.

Proto

$$|AI| \cdot |B\check{S}_A| = |\check{S}_A \check{N}_A| \cdot |IZ| = 2Rr.$$

Zároveň z mocnosti I ku Γ plyne

$$|AI| \cdot |I\check{S}_A| = R^2 - |OI|^2.$$

Z toho vyvodíme, že $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$ právě tehdy, když $|I\check{S}_A| = |B\check{S}_A|$. Ale protože I leží na $A\check{S}_A$, je I vepsiště trojúhelníku ABC právě tehdy, když $|I\check{S}_A| = |B\check{S}_A|$. Tím máme hotovo.

Implikaci „pokud ω je kružnice vepsaná, potom $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$“ se obvykle říká Eulerova formule,[10] zatímco implikace „pokud $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$, potom ω je kružnice vepsaná“ se občas označuje jako Ponceletovo porisma. Toto označení je ovšem poněkud zavádějící, protože Ponceletovo porisma je daleko obecnější tvrzení, které nemluví jen o trojúhelnících, ale i o mnohoúhelnících a dokonce i o ještě obecnějších útvarech.

Protože se jedná o velmi zajímavou geometrii, v následujících několika odstavcích si Ponceletovo porisma přiblížíme v jeho plné kráse. Musíme se ovšem připravit na pár věcí, které nás tam čekají.

Zaprvé překročíme pravomoce dané jménem seriálu, tj. nepůjde nám pouze o geometrii trojúhelníka, nýbrž i o daleko různorodější figury. Vězte, že se za toto pro nic za nic porušení pranic tradic a hranic omlouváme, a pokud to váš hněv nesmíří, budeme se i náležitým způsobem káti.[11]

Zadruhé bude velká část následujícího výkladu podána způsobem, který bychom lidově nazvali „mlha“ nebo „mávání rukama“, tj. leccos bude podáno neformálně a s nevelkou dbalostí na detaily. Je tomu tak proto, že pro přesné definice, formálně správné popisy a řádný důkaz bychom potřebovali strašidelná slova jako „limita“ a „integrál“, která zde nechceme (a kvůli nedostatku místa ani nemůžeme) zavádět.[12] Navíc bychom se tím příliš ponořili do algebry a místo kreslení neobvyklých obrázků bychom jenom přidávali a přeskupovali symboly, dokud by to nevyšlo. A to přece nikdo nechce.

Zatřetí může být nadcházející část z výše uvedených důvodů poněkud obtížná. Nebojte se ji při prvním (a třeba i jakémkoliv dalším) čtení přeskočit. Slibujeme, že žádná seriálová úloha nebude stavět na ní. Uvádíme ji pouze proto, že nám přijde dobrá.

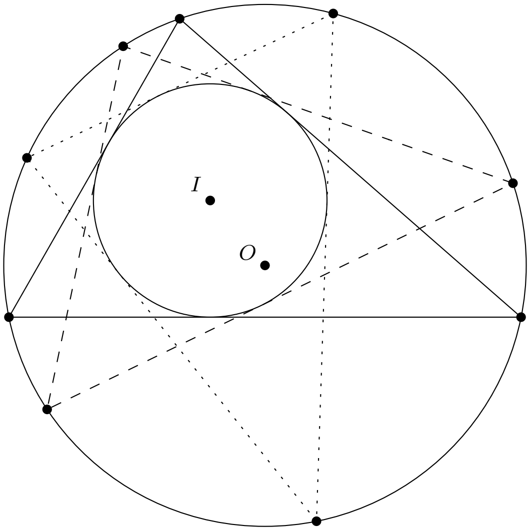
Nyní se už konečně pusťme do práce.

Na výše uvedené verzi Ponceletova porismatu nás nebude příliš zajímat vztah $R^2 - |OI|^2 = 2Rr$, ten je spíše náhodný. Uchopitelnější myšlenka, která odtud plyne, je následující: Představte si, že vám někdo dal obrázek, na kterém jsou nakresleny dvě kružnice. Dostanete za úkol nakreslit trojúhelník, pro který je jedna ze zadaných kružnic kružnicí opsanou a druhá kružnicí vepsanou. Pokud byste měli k dispozici i jeden z vrcholů tohoto trojúhelníka, pak je to jednoduché – z prvního vrcholu udělat tečnu k vepsané, tu protnout s opsanou, tím získat druhý vrchol a dál pokračovat stejně. Jenže co když ten první vrchol nemáte? Inu, Ponceletovo porisma říká, že to nevadí – pokud tento postup funguje v nějakém bodě kružnice opsané, pak funguje v *každém* jejím bodě. Platí totiž, že libovolném bodě uspějeme právě tehdy, když $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$, což je nezávislé na volbě bodu.

[10] Způsob, jakým jsme ji zavedli, je ovšem poněkud nestandardní a možná z něj úplně dobře není vidět, co tato formule vlastně říká. Klasické znění je následující: Pokud ABC je trojúhelník s vepsištěm I, opsištěm O, a poloměry kružnice vepsané a opsané postupně r a R, pak $|OI|^2 = R^2 - 2Rr$.

[11] Své kreativní návrhy odpovídajících trestů, způsobů pokání a mučicích technik můžete zasílat na e-mail *mks@mff.cuni.cz*.

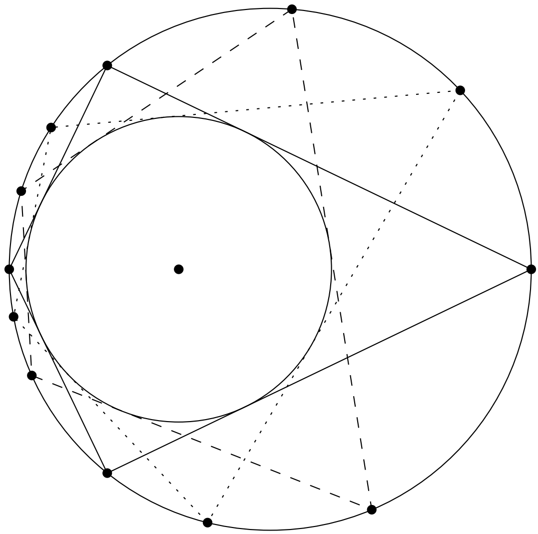
[12] Místo nich budeme používat slova jako „malý“, „skoro“ a „přibližně“.



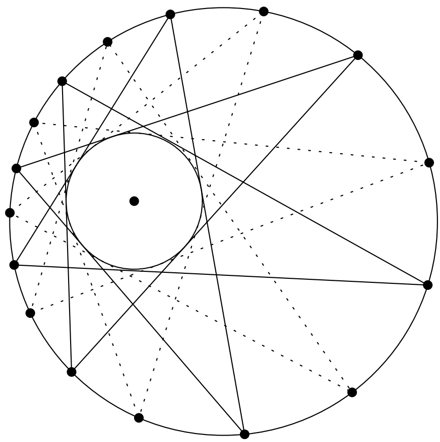
$k = 3$, $n = 1$

Nyní si Ponceletovo porisma zobecníme. Představte si, že jste dostali stejnou úlohu jako předtím (máte tedy na papíře nakreslenou kružnici Γ, která má být opsaná, a v ní menší kružnici ω, která má být vepsaná[13]), jen nemáte za úkol sestrojit trojúhelník, nýbrž obecnější útvar – uzavřenou lomenou čáru. No, co dělat, začnete v náhodném bodě a potom, co nakreslíte k úseček a celou kružnici Γ obkroužíte n-krát, se skutečně náhodou vrátíte do výchozího bodu. Inu, obecné Ponceletovo porisma tvrdí, že pokud vám to jednou takhle vyšlo, pak ať začnete kdekoliv, vždy se po k úsečkách a n obejitích celé kružnice vrátíte na výchozí pozici. (Všimněte si, že výše uvedené tvrzení je speciální případ pro $k = 3$ a $n = 1$.)

[13]Ve skutečnosti se nemusí ani jednat o kružnice; aby tvrzení fungovalo, stačí uvažovat kuželosečky. Ale to už je skutečně nad rámec našeho seriálu.



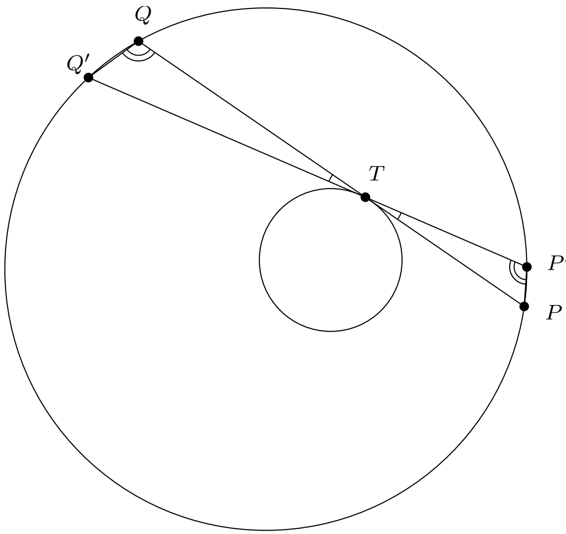
$k = 4$, $n = 1$



$k = 8$, $n = 3$

Důkaz je vskutku podivuhodný. Představte si, že po obvodu Γ postavíte zeď. A ne jen tak ledajakou, nýbrž takovou, která má v každém bodě X kružnice Γ výšku rovnou $\frac{1}{d(X)}$, kde $d(X)$ značí délku tečny z X k ω. K čemu vám taková zeď bude?

Uvažujte tětivu PQ kružnice Γ. Tětiva PQ rozděluje zeď na dvě části. Nechť $S(PQ)$ je povrch té části zdi, která přísluší oblouku Γ směřujícímu od P do Q po směru hodinových ručiček. Důležité pozorování je, že pokud se PQ dotýká ω, pak hodnota $S(PQ)$ je nezávislá na konkrétní poloze PQ. To rozhodně není vidět, a právě tuto část nebudeme dělat příliš rigorózně. Přesto se pokusíme ji trochu přiblížit.



Vezměme si dvě tětivy, PQ a $P'Q'$, které se dotýkají ω, a to konkrétně takové, aby body P a P' byly u sebe blízko (BÚNO tak, že P' je kousek po směru hodinových ručiček od P). Protože $S(PQ)$ i $S(P'Q')$ obě obsahují $S(P'Q)$, stačí ukázat, že $S(PP') = S(QQ')$. Buď T průsečík PQ a $P'Q'$. Všimněme si, že délka oblouku PP' je skoro rovna $|PP'|$ a analogicky délka oblouku QQ' je téměř rovna $|QQ'|$. Navíc T je velmi blízko bodům dotyku PQ a $P'Q'$ s ω, takže[14] $d(P) \approx |PT| \approx d(P')$ a analogicky $d(Q) \approx |Q'T| \approx d(Q')$. Proto $S(PP')$ a $S(QQ')$ umíme přibližně vyjádřit jako $\frac{|PP'|}{|PT|}$ a $\frac{|QQ'|}{|Q'T|}$. Jenže tyto dvě hodnoty jsou stejné, protože trojúhelníky $PP'T$ a $Q'QT$ jsou podobné.

Mohlo by se zdát, že jsme nic objevného nezjistili. Nějaké aproximace[15] $S(PP')$ a $S(QQ')$ jsou sice stejné, ale protože $S(PP')$ i $S(QQ')$ jsou (z toho, jak jsme volili PQ a $P'Q'$) takřka nula, tak dává jen smysl, že nějaké dva odhady jsou stejné.

Trik je v tom, že si rozkrájíme oblouk PP' na spoustu malinkatých obloučků a jejich koncové body spojíme. Tím dostaneme lomenou čáru jdoucí z P do P', která je složená ze spousty malinkatých úseček. Protože naše aproximace oblouku funguje tím lépe, čím menší oblouk zkoumáme, je na každém obloučku naše přiblížení *fakt dobré*. Důležité je, že není dobré pouze ve smyslu „rozdíl naší aproximace a správné hodnoty je fakt blízko nule“, nýbrž i ve smyslu „podíl naší aproximace a správné hodnoty je fakt blízko jedné“. To totiž znamená, že pokud všechny přibližné hodnoty přes všechny obloučky sečteme, dostaneme hodnotu, která bude $S(PP')$ stále aproximovat *fakt dobře*.

K tomuto přiblížení ovšem existuje odpovídající přiblížení oblouku QQ', které dle předchozího dává stejnou hodnotu. Navíc na QQ' budou příslušné obloučky taktéž malinké, takže i tam bude naše aproximace fakt dobrá. To znamená, že $S(PP')$ i $S(QQ')$ umíme libovolně dobře aproximovat stejnou hodnotou. To ale už potom musí znamenat, že $S(PP') = S(QQ')$.

No dobře, to je sice hezké, ale co z toho? Inu, důležité je, že pro každou tětivu PQ dotýkající se ω je $S(PQ)$ rovno nějakému pevnému c. Pokud označíme povrch celé zdi jako z a budeme předpokládat, že se po k přesunech po tečně dostaneme do výchozího bodu a obejdeme přitom kružnici n-krát, pak musí platit $ck = nz$. Potom ale ať začneme kdekoliv, pak během k kroků projdeme kolem zdi o celkovém povrchu $ck = nz$. Ale to přesně znamená, že ujdeme n koleček, což je to, co jsme chtěli ukázat.

[14] Znakem $\approx$ myslíme „je přibližně rovno“.

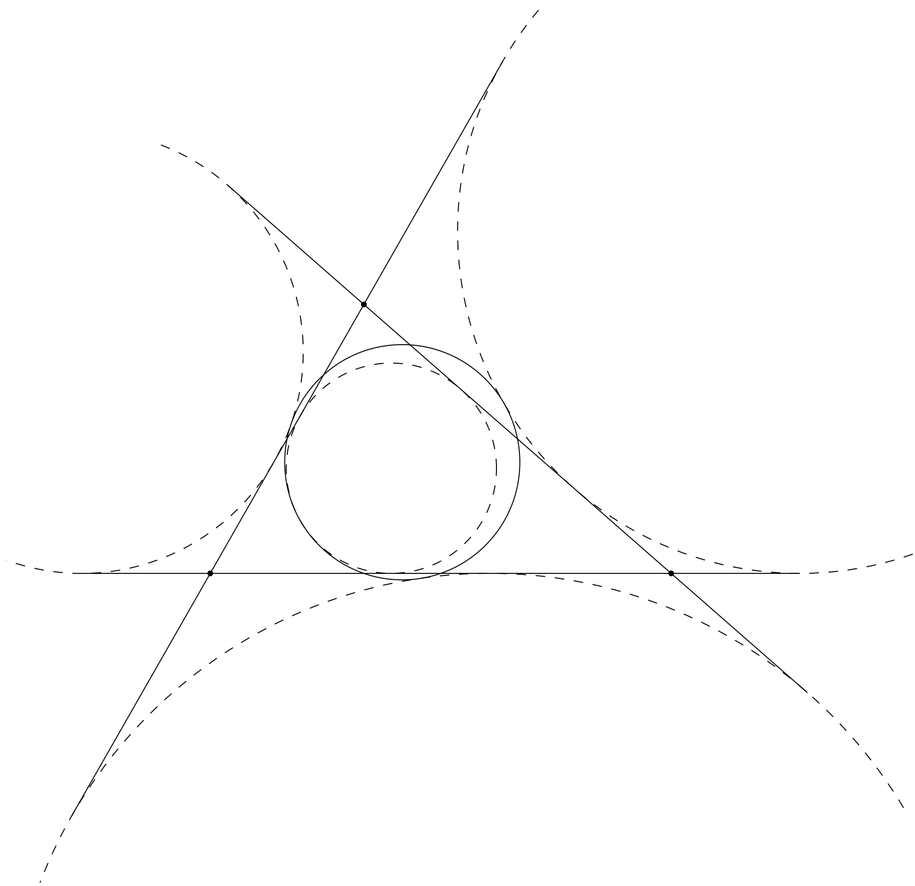
[15] Aproximace znamená „přibližné vyjádření“.

Fonteného věty

Dyť ty přiblblý citáty stejně nikoho nezajímaj'. – Rado, psa[16] *seriál ve čtyři ráno*

Někteří z vás už zajisté slyšeli o následující větě:

Věta. *(Feuerbachova) Kružnice vepsaná i všechny kružnice připsané se dotýkají Feuerbachovy kružnice.*



[16]Od tohoto slovesného patvaru se korektorská sekce distancuje.

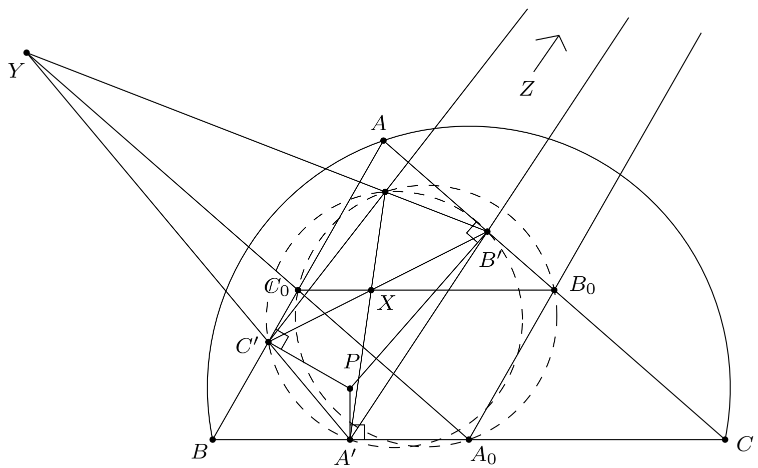
Důkazů této věty je několik a všechny jsou vcelku obtížné. Když už si s ní budeme tedy dávat tu práci, proč rovnou nedokázat něco obecnějšího? Povšimněme si, že kružnice vepsaná a připsané jsou kružnice opsané trojúhelníků postavených z projekcí vepsiště, respektive připsišť na strany trojúhelníka. Budeme se tedy zajímat o to, kdy pro bod P, jehož projekce na přímky BC, CA a AB jsou postupně A', B' a C', platí, že se kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ dotýká Feuerbachovy kružnice.

Všimněme si, že o zmíněné kružnici opsané už něco víme. Six feet theorem nám totiž říká, že splývá s analogickou kružnicí pro je kamaráda bodu P. Tedy bod P „vyhovuje“ právě tehdy, když „vyhovuje“ jeho kamarád. Nakonec si všimněme, že O a H se možná dají považovat za vyhovující, protože by se tak trochu dalo říci, že kružnice se dotýká sama sebe. Tato drobná pozorování nás vedou k následující (správné) domněnce:

Věta. *(Zobecněná Feuerbachova) Buď ABC trojúhelník s opsištěm O a dále P libovolný bod s kamarádem P'. Buďte A', B' a C' paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB. Potom se kružnice opsaná trojúhelníku $A'B'C'$ dotýká Feuerbachovy kružnice trojúhelníku ABC právě tehdy, když P, O a P' leží na jedné přímce.*

Této větě se také říká třetí Fonteného věta. K jejímu důkazu budeme potřebovat druhou Fonteného větu a k důkazu té je zase zapotřebí věta první. Vezměme je tedy pěkně popořadě.

Věta. *(První Fonteného) Nechť je dán trojúhelník ABC. Nechť A_0, B_0 a C_0 jsou po řadě středy stran BC, CA a AB. Buď P libovolný bod a označme A', B' a C' postupně paty kolmic z P na přímky BC, CA, AB. Dále označme X průsečík přímky B_0C_0 s $B'C'$, Y průsečík přímky A_0C_0 s $A'C'$ a Z průsečík přímky A_0B_0 s $A'B'$. Pak platí, že přímky $A'X$, $B'Y$ a $C'Z$ se protínají v jednom z průsečíků kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$.*

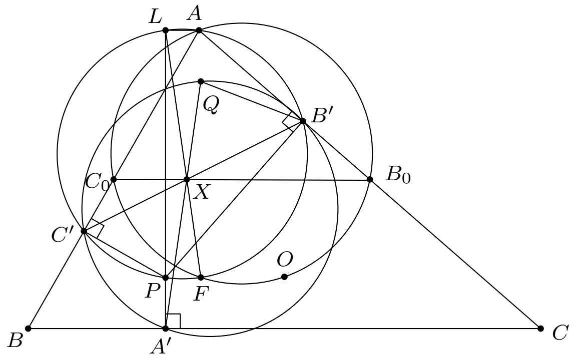


Důkaz. Nazvěme průsečík přímky $A'X$ s Feuerbachovou kružnicí (tj. kružnicí opsanou $A_0B_0C_0$) jako Q. Ukážeme, že Q leží na kružnici opsané trojúhelníku $A'B'C'$.

Zadefinujeme si několik pomocných bodů. Označme jako F druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům $AB'C'$ a AB_0C_0 a jako L průsečík přímky $A'P$ s kružnicí opsanou trojúhelníku $AB'C'$. Ukážeme, že LF prochází bodem X a $A'Q$ je obraz LF při překlopení přes B_0C_0. Potom bude z mocnosti X ke kružnici opsané trojúhelníku $AB'C'$ platit

$$|XQ| \cdot |XA'| = |XF| \cdot |XL| = |XB_0| \cdot |XC_0|,$$

z čehož již plyne, že Q leží na kružnici opsané trojúhelníku $A'B'C'$.



Povšimněme si, že kružnice opsaná trojúhelníku $AB'C'$ je kružnicí nad průměrem AP. Tedy $PL \perp AL$. Ale zároveň $PL \perp BC$. Proto $AL \parallel BC$.

Díky tomu platí,[17] že přímka LF svírá s přímkou B_0C_0 stejný úhel jako s přímkou AL. Tento úhel ale umíme upravit na $|\sphericalangle ALF| = |\sphericalangle AC'F|$. Abychom ukázali, že L, X a F leží na jedné přímce, chceme ukázat, že přímka FX svírá s B_0C_0 tentýž úhel, tedy že $|\sphericalangle AC'F| = |\sphericalangle B_0XF|$. To je ovšem ekvivalentní s tím, že čtyřúhelník $XC_0C'F$ je tětivový. A tuto skutečnost ukážeme jednoduchým vyúhlením:

$$\begin{aligned}
|\sphericalangle C_0FC'| &= |\sphericalangle AFC'| - |\sphericalangle AFC_0| \\
&= |\sphericalangle AB'C'| - |\sphericalangle AB_0C_0| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle XB'B_0| - |\sphericalangle B'B_0X| \\
&= |\sphericalangle B_0XB'| \\
&= |\sphericalangle C_0XC'|.
\end{aligned}$$

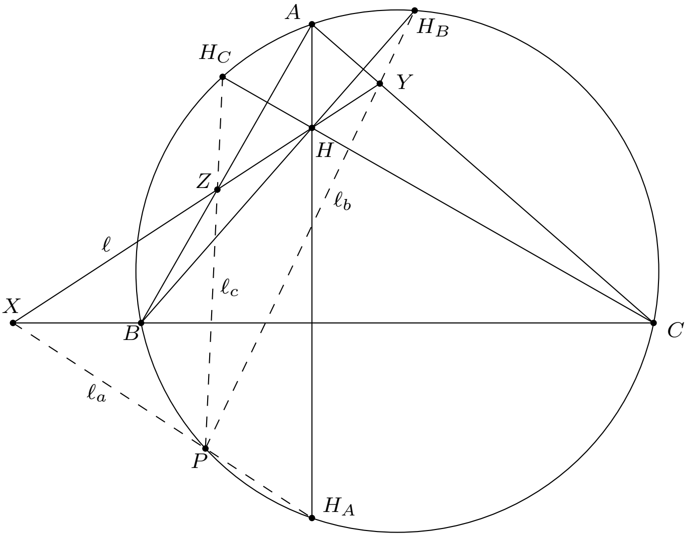
Tím jsme tedy ukázali kolineárnost bodů L, X a F. Zbývá ukázat, že se při osové souměrnosti podle osy B_0C_0 zobrazí A' do L a F do Q. První z těchto souměrností plyne z toho, že $AL \parallel B_0C_0 \parallel BC$, B_0C_0 je střední příčka a $LA' \perp B_0C_0$. Druhá vyplývá z toho, že díky kolineárnosti L, X a F je obrazem F průsečík obrazu přímky LX s obrazem kružnice opsané AB_0C_0. Přitom obrazem L je A', obrazem X je X a obrazem kružnice opsané $\triangle AB_0C_0$ je kružnice opsaná $A_0B_0C_0$. Ale to je přesně definice Q. Tím máme hotovo.

Důkaz celý ovšem zatím hotov není. Ukázali jsme, že AX prochází průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$. Analogicky totéž platí pro BY a CZ. Zatím ale nevíme, že se ve všech třech případech jedná o ten samý průsečík. Z důvodu přehlednosti nebudeme tuto skutečnost dokazovat hned, nýbrž si její zdůvodnění schováme do důkazu druhé Fonteného věty.

Proč část důkazu odkládáme místo toho, abychom se s ní vypořádali okamžitě? To proto, že k ní budeme potřebovat pomocné lemma, se kterým se pak tato část dokáže najednou s druhou Fonteného větou.

Lemma. *Buď ℓ přímka procházející skrz kolmiště H trojúhelníku ABC. Označme si jako ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c obrazy přímky ℓ přes přímky BC, CA a AB. Pak se ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c protínají v jednom bodě P na kružnici opsané $\triangle ABC$. Tento bod se nazývá Anti-Steinerův bod přímky ℓ vzhledem k trojúhelníku ABC. Toto přiřazení je navíc prosté, tj. žádné dvě různé přímky procházející skrze H nemají stejný Anti-Steinerův bod.*

[17] V případě, že konfigurace vypadá jako na obrázku – jiné případy se řeší analogicky, respektive úplně stejně, pokud umíte používat orientované úhly.



Důkaz. Opět uvažujme konfiguraci jako na obrázku, ostatní se řeší podobně. Označíme si jako X, Y a Z průsečíky ℓ s přímkami BC, CA a AB. Dále budeme obrazy H přes přímky BC, CA a AB nazývat H_A, H_B a H_C. Z prvního dílu víme, že H_A, H_B a H_C leží na kružnici opsané $\triangle ABC$.

Zjevně ℓ_a, ℓ_b a ℓ_c splývají s H_AX, H_BY a H_CZ. Nechť H_AX, H_BY a H_CZ protínají kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodech P_A, P_B a P_C. Ukážeme, že $P_B = P_C$, zbytek by se provedl analogicky.

Budeme prostě a jednoduše trochu úhlit:

$$\begin{aligned}
180^\circ - |\sphericalangle BAC| &= |\sphericalangle AYZ| + |\sphericalangle AZY| \\
&= 180^\circ - |\sphericalangle CYH_B| + 180^\circ - |\sphericalangle BZH_C| \\
&= |\sphericalangle ACH_B| + |\sphericalangle P_BH_BC| + |\sphericalangle ABH_C| + |\sphericalangle BH_CP_C| \\
&= |\sphericalangle ACH| + |\sphericalangle P_BAC| + |\sphericalangle ABH| + |\sphericalangle BAP_C| \\
&= (90^\circ - |\sphericalangle BAC|) + |\sphericalangle P_BAC| + (90^\circ - |\sphericalangle BAC|) + |\sphericalangle BAP_C|,
\end{aligned}$$

neboli $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAP_C| + |\sphericalangle P_BAC|$, což už implikuje, že $P_B = P_C$.

Abychom ukázali jednoznačnost bodu P, stačí si všimnout, že $|\sphericalangle P_CH_CC| = |\sphericalangle H_CHX|$, tedy velikost oblouku PC je jednoznačně dána úhlem, který ℓ svírá s výškou z C.

S tímto lemmatem jednoduše dokážeme druhou Fonteného větu a doděláme důkaz té první:

Věta. *(Druhá Fontenéo) Mějme pevně zvolenou přímku ℓ procházející opsištěm O trojúhelníku ABC. Nechť se P pohybuje po ℓ. Pak se poloha průsečíku kružnic opsaných trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$ nemění.*

Důkaz. Všimněme si, že O je kolmiště $\triangle A_0B_0C_0$. Protože ℓ prochází bodem O, nabízí se možnost, že Q v důkazu první věty by mohl být Anti-Steinerovým bodem příslušným ℓ a $A_0B_0C_0$. Pokud toto dokážeme, pak zjevně budeme hotovi jak s první, tak s druhou Fontenéno větou.

Povšimněme si, že F z minulého důkazu leží na kružnicích nad průměry AP a AO. Tedy $PF \perp AF \perp FO$, z čehož plyne, že F leží na ℓ. Protože Q je obraz F při překlopení přes přímku B_0C_0, leží Q na překlopení ℓ podle B_0C_0. Jedná se proto o průsečík tohoto překlopení a kružnice opsané $\triangle A_0B_0C_0$, tedy je to příslušný Anti-Steinerův bod.

Nyní už přicházíme do velkého grandfinále.

Věta. *(Třetí Fonteného) Buď P' kamarád bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC. Pak se kružnice opsané trojúhelníkům $A_0B_0C_0$ a $A'B'C'$ dotýkají, právě když body O, P a P' leží na jedné přímce.*

Důkaz. Všimněme si, že pokud jsou přímky PO a $P'O$ různé, pak i jim odpovídající Anti-Steinerovy body Q a Q' jsou různé. To nám přímo dokazuje jednu implikaci.

Při důkazu opačné implikace jsme v situaci, kdy P' leží na OP. V tu chvíli si pomůžeme pohyblivým bodem R, jehož kamaráda označíme R'. Ten se bude pohybovat do P tak, aby R, O a R' neležely na přímce. Pokud si ještě dokreslíme jim příslušné kružnice k_R opsané trojúhelníku $A'_RB'_RC'_R$, pak k_R má s kružnicí opsanou $A_0B_0C_0$ vždy dva průniky – Anti-Steinerův bod OR a Anti-Steinerův bod OR'. Ale OR i OR' se přesunou na stejnou přímku OP. To znamená, že i jim příslušné průsečíky se posunou do jednoho bodu, a tudíž se z nich stane jeden. Protože se vše pohybuje spojitě, nemůže nám najednou vzniknout úplně nový průsečík. To znamená, že $A'B'C'$ a $A_0B_0C_0$ budou mít jen jeden průsečík a máme tedy hotovo.

Cvičení. Buď ABC trojúhelník se středy stran A_0, B_0, C_0. Nechť P je bod a paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB jsou A', B' a C'. Obrazy bodů A', B', C' podle A_0, B_0, C_0 si označíme A'', B'', C''. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $A_0B_0C_0$, $A'B'C'$ a $A''B''C''$ se protínají v jednom bodě.

Návod. Uvažte obraz bodu P přes opsiště $\triangle ABC$.

Cvičení. Buď ABC trojúhelník se středy stran A_0, B_0, C_0. Nechť P je bod a paty kolmic z P na přímky BC, CA a AB jsou A', B' a C'. Nechť Q je Anti-Steinerův bod přímky OP vzhledem k trojúhelníku $A_0B_0C_0$. Označme jako P' kamaráda bodu P a $A''B''C''$ trojúhelník z pat kolmic P' na strany trojúhelníku ABC. Ukažte, že Simsonovy přímky bodu Q vzhledem k trojúhelníkům $A'B'C'$ a $A''B''C''$ jsou rovnoběžné.

Návod. Trochu úhlete a s použitím druhé Fonteného věty ukažte, že jsou obě rovnoběžné s OP.

Závěr

Geometers don't die, they become angles. – neznámý autor.

Gratulujeme! Právě jste se prokousali třetím, pravděpodobně nejsložitějším dílem našeho seriálu. Tím ovšem nekončíme. Geometrie trojúhelníka je velmi rozsáhlý obor a témata v prvních třech dílech musela být pečlivě vybrána s přihlédnutím k mnoha kritériím. Kvůli tomu jsme ovšem museli vypustit mnoho dalších pěkných tématek. Proto na vás v příštích komentářích bude čekat exkluzivní čtvrtý díl. V tom budeme prezentovat několik dalších větiček, tvrzeníček a lemátek. Tentokráte s nimi ovšem nebude z časových důvodů spojená soutěžní série, text bude určený pouze pro nadšené zájemce. Přesto budeme rádi, pokud si i příští část přečtete. Slibujeme, že se vynasnažíme, aby to stálo za to.

K tomuto dílu se asi opět hodí zmínit, že v případě jakýchkoliv otázek byste se neměli zdráhat na nás obrátit. Rádi vám pomůžeme s jakýmikoliv nejasnostmi. Zároveň opět podotýkáme, že v seriálových sériích nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, nýbrž dle tématiky.

Přejeme hodně zdaru!

autoři