

# Rozdělování

1. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. ÚNORA 2017

ÚLOHA 1. (3 BODY)  
V lese je několik mravenišť. Hloubavý biolog si do notýsku zapsal množství mravenců v každém mraveništi, čímž získal  $k$  různých nenulových hodnot. Potom se ale do lesa přestěhoval zlý mraveněčnick, který každý den snědl jednoho mravence z každého mraveniště, ve kterém ještě nějakí mravenci zbývali. Každý den si poznamenal, kolik jich snědl, přičemž nuly z lenosti nezapisoval. Ukažte, že jím napsaná čísla nabývají právě  $k$  různých hodnot.<sup>1</sup>

ÚLOHA 2. (3 BODY)  
Máme bílý a černý trojúhelník, které jsou si podobné. Oba rozdělíme na dva trojúhelníky. Jeden ze vzniklých bílých trojúhelníků je podobný jednomu černému. Musí být podobné i zbylé dva?

ÚLOHA 3. (3 BODY)  
V zemi je  $n \geq 2$  měst a každá dvě jsou spojena silnicí. Dva silničáři Syp a Posyp je mají za úkol pospat štěrkem, ale jsou líní, a proto si práci rozdělí tak, aby:

- (1) Každou silnici prošel právě jeden z nich.
- (2) Oba skončili v tom městě, ve kterém začali, a mezitím do něj nevtrhli.
- (3) Každý po cestě navštívil každé město kromě počátečního právě jednou.

Kolik měst v zemi bylo?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)  
Myška si koupila 2017 ne nutně stejných kousků sýra. Ukažte, že nějaký z nich mohla rozříznout na dvě části a vzniklých 2018 kousků rozdělit do dvou skupin, které budou mít stejný počet dílků i stejnou hmotnost.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)  
Dokažte, že když jakkoliv rozdělíme přirozená čísla do konečně mnoha skupin, pak alespoň v jedné z nich bude nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)  
Jedenáct organizátorů schovalo do trezoru zadání letošního myšmaše. Zamkli ho na  $n$  zámků a každý z nich si vzal několik klíčů. Jeden klíč si mohlo vzít víc organizátorů. Přitom chtěli, aby každá šestice byla schopna otevřít trezor (tedy odemknout všechny jeho zámky), ale žádná pětice se dovnitř nedostala. Kolik nejméně zámků potřebovali?

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)  
Na kruhovém ostrově je v písku nakreslen  $n$ -úhelník se stejně dlouhými stranami. Ve středu každé strany čekají zády k sobě dva ptakopysci. Najednou se všichni rozběhnou po stranách, na kterých stojí, a po přímce pokračují až k pobřeží. Ukažte, že můžeme ptakopysky rozdělit do dvou skupin tak, že součet uběhnutých vzdáleností v obou skupinách bude stejný.

---

<sup>1</sup>Mravenci se nerozmnožují.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

V PraSeStánu se vláda rozhodla zřídít 2017 okresů o stejné rozloze. Své návrhy na rozdělení podaly dvě politické strany. Dokažte, že lze vybudovat 2017 okresních úřadů tak, aby byl v každém okrese právě jeden, ať už vláda poté zvolí kteroukoli variantu.