

Prvočísla

2. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. LISTOPADU 2016

Číslem rozumíme vždy celé číslo větší než nula. Prvočíslu je číslo větší než jedna, které je dělitelné jen jedničkou a sebou samým. Číslo nazveme složeným, pokud je větší než jedna a není to prvočíslu.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Čarodějnice Marta si povšimla, že se jí na zahrádce přemnožila prvočísla. Vyslovila tedy složitě zaklínadlo a co se nestalo: Nejprve se vypařila všechna prvočísla a na zahrádce je nahradily součty každých dvou z nich, načež všechna složená čísla odletěla pryč. Dokažte, že po dvou provedeníh zaklínadla se Marta všech prvočísel zbavila.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Nalezněte všechna prvočísla, která **nelze** zapsat jako součet dvou složených čísel.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Když se Marian vrátil ze svých cest, chlubil se kamarádům: „Dojel jsem až k jezeru, na jehož obvodu leželo 1001 měst. Přitom poměr počtu obyvatel každých dvou sousedních měst (větší ku menšímu) byl přirozené číslo a navíc prvočíslu.“ „To kecáš“, podivila se Áďa. Dokažte, že měla pravdu.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Rozhodněte, zda pro každých šest po sobě jdoucích čísel existuje prvočíslu, které dělí právě jedno z těchto čísel.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Číslo n má tu vlastnost, že $2n + 1$ i $3n + 1$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. Ukažte, že $5n + 3$ není prvočíslu.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

David má n hrušek a Martin s Tondou mu je střídavě ujídají. Martin začíná a ten, kdo je na řadě, si vybere nějaké prvočíslu p a sní $p - 1$ hrušek. Oba loupežníci se snaží sníst poslední hrušku. Dokažte, že pro nekonečně mnoho n toho může dosáhnout Tonda, ať se mu v tom Martin snaží sebevíc zabránit.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)

Nalezněte všechny 2016-tice ne nutně různých přirozených čísel, pro které platí, že kdykoli z nich vybereme¹ čtveřici (a, b, c, d) , tak splňuje $abcd \mid a^4 + b^4 + c^4 + d^4$.

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)

Nechť $p(n)$ je nejvyšší prvočíselný dělitel čísla $n > 1$. Ukažte, že existuje nekonečně mnoho čísel $n > 2$, pro která platí $p(n - 1) < p(n) < p(n + 1)$.

¹Jedno číslo můžeme vybrat jen tolikrát, kolikrát se vyskytuje v naší 2016-tici.