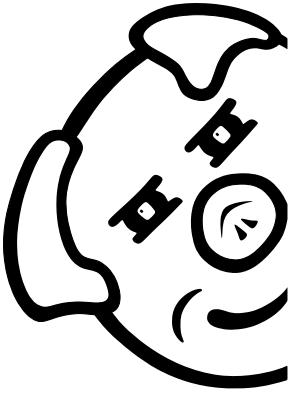
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



37. ročník Matematického korespondenčního semináře skončil. Zbývá nám pogratulovat vítězům: poměrně s přehledem vyhrál Matěj Doležálek, na druhém místě skončil stále ještě základoškolák Michal Beránek. Za nimi se umístily Magdaléna Mišinová, Adéla Karolína Žáčková a Lucia Krajčoviechová, čímž krásně popírají řeči o tom, že matematika je jenom pro kluky (což my si samozřejmě nemyslíme, ale bohužel se takoví stále najdou). Uznání si ovšem zaslouží všichni, kdo odeslali všechny série, i když třeba nejsou mezi prvními. Zbytek výsledkové listiny najdeš uvnitř komentářů.

Doufáme, že se Ti letošní úlohy líbily a že náš seminář budeš řešit i po prázdninách, pokud se střední školou ještě nekončíš. Začít můžeš koneckonců už teď, první dvě série příštího ročníku jsou přiložené v této obálce (nebo k nalezení na našem webu). Papír s nimi se ti vejde do každého kufru a při nicnedělání na dovolené to může být zábava k nezaplacení.

S koncem ročníku nám skončí i mnoho řešitelů. Proto bychom Tě chtěli poprosit, abys o PraSeti řekl(a) svým kamarádům, kteří mají matematiku aspoň trochu rádi. Třeba je naše úlohy zaujmou a pak spolu pojedete na soustředění poznat podobné nadšence.

Parádní léto Ti za všechny organizátory přeje

Bára Kociánová

Obsah závěrečných komentářů

- Povídání o aprílové sérii
- Vzorová řešení 2., 3. a 4. jarní a 3. seriálové série
- Výsledkové listiny včetně závěrečného pořadí

- Příloha: Leták se zadáním 1. a 2. podzimní série 38. ročníku

Závěrečná anketa

Na stránce *mks.mff.cuni.cz/anketa* na Tebe čeká anketa o tom, co se Ti v PraSeti líbí a co bys naopak dělal(a) jinak. Můžeš nám říct, proč seminář řešíš nebo jaká témata sérií by sis do budoucna přál(a). Zpětná vazba je pro nás důležitá, a proto budeme moc rádi, když ji vyplníš.

Seminář očima orgů

Doufám, že jste si letošní ročník PraSátka užili stejně jako já. Pro mě byl tento ročník první v pozici organizátora a musím říct, že mě to opravdu bavilo. Dostal jsem se do skvělého kolektivu lidí, kteří se nebojí věnovat svůj čas a úsilí tomu, aby seminář fungoval. A není potřeba jen vybrat úlohy, opravit je a napsat vzorová řešení, je kolem toho ještě spousta další práce, která na první pohled není vidět. Například se všechna vaše řešení musí roztřídit do správných obálek a pak všech 129 obálek plných vašich řešení a našich komentářů donést na poštu.

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

Ale vyplatí se to. Je to skvělý pocit, když se s Vámi potom můžeme potkat na soustředění a připravovat různé hry a další program. Já jsem měl také to štěstí a jel jsem letos na jarní soustředění, kde se jako obvykle sešla úžasná parta lidí ...

Michal Töpfer

Jarní soustředění

Letošní jarní soustředění pro 24 nejlepších řešitelů podzimní části semináře se uskutečnilo 14.–22. dubna v Horních Lysečinách na chatě uprostřed krkonošské přírody. Za týden jsme stihli procestovat celý svět od Thajska přes pomatenou Austrálii až po Polsko, vyhráli jsme nad zlou společností a vyléčili jsme se přitom z pravděpodobně smrtelné nemoci. Navíc jsme si perfektně odpočinuli při opravdu hlubokém spánku, a tak si všichni účastníci jistě pamatují vše z vyslechnutých matematických přednášek.

Dobré úlohy

$2\frac{1}{2}$. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

PraSátko se letos rozhodlo, že místo klasických jedenácti sérií jich bude mít dvanáct. Přibyla $2\frac{1}{2}$. jarní série, která byla zveřejněna 1. dubna a datum odeslání měla hned následujícího dne. Obsahovala celkem čtyři úlohy, za každou z nichž jsi mohl(a) získat až nula bodů. I přes brzký deadline a poměrně nízké bodové ohodnocení nám dorazilo celkem dvanáct řešení od čtyř různých řešitelů.

Zde jsme vybrali naše nejoblíbenější řešení, snad Tě pobaví alespoň tolik jako nás. :-)

Úloha 2.

Symfonický orchestr o 120 hudebnících zahraje Beethovenovu devátou symfonii za 40 minut. Za jak dlouho ji zahraje tentýž orchestr během chřipkové sezóny, kdy čítá pouze 60 hudebníků?

ŘEŠENÍ

I dvouletému dítěti je jasné, že jim to zabere 122,78 minut:

Hraní symfonie je v jistém smyslu podobné radioaktivnímu rozpadu, takže ve skutečnosti není symfonie nikdy zahrána celá, ale nedokonalé lidské ucho ji považuje za zcela zahranou již při devadesátiprocentní *zahranosti*. *Nezahranost* symfonie $n(t)$, neboli doplněk zahranosti do 1, se dle výše provedené analogie s radioaktivními rozpady a dalšími chemickými ději nultého řádu chová v závislosti na čase v souladu s rovnicí $n(t) = e^{-\alpha t}$ pro nějakou konstantu α.

Jak konstanta α závisí na počtu hudebníků? Intuitivně by dávalo smysl, kdyby byla lineární, nedávné studie však odhalily poměrně překvapivou závislost na n^{φ} vyplývající z toho, že jsou Beethovenovy symfonie nepochybně krásné a že ve všem krásném se přece musí objevit zlatý řez.

Řešením rovnice pro původní hodnotu α dostaneme $\alpha = \frac{\ln(10)}{40}$, takže pro poloviční počet hudebníků bude $\alpha' = \frac{\alpha}{2^{\varphi}}$. Ke zdánlivě úplnému zahrání symfonie tedy dojde v čase $t = \frac{\ln(10)}{\alpha'} = 40 \cdot 2^{\varphi} \approx 122{,}78$ minut.

(Danil Koževnikov)

Čtverce a krychle

2. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Zapište za sebe v nějakém pořadí čísla 1 až 16 tak, aby součet každých dvou sousedních čísel byl čtverec[1].

(Michal Töpfer)

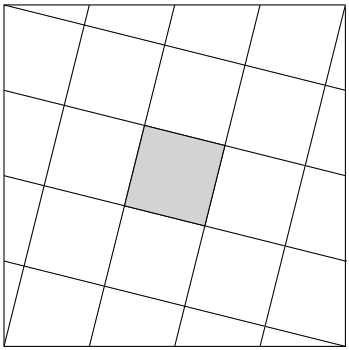
Řešení:
Řešením úlohy je například posloupnost: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8. Není těžké ověřit, že součet každých dvou sousedních čísel je opravdu druhou mocninou přirozeného čísla.

Poznámky:
Jak na to přijít? K číslům 16 a 8 existuje jen jedno další číslo z rozsahu 1 až 16 tak, aby součet byl čtvercem. Tudíž tato čísla musí být na jednom z konců posloupnosti. Poté již není těžké doplnit zbytek posloupnosti. Většina řešení byla naprosto správně, někteří řešitelé našli všechna řešení (jedná se jen o výše zmíněnou posloupnost a převrácenou) a dokázali, že žádná další nejsou. Cením si toho, ale v této úloze to nebylo nutné (zadání říká pouze „napište“).

(Lucien Šíma)

Úloha 2.

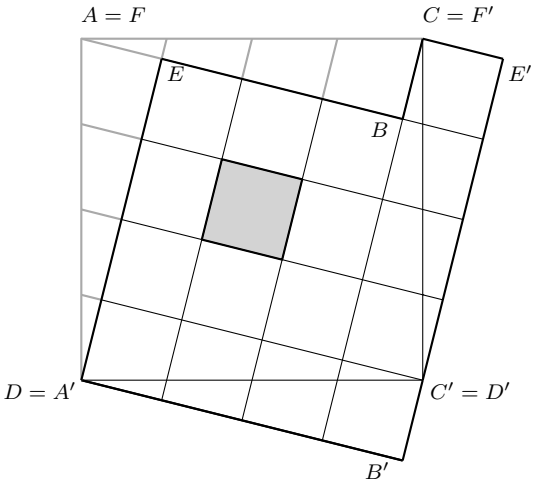
Máme čtverec o straně délky jedna. Každou jeho stranu rozdělíme na čtyři stejné části a vzniklé body pospojujeme způsobem naznačeným na obrázku. Určete obsah malého šedého čtverečku.



(Kuba Krásenský)

[1] Čtvercem nazýváme druhou mocninu nějakého přirozeného čísla.

Řešení:
Nejprve si útvar trochu upravíme tak, abychom nezměnili jeho celkový obsah: trojúhelník ABC přesuneme na místo $A'B'C'$, trojúhelník DEF na $D'E'F'$, viz obrázek.



Výsledný útvar je tvořený sedmnácti shodnými čtverečky, a jelikož je jeho obsah roven jedné, je obsah každého čtverečku roven $\frac{1}{17}$.

Poznámky:
Úloha byla snadná, drtivá většina řešení byla správná. V několika případech řešitelé počítali délku hrany vnitřního čtverečku přes úhel odpovídající úhlu BAC pomocí goniometrických funkcí, což však vedlo na jejich nepříjemné skládání. V případě takového řešení je poté třeba dospět k výsledku použitím správných úprav, což bylo v této úloze poměrně náročné.

(Tomáš Novotný)

Úloha 3.

Kuba a Tonda hrají hru na tabulce velikosti 100×3 *čtverečků. Střídavě na její políčka pokládají dominové kostičky* 2×1. *Začínající Kuba je pokládá tak, že strana domina o délce* 2 *je rovnoběžná s delší stranou tabulky, zatímco Tonda naopak. Nikdo z nich nesmí položit domino na již zabrané políčko. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Ukažte, že Kuba může vyhrát, ať hraje Tonda jakkoli dobře.*

(Honza Krejčí)

Řešení:
Tabulku rozdělíme na 50 částí o velikosti 2×3. Pokud do prostřední řady některé z takových částí Kuba umístí své domino, znemožní tím Tondovi kamkoliv do této části položit své domino. Zároveň si tím Kuba vytvoří dvě pozice, do kterých bude moci později neohroženě zahrát.

V prvních 25 tazích si Kuba může tímto způsobem zabrat 25 částí nezávisle na tom, jak zahraje Tonda. Ten totiž každým svým dominem protne vždy právě jednu část tabulky, takže ať zahraje jakkoliv, každý jeho tah má šanci Kubovi znemožnit zabrání maximálně jedné části.

Nyní si můžeme všimnout, že pokud takto Kuba zahraje, Tonda má v celé hře k dispozici jen 50 tahů (dva v každé z 25 částí, které mu Kuba nechal), kdežto Kuba má celkem k dispozici alespoň 75 neohrozitelných tahů (tři v každé z 25 částí, které si zabral pro sebe). Kuba tak může donutit Tondu prohrát po 50 tazích a stále mít kam hrát. Může tedy vyhrát, ať Tonda hraje jakkoliv dobře.

Poznámky:
Tato úloha byla celkem jednoduchá na pochopení, ale naopak složitější na správné sepsání. Většina řešitelů se kromě Kubovy strategie nějak pokoušela formulovat, jak by měl hrát Tonda. To pak ale často vedlo k tomu, že řešitelé neprozkoumali všechny možnosti, jak se mohla hra vyvíjet. Obecně je v podobných úlohách zdlouhavé, nebo až nemožné, probrat všechny možnosti tahů, takže doporučuji vyvarovat se toho. Můžete si všimnout, že v autorském řešení všechno, co platí o Tondově tahu, platí o kterémkoliv Tondově tahu, ne jenom o některé možnosti.

Jedna věc mě při opravování pobavila: čtyři z celkem osmi řešitelů, kteří uvažovali rozdělení tabulky na 50 částí (jako vzorové řešení), udělali numerickou chybu. Stejnou numerickou chybu. Nechali jak Kubu, tak Tondu zabrat 50 částí (i když je jich 50 celkem). Na kvalitu řešení to nemělo vliv, ale že se to stane tolika lidem, to jsem nečekal.

(Jáchym Solecký)

Úloha 4.

Na šachovnici 8×8 je rozestavěno osm věží, které se vzájemně neohrožují. Pro každou dvojici věží změříme délku spojnice středů políček, na nichž tyto věže stojí. Dokažte, že některé dvě z těchto vzdáleností jsou nutně stejné.

(Lucien Šíma)

Řešení:
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že políčka šachovnice mají rozměry 1×1. Potom vzdálenost dvou věží spočítáme z Pythagorovy věty jako $\sqrt{r^2 + s^2}$, kde r je jejich řádková a s sloupcová vzdálenost.

Abychom na šachovnici 8×8 měli osm věží, které se vzájemně neohrožují, musí v každém sloupci stát právě jedna. Zaměříme se nyní na dvojice věží ležící v sousedních sloupcích. Těchto dvojic je zřejmě celkem sedm. Máme však pouze sedm možných různých vzdáleností mezi nimi: jsou to čísla ve tvaru $\sqrt{r^2 + 1}$, kde r je řádková vzdálenost z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (nemůže být nulová, jelikož pak by se ohrožovaly). Aby se vzdálenosti neopakovaly, musíme použít každou vzdálenost právě jednou – speciálně tedy existuje dvojice věží v sousedních sloupcích, které jsou od sebe vzdáleny $\sqrt{7^2 + 1^2}$.

Obdobné argumenty platí i pro řádky, tudíž dokážeme najít dvojici věží v sousedních řádcích mající sloupcovou vzdálenost sedm. Vzdálenost této dvojice věží je však také $\sqrt{1^2 + 7^2}$. Tudíž se nám podařilo najít dvě dvojice věží se stejnou vzdáleností. Tyto dvojice ale nemůžou být stejné, neboť věže z první dvojice leží v sousedních sloupích a věže z druhé v sloupcích, které jsou od sebe vzdálené sedm. Tím pádem jsme s důkazem hotovi.

Poznámky:
Úlohu vyřešili skoro všichni zcela správně. Většina řešitelů dokázala, že je více dvojic věží než možných vzdáleností, tudíž se musí nějaká vzdálenost z Dirichletova principu zopakovat.

(Lucien Šíma)

Úloha 5.

Kuba si chtěl hodit dvěma hracími kostkami, ale protože se nudil, tak nejdříve sundal z jejich stěn všechna čísla, dal je do klobouku a zamíchal. S jakou pravděpodobností hodil v součtu 7, pokud víme, že všech dvanáct čísel před hodem náhodně nalepil zpět na kostky (na každou stěnu jedno)?

(Kuba Krásenský)

Řešení:
Zkusme celý proces provést naopak – nejprve kostkami hodíme, a až poté na jejich stěny náhodně nalepíme čísla. Hledaná pravděpodobnost na pořadí těchto dvou podprocesů nezáleží, protože se navzájem nijak neovlivňují.

V tuto chvíli už jde skutečně jenom o to, jaká dvě čísla budou vylosována na vrchní stěny hozených kostek. Pokud na první kostku vylosujeme číslo a, tak mezi losovanými čísly je právě jedno číslo b, které s a dává součet 7. Toto b je různé od a, a tak se objeví ve zbytku čísel dvakrát. Tedy dvě z jedenácti možností jsou úspěšné, proto je výsledná pravděpodobnost $\frac{2}{11}$.

Poznámky:
S velmi originálním řešením přišla *Lenka Kopfová*, která nejprve určila pravděpodobnost, že padnou dvě jedničky, a z ní pak trikem určila hledanou hodnotu. Její postup byl složitější než ten náš, ale zase představoval jiný úhel pohledu. Příklad se dal i různými (ale značně pracnými) způsoby spočítat přes rozbor všech možností, jak se nalepí čísla a co na polepených kostkách padne.

(Zuzka Svobodová)

Úloha 6.

Na šachovnici 8×8 jsou zapsána čísla $1, \ldots, 64$, přičemž každá dvě po sobě jdoucí čísla leží na políčkách sousedících hranou. Jaký je nejmenší možný součet čísel na diagonále, která spojuje bílá rohová políčka?

(Honza Krejčí)

Řešení:
Představme si, že čísla zapisujeme na šachovnici postupně od 1 do 64. Vzhledem k tomu, že s políčkem jedné barvy sousedí hranou pouze políčka druhé barvy, musejí se barvy na cestě tvořené posloupností $1, \ldots, 64$ střídat. Tudíž všechna lichá čísla budou zapsána na jedné barvě a sudá na druhé. Součet nejmenších sedmi čísel zapsaných na bílou diagonálu tedy nemůže být menší než $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49$.

Zbývá odhadnout číslo největší. Všimněme si, že v okamžiku, kdy je zapsáno poslední číslo na bílou diagonálu, musí být již všechna pole na jedné její straně vyplněna. Pokud však spočteme počet polí na jedné straně bílé diagonály (včetně), zjistíme, že je tvoří 20 bílých a 16 černých polí. Jelikož se musejí barvy při vyplňování střídat, pro vyplnění 20. bílého pole jsme již museli vyplnit alespoň 19 černých, a tudíž je na tomto poli napsáno číslo větší nebo rovné $20 + 19 = 39$.

Pokud tedy spojíme oba odhady, dostáváme, že hledaný součet nemůže být menší než $39 + 49 = 88$. Tohoto součtu však lze dosáhnout – jedním z netradičních řešení je například následující vyplnění:

39	40	41	44	45	46	47	48
38	1	42	43	62	61	50	49
37	2	3	64	63	60	51	52
36	35	4	5	6	59	58	53
33	34	21	20	7	8	57	54
32	23	22	19	18	9	56	55
31	24	25	26	17	10	11	12
30	29	28	27	16	15	14	13

Poznámky:
Velká většina řešitelů přišla na jedno z mnoha optimálních řešení, nicméně důkaz toho, že neexistuje vyplnění lepší, byl pro většinu problém. Obvykle se objevovaly argumenty typu, že jednička musí být v rohu, že při vyplňování prvních třinácti čísel musíme pravidelně střídat strany podél diagonály, jinak by zbytek nešel vyplnit, apod. Vzorové řešení tyto domněnky vyvrací.

Dalším častým argumentem bylo tvrzení, že při vyplňování prvních sedmi polí diagonály musíme navštívit alespoň tři pole na každé její straně. To je sice pravda, ovšem toto tvrzení obvykle nebylo korektně zdůvodněno.

(Tomáš Novotný)

Úloha 7.

Mějme n-prvkovou množinu M a vyberme z ní n po dvou různých podmnožin. Dokažte, že existuje prvek $x \in M$ takový, že po jeho odebrání z každé z vybraných podmnožin, která ho obsahuje, získáme opět n různých množin.

(Kuba Löwit)

Řešení:

Aby po odebrání nějakého prvku nevzniklo n různých množin, tak se nějaké dvě množiny musely lišit právě o tento prvek a zbylé prvky musely mít stejné.

Předpokládejme pro spor, že existuje nějaká n-prvková množina M a jejích n po dvou různých podmnožin s vlastností, že pro libovolný prvek $x \in M$ existují dvě podmnožiny A, B takové, že A získáme z B odebráním prvku x.

Nakreslíme si graf, kde každou z uvažovaných množin reprezentujeme vrcholem a kde hrany nakreslíme následujícím způsobem: pro každý prvek $x \in M$ si vybereme právě jednu dvojici vrcholů, jejichž příslušné množiny se liší právě v x, a mezi ně nakreslíme hranu. Žádný vrchol jsme zcela jistě nespojili hranou se sebou samým. Dále jsme jednu dvojici podmnožin mohli spojit pouze jednou hranou (pokud se dvě množiny liší pouze o jeden prvek, pak je vyloučeno, aby se ještě lišily o nějaký jiný prvek). Jelikož má právě vyrobený graf n vrcholů a n hran, musí v něm již nutně existovat cyklus (na kterém leží alespoň tři vrcholy).

Nyní si na tomto cyklu vezměme dva sousední vrcholy X, Y. Protože jsme mezi ně nakreslili hranu, jim příslušné podmnožiny se liší o nějaký prvek a. BÚNO $a \in X$ a $a \notin Y$. Protože X, Y leží na jednom cyklu, vede mezi nimi ještě jedna cesta (která neobsahuje hranu mezi X a Y). Tato cesta přitom sestává z hran, z nichž žádná neznázorňuje odebrání či přidání prvku a – pro každý prvek z M jsme do grafu zakreslili právě jednu hranu a pro prvek a je tato hrana mezi již umístěna mezi vrcholy X a Y. Proto narážíme na spor – při průchodu z X do Y touto cestou jsme nemohli odebrat prvek a, přestože se o něj mají množiny příslušející vrcholům X, Y lišit.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámky:

Původní autorské řešení (a řešení *Matěje Doležálka*) využívalo n-rozměrnou hyperkrychli a tím naplňovalo souvislost úlohy s názvem série. Grafové řešení bylo nicméně elegantní a navíc o něco rychlejší.

(Marian Poljak)

Úloha 8.

Mějme nekonečnou krychličkovou síť plnou neobarvených krychliček. Filip a Rado hrají hru. Filip začíná a oba hráči se střídají v tazích. Filipův tah spočívá v obarvení dosud nezabarvené krychličky na červeno. Rado ve svém tahu vybere celou rovinnou vrstvu krychliček (kolmou na jednu ze tří os prostoru), v níž žádná krychlička není červená, a obarví je všechny na modro. Rozhodněte, pro která n může Filip nezávisle na Radových tazích dosáhnout stavu, kdy bude existovat n červených sousedících krychliček ve směru některé z os prostoru.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Úloha se na první pohled tváří, že Filip nemá šanci obarvit více než pár krychliček a že je Rado vždy schopen zablokovat jeho libovolný pokus pomocí svých šesti tahů, které by Filipovu konstrukci omezily ze všech stran. Ukážeme ale, že situace pro Filipa není tak bezvýchodná a že dovede obarvit n sousedících krychliček pro libovolné n.

K tomu se nám bude hodit nad hrou Filipa a Rada uvažovat trochu jinak. Zavedeme takzvanou *osovou variantu* hry – jejím hracím plánem budou pouze samotné číselné osy x, y, z. Filipův tah, v němž obarví krychličku (i, j, k), odpovídá v osové variantě obarvení bodu i na ose x, j na ose y a k na ose z, přičemž žádný z těchto bodů nesmí být už obarvený na modro (tzn. musí být buď neobarvený, nebo již červený) a alespoň jeden musí být nezabarvený. Při znovuobarvení tří červených bodů by totiž tah odpovídal obarvení již červené krychličky, což odporuje zadání. Také to ale nedává smysl pro Filipovu strategii – uvidíme, že snaha o obarvování dosud nezabarveného bodu na každé z os (což odpovídá obarvení krychličky, která neleží v žádné rovinné vrstvě s dosud obarvenými červenými krychličkami) přinese Filipovi ovoce. Radův tah v osové hře vypadá překvapivě skromně – kdykoliv se Rado rozhodne obarvit rovinu kolmou na některou z os protínající tuto osu v její i-té krychličce, v osové variantě to odpovídá obarvení bodu i na této ose. Rado nesmí vybrat rovinnou vrstvu krychliček, ve které je nějaká krychlička červená – přeloženo do osové hry, Rado smí během svého tahu obarvovat modře jen dosud neobarvené body.

Snadným postřehem nyní je, že pokud Filip zvládne v osové hře docílit stavu, kdy je na nějaké ose (říkejme, že je *obsazená*) n po sobě jdoucích bodů obarvených načerveno, nemůže jej již nic zastavit od výhry v původní hře. Rado v tomto případě totiž nemůže v onom červeném pásmu obarvit žádnou rovinu kolmou na obsazenou osu. Filipovi tedy stačí vybrat libovolnou červenou krychličku příslušející červenému pásmu a barvit ve směru obsazené osy až ke koncům pásma. Tím docílí n červených sousedících krychliček a zvítězí.

Jinými slovy můžeme říct, že dosáhne-li Filip posloupnosti n po sobě jdoucích červených bodů v osové hře, pak vyhraje. Navíc vidíme, že v osové hře Filip dělá při každém tahu až tři obarvení dosud neobarvených bodů, zatímco Rado jen jedno. To dává dobrou intuici, že díky této nerovnoměrnosti tahů Filip dokáže červeně obarvit sekvenci n po sobě jdoucích bodů.

Hlavní část důkazu, že se Filipovi povede vyhrát pro libovolné n, provedeme matematickou indukcí. Nejdříve zadefinujme pojem *k-sekvence* označující posloupnost k bezprostředně po sobě jdoucích červeně obarvených bodů na nějaké jedné ose v osové hře. Dále každou takovou k-sekvenci po sobě jdoucích červených bodů nazveme *neomezenou*, pokud není modře obarvený žádný bod na této ose ve vzdálenosti až do $2n+1$ od obou jejích konců. Aneb je-li nějaká k-sekvence neomezená, tak má šanci být Filipem rozšířena na n-sekvenci, nezasáhne-li do tohoto rozšiřování Rado. Říkejme, že Rado svým tahem *omezí* nějakou k-sekvenci, pokud obarví modře nějaký bod, kterým poruší její neomezenost.

Lemma. *Pro libovolná přirozená čísla m, ℓ, kde $m \leq n$, Filip dovede vytvořit v osové hře ℓ neomezených m-sekvencí ležících na jedné ose.*

Důkaz. Indukcí podle m. Nejdříve uvažujme základní případ $m = 1$. Filip udělá $\lceil 1, 5\ell \rceil$ obarvení, přičemž si bude dávat pozor, aby každé dva červené body v osové hře oddělovala dostatečně velká vzdálenost, např. $1000n + 1000$. Jinak řečeno, bude tahy obarvovat body velmi daleko od sebe, aby později při rozšiřování těchto 1-sekvencí na více-sekvence nedal Radovi možnost omezit více než jednu z nich za tah. Takhle umístí v osové hře celkem $3 \cdot \lceil 1, 5\ell \rceil$ červených bodů (1-sekvencí), přičemž Rado dovede vzhledem k jejich „velkým“ vzdálenostem omezit nejvýše $\lceil 1, 5\ell \rceil$ z nich. Tím Filipovi zbude alespoň 3ℓ neomezených 1-sekvencí, přičemž z Dirichletova principu musí na nějaké z os ležet alespoň ℓ z nich. Tím je základní případ dokončen.

Nyní dokážeme indukční krok – předpokládejme, že umíme docílit stavu, kdy je na nějaké z os (BÚNO na ose x) $\left\lceil \frac{3\ell(m+1)}{2} \right\rceil$ neomezených m-sekvencí, a dokažme, že pomocí nich dovedeme vytvořit ℓ neomezených $(m+1)$-sekvencí. To může Filip zajistit opakováním následujících $m+1$ tahů – vždy se pokusí v libovolném směru prodloužit stávající neomezenou m-sekvenci na $(m+1)$-

sekvenci, přičemž zároveň bude těmito tahy postupně stavět nové sekvence na osách y, z. Během provedení těchto $m+1$ tahů tedy Filip (ignorujme na chvíli Radovo barvení) vytvoří $m+3$ nových $(m+1)$-sekvencí. Každým svým tahem totiž vytvořil novou sekvenci délky $m+1$ na ose x a pomocí všech $m+1$ tahů postavil na osách y, z dvě zbrusu nové $(m+1)$-sekvence. Rado může ve svých $m+1$ tazích (vzhledem k dostatečným vzdálenostem m-sekvencí od sebe) omezit nejvýše $m+1$ z nich. Proto během těchto $m+1$ tahů Filip vytvoří i přes Radovu snahu dvě nové neomezené $(m+1)$-sekvence na některé z os. Díky indukčnímu předpokladu začínáme s $\left\lceil \frac{3\ell(m+1)}{2} \right\rceil$ neomezenými m-sekvencemi. Proto může Filip zahrát $3\ell/2$-krát těchto $m+1$ tahů, čímž vytvoří na osách dohromady 3ℓ neomezených $(m+1)$-sekvencí, a tudíž opět z Dirichletova principu můžeme říct, že alespoň ℓ z nich je na společné ose. Tím je důkaz lemmatu ukončen.

Nyní je již důkaz zřejmý – pomocí postupu v lemmatu jsme schopní pro každé zadané n vytvořit libovolně mnoho sekvencí délky menší nebo rovné n na některé z os. Filipovi k vítězství v osové hře stačí jediná n-sekvence. A již víme, že po vyhrání osové hry Rado nemůže Filipovi nijak zabránit ve vítězství celé hry. Tím je hotovo.

Poznámky:

Ačkoliv správná řešení dorazila pouze od *Matěje Doležálka* a *Josefa Minaříka*, gratuluji všem, kteří se tohoto těžkého příkladu nezalekli. Pro vyřešení úlohy bylo potřeba se odpoutat od strategie, při které si Filip postupně staví kompaktní útvar z kostiček blízko u sebe a kterou Rado dovede zničit v šesti tazích. Představíme-li si takovou strategii v osové hře, je rychle vidět, že blízkost kostiček hraje Radovi do karet a že nebude potřebovat mnoho tahů na omezení takové celistvé struktury. Naopak, čím větší vzdálenost kostiček od sebe Filip zvolí, tím méně dovolí Radovi omezovat naráz více než jednu sekvenci a tím více si bude tvořit nových neomezených sekvencí, namísto toho aby „plýtval“ kostičky do těch již omezených. Nutno také poznamenat, že hodně číselných výrazů v důkazu se dá nahradit slovy „dostatečně daleko“ (např. $5n$ a $2n+1$ u definice omezenosti).

(Marian Poljak)

Algebra

3. jarní série Vzorové řešení

Úloha 1.

Želvičce Zuzce se o jejích 28. narozeninách vylíhlo z vajíčka první želvátko a další potomci se jí líhli postupně o každých dalších narozeninách – tedy druhé želvátko o 29. narozeninách, třetí o 30. narozeninách atd. Pomozte jí zjistit, zda (a případně kdy) bude mít na narozeninovém dortu stejně svíček jako všechna její želvátka dohromady.

(David Hruška)

Řešení:

Po jednom roce, tedy až Zuzce bude 29, se jí narodí druhé želvátko a první zestárne o rok. Součet věků želvátek tedy bude $0 + 1 = 1$. Za další rok se opět narodí další želvátko a ostatní zestárnou. Máme tedy 3 želvátka s věky postupně 0, 1 a 2 roky, což znamená, že na dortu budou mít celkem 3 svíčky.

Obecně po n letech od Zuzčiných 28. narozenin máme celkem $n+1$ želvátek s věky postupně 0, 1, $\ldots$, n let. Součet jejich věků snadno spočítáme jako součet aritmetické posloupnosti[2] a dostaneme, že želvátka mají na dortech dohromady $\frac{n(n+1)}{2}$ svíček. V tu samou chvíli je Zuzce $28 + n$ let. Tyto dva výrazy dáme do rovnosti a výslednou rovnici řešíme v oboru přirozených čísel, protože narozeniny se konají pouze jednou ročně a Zuzka nemládne.

$$\frac{n(n+1)}{2} = 28 + n$$

Rovnici upravíme do tvaru $n^2 - n - 56 = 0$.

Řešením této kvadratické rovnice jsou čísla $n = -7$, které ale není přirozené a není tedy odpovědí na otázku ze zadání, a $n = 8$. Za 8 let tedy bude mít Zuzka na dortu stejný počet svíček, jako všechna želvátka dohromady, a to 36.

Poznámky:

Úloha byla opravdu jednoduchá a téměř všechna došlá řešení byla správná. V některých řešeních chyběla zmínka o tom, že řešení $n = -7$ nevyhovuje zadání a toto řešení bylo prostě vynecháno. Body jsem za to nestrhával, ale pokud nějaké řešení nevyhovuje podmínkám zadání, tak by se to v řešení určitě mělo objevit. Taky se objevila řešení, která k výsledku došla postupným zkoušením čísel. To v tomto konkrétním případě fungovalo, protože výsledek byl poměrně malé číslo, ale pokud by byl větší, tak se k němu tímto způsobem už tak snadno nedostanete.

(Michal Töpfer)

[2] https://matematika.cz/posloupnosti#soucet-clenu-aritmeticke-posloupnosti

Úloha 2.

Marian našel dvě reálná čísla x, y, pro která platí následující vztahy:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 900,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 45.$$

Jaký je součin těchto čísel?

(Marian Poljak)

Řešení:
Nejprve si upravíme první rovnici tak, abychom na jedné straně dostali rozdíl dvou druhých mocnin. Ten pak rozložíme dle vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = 900$$
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - x^2y^2 = 900$$
$$\left(x^2 + xy + y^2\right)\left(x^2 - xy + y^2\right) = 900$$

Do závorek dosadíme druhou rovnici a vyjádříme xy:

$$45\,(45 - 2xy) = 900,$$
$$45 - 2xy = 20,$$
$$xy = \frac{25}{2}.$$

Součin čísel x a y tedy musí být roven $\frac{25}{2}$.

Poznámky:
Velmi mile jste nás překvapili, neboť všechna došlá řešení byla správně. Většina řešení postupovala obdobně jako řešení vzorové. Pár z vás hledalo i konkrétní dvojice (x, y), které jsou řešeními zadané soustavy, což ale nebylo nutné, neboť jsme se ptali pouze na to, jaký musí být jejich součin.

(Tomáš Novotný)

Úloha 3.

Pro kladná reálná čísla x, y platí $xy \geq x + y$. Ukažte, že pak $x + y \geq 4$.

(David Hruška)

Řešení:
Při důkazu vyjdeme z platné nerovnosti, kterou dále upravujeme:

$$(x - y)^2 \geq 0,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0,$$
$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy,$$
$$(x + y)^2 \geq 4xy.$$

Nyní použijeme předpoklad zadání $xy \geq x + y$, tedy $4xy \geq 4(x + y)$:

$$(x + y)^2 \geq 4xy \geq 4(x + y),$$
$$(x + y)^2 \geq 4(x + y),$$
$$(x + y) \geq 4.$$

V předposledním řádku můžeme nerovnici bez problémů výrazem $(x + y)$ vydělit, protože ze zadání víme, že x, y jsou kladná čísla, tedy i jejich součet bude kladný a znaménko nerovnosti se tím nezmění. Takto jsme z počáteční platné nerovnosti a podmínky zadání odvodili požadovaný vztah $(x + y) \geq 4$.

Poznámky:
Postup vzorového řešení, který byl asi nejpřímější cestou k cíli, volilo relativně málo řešitelů. Většina buď používala AG nerovnost, nebo vyjádření jedné proměnné z podmínky zadání. Problematické někdy byly úpravy nerovnic, u kterých by při násobení a dělení nějakým výrazem mělo být zdůrazněno, že výraz je nezáporný a nemění tak znaménko nerovnosti. U chybných řešení bylo časté tvrzení, že aby byla splněna podmínka zadání, x i y musí být větší než 2, což není pravda.

(Karolína Kuchyňová)

Úloha 4.

Kuba má kladná reálná čísla a, b, c. V závislosti na nich by chtěl najít všechna reálná řešení x rovnice

$$\sqrt{ax+b}+\sqrt{bx+c}+\sqrt{cx+a}=\sqrt{a-bx}+\sqrt{b-cx}+\sqrt{c-ax}.$$

Ukojte jeho zvědavost.

(Kuba Löwit)

Řešení:
Předně si uvědomme, že $x=0$ je určitě řešením rovnice pro libovolná kladná a, b, c. Vskutku, jistě platí, že $\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$.

Nyní se na rovnici podívejme z dálky a povšimněme si, že na levé straně máme funkci rostoucí v x na celém svém definičním oboru. To proto, že funkce $\sqrt{x}$ a $ax+b$ jsou rostoucí, dále složení dvou rostoucích funkcí je rostoucí funkce a součet rostoucích funkcí je zase rostoucí. Obdobně pravá strana rovnice je klesající v x na celém svém definičním oboru, protože funkce $a-bx$ je klesající, a tedy i $\sqrt{a-bx}$ je klesající kvůli tomu, že složením rostoucí a klesající funkce dostaneme klesající funkci. Konečně součet klesajících funkcí je opět klesající.

Teď už jsme skoro hotovi. Libovolná rovnice $f(x)=g(x)$ pro rostoucí f a klesající g totiž může mít nejvýše jedno řešení. Pokud jsme už totiž nalezli x takové, že $f(x)=g(x)$ a teď uvážíme nějaké $y>x$, máme $f(y)>f(x)$, ale $g(y)<g(x)$, tedy $f(y)>g(y)$. Žádné $y>x$ tedy již není řešením rovnice a z obdobné úvahy plyne, že ani žádné $y<x$ nemůže být řešením. Nalezené řešení $x=0$ je tedy nutně jediným řešením rovnice.

Poznámky:
Někteří z vás si úlohu mírně zkomplikovali tím, že rovnici řešili v oboru komplexních čísel, neboli uvažovali i případ, kdy je pod nějakou odmocninou záporný výraz. S odmocninami v oboru komplexních čísel musí být člověk vždy opatrný – zatímco v reálných číslech odmocninou z a myslíme kladné řešení rovnice $x^2=a$, v komplexním světě často nemusí být jasné, které ze dvou možných řešení této rovnice si vybrat. Pokud jednoduše pro každé kladné a dosadíme za $\sqrt{-a}$ výraz $i\cdot\sqrt{a}$, není těžké si rozmyslet, že i v tomto případě má rovnice stále jediné řešení.

(Vašek Rozhoň)

Úloha 5.

Na rovném telegrafním drátu sedí n holubů a n holubic. Dokažte, že součet všech vzdáleností mezi ptáky různého pohlaví je větší nebo roven součtu všech vzdáleností mezi ptáky stejného pohlaví.[3]

(Kuba Löwit)

Řešení:
Vzdialenosť medzi ľubovolnými dvoma vtákmi sa dá zapísať ako súčet vzdialeností medzi niektorými susediacimi vtákmi. Preto nám stačí ukázať, že každý úsek susediacich vtákov sa započíta do súčtu vzdialeností rôzneho pohlavia viackrát ako do súčtu vzdialeností rovnakých pohlaví. Zvoľme si teda nejaký úsek medzi dvoma susediacimi vtákmi. Počet holubíc naľavo od neho (vrátane ľavého konca

[3] Vzdálenost dvou konkrétních opeřenců započítáváme právě jednou.

úseku, ak je to treba) označíme X. Potom počet holubíc napravo od úseku (vrátane pravého konca úseku, ak je to treba) bude $n - X$. Podobne označíme počet holubov naľavo od daného úseku Y a potom počet holubov napravo od úseku je $n - Y$. Daný úsek sa započíta do vzdialenosti dvoch vtákov práve vtedy, ak sú na rôznej strane od úseku. Teda do súčtu vzdialeností vtákov rôzneho pohlavia sa úsek započíta $X(n-Y)+Y(n-X)$ a do súčtu vzdialeností vtákov rovnakého pohlavia sa započíta $X(n-X)+Y(n-Y)$.

Ďalej vieme, že platí

$$\begin{aligned}(X-Y)^2 &\geq 0,\\ -2XY &\geq -X^2-Y^2,\\ Xn-XY+Yn-XY &\geq Xn-X^2+Yn-Y^2,\\ X(n-Y)+Y(n-X) &\geq X(n-X)+Y(n-Y).\end{aligned}$$

A teda naozaj je daný úsek započítaný viackrát do súčtu vzdialeností medzi vtákmi rôzneho pohlavia ako do súčtu vzdialeností medzi vtákmi rovnakého pohlavia.

Poznámky:
Väčšina riešiteľov postupovala rovnako ako vzorové riešenie alebo indukciou. Našli sa aj takí, ktorí do istej miery rozoberali možnosti. Táto cesta ale prináša veľa úskalí, pretože tvrdenie je treba ukázať pre ľubovolné n a ľubovolné rozloženie holubov na drôte, takže rozobratie všetkých možností jednu po jednej je nemožné. Na druhej strane ak rozoberiete nejaké možnosti, je treba dobre dokázať, prečo ostatné môžeme vynechať. A to býva spravidla rovnako obtiažne ako sama úloha.

(Marta Kossaczká)

Úloha 6.

Madam Verča si do řady napsala celá čísla, která tvoří nekonečnou nekonstantní aritmetickou posloupnost[4]. Mezi některá z nich pak Lucien napsal středníky. Následně vytvořil novou nekonečnou posloupnost, přičemž první člen získal sečtením čísel od začátku aritmetické posloupnosti po první středník, druhý člen sečtením čísel mezi prvním a druhým středníkem a tak dále. Může tato nově vzniklá posloupnost být geometrická[5]?

(Rado van Švarc)

Řešení:
Ano, může. Verča si mohla napsat například aritmetickou posloupnost 1, 2, 3, ... Potom Lucienovi stačí napsat středník za každé (zjevně celé) číslo tvaru $\frac{3^k-1}{2}$, kde k je kladné celé číslo. Potom totiž bude součet čísel před k-tým středníkem roven

$$1+2+\cdots+\frac{3^k-1}{2}=\frac{\left(\frac{3^k-1}{2}\right)\left(\frac{3^k+1}{2}\right)}{2}=\frac{9^k-1}{8},$$

a tedy součet čísel mezi k-tým a $(k+1)$-ním středníkem je

$$\frac{9^{k+1}-1}{8}-\frac{9^k-1}{8}=\frac{\left(9\cdot 9^k-1\right)-\left(9^k-1\right)}{8}=9^k.$$

Protože zároveň součet čísel před prvním středníkem je $\frac{9^1-1}{8}=1=9^0$, je takto vzniklá posloupnost geometrická s výchozím členem 1 a keoficientem 9.

[4]Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří aritmetickou posloupnost, pokud existuje d takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + d$. Posloupnost je nekonstantní, pokud $d \neq 0$.

[5]Řekneme, že čísla $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tvoří geometrickou posloupnost, pokud existuje q takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = q \cdot a_n$.

Poznámky:
Řešení se bohužel sešla pouze tři, a jen dvě z nich byla správně. Vzorové řešení sice vypadá lehce, ale vlastně je dosti trikové. Vymyslet se dá zkoumáním vzorců pro součty aritmetických řad.

(Rado van Švarc)

Úloha 7.

Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna **iracionální čísla** *x, y vztah*

$$f(xy) = f(x + y).$$

(Kuba Löwit)

Řešení:
Nechť t je v celém důkazu kladné iracionální číslo.

Číslo $\sqrt{t}$ je rovněž kladné a iracionální. Toto tvrzení snadno nahlédneme sporem. Pokud by $\sqrt{t} \in \mathbb{Q}$, potom $\sqrt{t} = \frac{k}{l}$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$, a tedy $t = \frac{k^2}{l^2} \in \mathbb{Q}$.

Dosazením $\left(x = -\sqrt{t}, y = \sqrt{t}\right)$ do funkcionální rovnice dostaneme, že

$$f(-t) = f\left(-\sqrt{t}\sqrt{t}\right) = f(xy) = f(x + y) = f\left(-\sqrt{t} + \sqrt{t}\right) = f(0).$$

Každá vyhovující funkce f tedy splňuje, že pro všechna záporná iracionální čísla je funkční hodnota rovna $f(0)$.

Volbou $\left(x = -\sqrt{t}, y = -\sqrt{t}\right)$ získáme, že

$$f(t) = f\left(\left(-\sqrt{t}\right) \cdot \left(-\sqrt{t}\right)\right) = f(xy) = f(x + y) = f\left(-\sqrt{t} - \sqrt{t}\right) = f\left(-2\sqrt{t}\right).$$

Číslo $-2\sqrt{t}$ je zřejmě záporné a iracionální, a tak z první odvozené rovnosti víme, že

$$f(t) = f\left(-2\sqrt{t}\right) = f(0).$$

Každá vyhovující funkce f tedy nabývá na všech iracionálních číslech hodnoty $f(0)$.

Nechť $q \in \mathbb{Q}$, potom můžeme dosadit $\left(x = q - \sqrt{2}, y = \sqrt{2}\right)$.

$$f(q) = f\left(q - \sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = f(x + y) = f(xy) = f\left(\left(q - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}\right) = f\left(q\sqrt{2} - 2\right).$$

Číslo $q\sqrt{2}$ je iracionální, takže je iracionální i číslo $q\sqrt{2} - 2$. Tudíž platí, že

$$f(q) = f\left(q\sqrt{2} - 2\right) = f(0).$$

Každá vyhovující funkce f musí pro každé $x \in \mathbb{R}$ splňovat, že $f(x) = f(0)$. Musí se tedy jednat o konstantní funkci. Každá konstantní funkce pak rovnici vyhovuje. Řešením jsou tedy právě funkce $f(x) = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Poznámky:
Většina řešení byla podobná vzorovému. Několik lidí použilo substituci $(x = q - \pi, y = \pi)$ pro $q \in \mathbb{Q}$. Pak ale bylo složitější vysvětlit, proč je výraz $xy = q\pi - \pi^2$ iracionální číslo. *(Martin Hora)*

Úloha 8.

Jsou dána tři různá nenulová reálná čísla a, b a c. Dále víme, že polynomy

$$ax^3 + bx + c,$$
$$bx^3 + cx + a,$$
$$cx^3 + ax + b$$

mají společný kořen. Dokažte, že alespoň jeden z těchto polynomů má tři reálné kořeny, počítáme-li je včetně násobnosti.

(Rado van Švarc, Kuba Löwit, David Hruška)

Řešení:

Označme polynomy ze zadání postupně jako p, q, a r a jejich společný kořen jako k. Povšimněme si, že $p(1) = q(1) = r(1) = a + b + c$ a $p(k) = q(k) = r(k) = 0$.

Nyní budeme chtít říct, že je jenom jeden bod, pro který mají všechny tři polynomy stejnou hodnotu. To uděláme tak, že vezmeme jejich rozdíly (které jsou pro každý takový bod nulové) a vhodně je nakombinujeme tak, aby nám zmizel nejvyšší člen, čímž (díky tomu, že nemáme žádné kvadratické členy) zbude pouze lineární polynom, který už nemůže mít dvě různé nuly. Zkusme toto udělat pořádně:

Nechť $s(x) = (b - c)(p(x) - q(x)) - (a - b)(q(x) - r(x))$. Tento polynom je nanejvýše lineární (všechny členy vyššího stupně zmizí, protože koeficient u x^3 je $(b - c)(a - b) - (a - b)(b - c) = 0$). Protože p, q, a r mají v 1 i v k všechny stejnou hodnotu (v 1 mají všechny hodnotu $a + b + c$ a v k mají všechny hodnotu 0), může být $k \neq 1$ jen, když je s konstantně nulový. Ukážeme, že konstantně nulový není.

Kdyby byl, tak je $s(0) = 0$. Jinými slovy pokud si označíme $\alpha = b - c$ a $\beta = c - a$, pak platí $0 = s(0) = \alpha\beta - (\alpha + \beta)^2 = -(\alpha + \frac{\beta}{2})^2 - 3\left(\frac{\beta}{4}\right)^2$, což může nastat pouze tehdy, když $\alpha = \beta = 0$, neboli $a = b = c$, což ze zadání neplatí. Proto s není konstantně nulový polynom, a tedy $k = 1$, a proto i $a + b + c = p(1) = 0$.

Protože a, b i c jsou nenulová, musí nějaká dvě z nich mít stejné znaménko. Z cykličnosti nechť jsou to BÚNO a a b. Protože 1 je kořenem $q(x)$, dá se z q vytknout $(x-1)$ – z podmínky $a+b+c = 0$ plyne $q(x) = bx^3+cx+a = bx^3-(a+b)x+a = (x-1)(bx^2+bx-a)$. Ovšem diskriminant bx^2+bx-a je $b^2 + 4ab > 0$ (protože a a b mají stejné znaménko), tedy tento kvadratický polynom jde rozdělit na dva lineární polynomy s reálnými koeficienty. Proto lze q rozložit na tři lineární polynomy s reálnými koeficienty, a tedy má tři reálné kořeny, počítáme-li je včetně násobnosti.

Poznámky:

Úloha zaručeně patřila mezi jednodušší osmičky – kdo dost dlouho upravoval rovnice a dával pozor na nerovnosti, nakonec se k řešení dopracoval.

(Rado van Švarc)

Finální myšmaš

4. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

(a) *David má doma v řadě za sebou položených pět krabic. Každou noc spí v jedné z nich, ale odmítá komukoli říct ve které. David moc rád vstává brzo, a protože jak známo ranní ptáče dál doskáče, každé ráno přeskočí do sousední krabice, ve které zůstane až do následujícího rána. Kačka by ráda Davida zase spatřila. Každé poledne se může podívat do jedné z krabic a zjistit, jestli v ní David je. Nalezněte strategii, díky níž Kačka časem otevře krabici, ve které se David zrovna schovává.* *(Rado van Švarc)*

(b) *Bitevní pole má tvar tabulky $n \times n$, kde n je přirozené číslo. Na každém políčku před bitvou stojí jeden vojín. Vojáci se nepohybují, v průběhu bitvy ale můžeme opakovaně provádět následující taktickou operaci – vybereme si libovolné políčko a na všech políčkách sousedících s ním hranou (ale ne v něm samotném) všechny vojíny povýšíme na generály a všechny generály naopak degradujeme na vojíny. Určete, pro která n lze docílit toho, aby po bitvě byl každý generálem.*

(Marian Poljak)

Řešení:

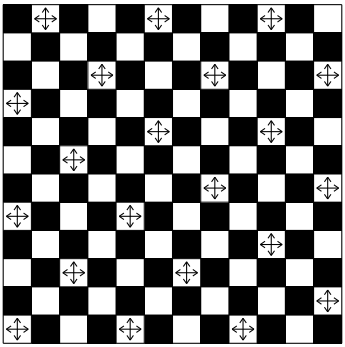
(a) Očíslujeme krabice 1 až 5. Uvědomíme si, že pokud David spal danou noc v sudé krabici, pak následující noc přeskočí do liché krabice. Obdobně to platí, i když bude spát v liché krabici. David tedy každý den změní paritu krabice, ve které se nachází.

Nejprve budeme předpokládat, že byl David první den v sudě očíslované krabici. Kačka se proto podívá do krabice s číslem dva. Pokud v ní není, musel být ve čtvrté krabici. Druhý den ho proto očekáváme ve třetí nebo v páté krabici. Kačka se podívá do třetí krabice, a pokud tam David není, víme, že je v páté krabici a následující den se přemístí do čtvrté. Kačka se do ní tedy následující den podívá. Pokud Kačka doposud Davida nenašla, byl náš počáteční předpoklad chybný a David byl první den v liché krabici. Nyní je již jisté, že v tuto chvíli je v sudé krabici, a Kačka jen zopakuje stejný postup.

(b) Nejprve ukážeme, že pro liché n neumíme zajistit, aby po bitvě byl každý generálem. Podíváme se na vojíny na jedné z hlavních úhlopříček. Těch je lichý počet. Označíme a počet vojínů a b počet generálů na diagonále. Vždy, když vybereme políčko vedle hlavní diagonály, změní se (a, b) na

(i) $(a-2, b+2)$, pokud vedle zvoleného políčka byli dva vojíni;
(ii) (a, b), pokud vedle zvoleného políčka byl jeden vojín a jeden generál;
(iii) $(a+2, b-2)$, pokud vedle zvoleného políčka byli dva generálové.

Na počátku jsme ve stavu $(n, 0)$, a abychom povýšili všechny vojíny na generály, museli bychom dosáhnout stavu $(0, n)$. Protože je n liché a my umíme a změnit pouze přičtením nebo odečtením dvojky, bude první číslo vždy liché, takže požadovaného stavu nikdy dosáhnout nemůžeme.



Stačí již jen ukázat, že pro sudá n existuje provedení taktických operací tak, aby se všichni vojíni generály stali.

Abychom to ukázali, obarvíme si pole jako šachovnici. Protože černá políčka sousedí pouze s bílými políčky, vybereme-li černé políčko, změníme vojíny na generály (a naopak) pouze na bílých políčkách. Obdobně to platí i při vybrání bílého políčka. Umíme-li změnit všechny vojíny stojící na bílých políčkách na generály, pak umíme změnit i všechny vojíny na černých políčkách na generály. Stačí pouze provést tahy pootočeně o 90° kolem středu.

Vybereme směr úhlopříček tak, aby úhlopříčky délky jedna na krajích byly bílé. Bílých úhlopříček v tomhle směru je n a černých $n-1$. Na každé liché bílé úhlopříčce vybereme všechna lichá políčka, tedy začneme krajním (je jedno z jakého konce), vždy jedno přeskočíme a následující vybereme, dokud nedojdeme na druhý konec. Protože mají bílé úhlopříčky vždy lichou délku, vybereme první i poslední políčko na každé úhlopříčce.

Každá černá úhlopříčka sousedí s právě dvěma bílými úhlopříčkami, tedy s právě jednou lichou bílou úhlopříčkou. Každé políčko na černé úhlopříčce sousedí buď se dvěma bílými políčky na liché úhlopříčce, nebo s jedním krajním políčkem na liché úhlopříčce. Celkově při takovém výběru políček sousedí každé černé políčko s právě jedním vybraním políčkem.

(„madam Verča“ Hladíková)

Úloha 2.

(a) *Rado vyhrál v tombole několik tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Pro každé dvě jeho množiny A a B, které nejsou stejné, platí $|A \cap B| \leq 1$. Dokažte, že Rado nemá víc než $\frac{n(n-1)}{6}$ množin.* *(Rado van Švarc)*

(b) *Od své výhry v tombole Rado nepřestal o oné množině $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ přemýšlet. Proto se jeho rodiče rozhodli, že mu její co největší podmnožinu X zakážou. Zároveň mu ale nechtěli zkazit radost z výhry, a tak se dohodli, že zakážou jen takové prvky, aby žádná z Radových tříprvkových podmnožin neměla všechny své prvky zakázané. Dokažte, že mohou vybrat podmnožinu X s alespoň $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ prvky.*[6] *(Marian Poljak)*

Řešení:

(a) Každá dvojice prvků může být jen v jedné tříprvkové množině. Zároveň pro každou trojici platí, že v ní jsou tři různé dvojice prvků.

Protože možných dvojic je celkem $\binom{n}{2}$, žádná není ve dvou trojicích a v každé trojici jsou tři, může trojic být nanejvýš $\frac{1}{3}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{6}$.

(b) Pro spor předpokládejme, že rodiče správně zakázali m prvků, $m \leq \sqrt{2n} - 1$, a žádné další prvky už zakázat nemohou, aby tím nezakázali žádnou trojici celou.

[6] Pro $x \in \mathbb{R}$ značíme $\lfloor x \rfloor$ dolní celou část čísla x, tedy největší přirozené číslo, které není větší než x.

To, že žádný další prvek zakázat nemohou, znamená, že každý prvek množiny buď již zakázaný je, a nebo je v trojici s nějakými dvěma již zakázanými prvky. Zároveň však každá již zakázaná dvojice určuje nanejvýše jeden prvek, který je s ní v nějaké trojici. Takže prvků, které ještě nejsou zakázané, je nanejvýš tolik jako dvojic zakázaných prvků, neboli $\binom{m}{2}$. To znamená, že $n \leq m + \binom{m}{2}$.

Po úpravě dostáváme, že platí $(m+1)m \geq 2n$. Ale pokud $m \leq \sqrt{2n} - 1$, tak $(m+1)m \leq \sqrt{2n}\left(\sqrt{2n} - 1\right) < 2n$, což je spor.

Poznámky:
Většina z vás si troufla jen na první úlohu. Měli jste ji většinou dobře. *(Kuba Svoboda)*

Úloha 3.

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a bod Q uvnitř něj. Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených z bodu Q na strany BC, AC, AB. Ukažte, že obě trojice trojúhelníků AP_cQ, BP_aQ, CP_bQ a P_cBQ, P_aCQ, P_bAQ

(a) *mají stejný součet obsahů,*

(b) *mají stejný součet poloměrů kružnic vepsaných.* *(Kuba Löwit)*

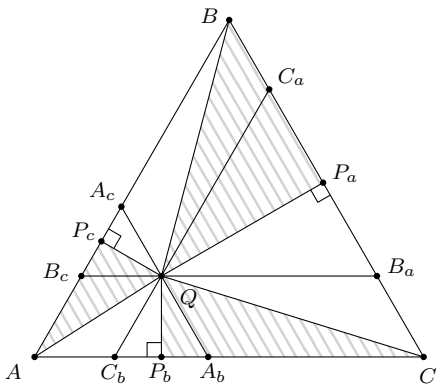
Řešení:

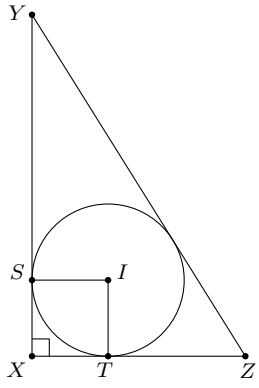
(a) Bodem Q vedeme rovnoběžku se stranou AC, která protne strany AB a BC v bodech B_c a B_a. Analogicky sestrojíme body A_b, A_c, C_a a C_b.

Díky souhlasným úhlům u rovnoběžek víme, že trojúhelník A_bQC_b je rovnostranný. Přímka QP_b je jeho výškou, takže ho dělí na dvě části o stejném obsahu. Tedy, pokud budeme obsah trojúhelníku XYZ značit jako $[XYZ]$, platí $[A_bP_bQ] = [C_bP_bQ]$ (a analogicky také $[B_aP_aQ] = [C_aP_aQ]$ a $[A_cP_cQ] = [B_cP_cQ]$).

Čtyřúhelník QA_cBC_a je rovnoběžník, takže jeho úhlopříčka ho dělí na dvě stejné části. Proto platí $[QA_cB] = [QC_aB]$ (a analogicky také $[QA_bC] = [QB_aC]$ a $[QC_bA] = [QB_cA]$).

Tímto jsme pokryli trojúhelník šesti útvary – třemi rovnoramennými trojúhelníky a třemi rovnoběžníky – takovými, že každý leží z půlky ve sjednocení první trojice trojúhelníků a z druhé půlky ve sjednocení druhé. Tím pádem mají tyto trojice stejný součet obsahů.





(b) Nejprve si všimněme, že kdykoliv je XYZ pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u X, pak poloměr jeho kružnice vepsané je roven $\frac{|XY|-|YZ|+|ZX|}{2}$. Tomu je tak proto, že pokud si dotyky kružnice vepsané se stranami XY a XZ označíme jako S a T a střed kružnice vepsané jako I, pak je $XSIT$ čtverec, a tedy poloměr kružnice vepsané bude dle známého vzorce pro vzdálenost mezi vrcholem a dotykem kružnice vepsané roven $|XT| = \frac{|XY|-|YZ|+|ZX|}{2}$.

Proto je součet poloměrů kružnic vepsaných AP_cQ, BP_aQ, CP_bQ roven

$$\frac{1}{2}\left(|AP_c| + |BP_a| + |CP_b| + |QP_a| + |QP_b| + |QP_c| - |AQ| - |BQ| - |CQ|\right)$$

a součet poloměrů kružnic vepsaných P_cBQ, P_aCQ, P_bAQ je roven

$$\frac{1}{2}\left(|AP_b| + |BP_c| + |CP_a| + |QP_a| + |QP_b| + |QP_c| - |AQ| - |BQ| - |CQ|\right).$$

Stačí nám tedy ukázat, že $|AP_c| + |BP_a| + |CP_b| = |AP_b| + |BP_c| + |CP_a|$.

Protože trojúhelník C_bQA_b je rovnostranný a QP_b je jeho výška, platí $|A_bP_b| = |P_bC_b|$ (a analogicky $|C_aP_a| = |P_aB_a|$ a $|A_cP_c| = |P_cB_c|$).

Protože $B_cB_a \parallel AC$ a úhly B_cAC a B_aCA mají stejnou velikost, je AB_cB_aC rovnoramenný lichoběžník. Proto je $|AB_c| = |B_aC|$ (a analogicky $|AC_b| = |C_aB|$ a $|BA_c| = |A_bC|$).

Tímto jsme pokryli obvod trojúhelníka šesti dvojicemi stejně dlouhých úseček, kde v každé dvojici leží jedna v jedné části obvodu a druhá v druhé. Tím pádem mají tyto části obvodu stejný součet délek.

Jinak řečeno:

$$\begin{aligned}
|AP_c| + |BP_a| + |CP_b| &= (|AB_c| + |B_cP_c|) + (|BC_a| + |C_aP_a|) + (|CA_b| + |A_bP_b|)\\
&= |CB_a| + |A_cP_c| + |AC_b| + |B_aP_a| + |BA_c| + |C_bP_b|\\
&= (|AC_b| + |C_bP_b|) + (|BA_c| + |A_cP_c|) + (|CB_a| + |B_aP_a|)\\
&= |AP_b| + |BP_c| + |CP_a|.
\end{aligned}$$

Poznámky:

Část **(a)** se dala řešit mnoha rozmanitými způsoby, krom vzorového například pomocí hýbání s body nebo pomocí dokreslování vhodných obdélníků. Proto se také řešení části **(a)** sešlo mnoho.

Na části **(b)** bylo nejtěžší uvědomit si, že pro pravoúhlé trojúhelníky má poloměr kružnice vepsané vcelku hezký tvar. S tímto pozorováním už se úloha stala podobně snadnou jako část **(a)**.

(Rado van Švarc)

Úloha 4.

(a) *Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla a součin třetí mocninou přirozeného čísla.*

(Rado van Švarc)

(b) *Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takových, že $n^2 + 3m$ i $m^2 + 3n$ jsou druhé mocniny přirozených čísel.* *(Michal Töpfer)*

Řešení:

(a) Řešení existuje víc, nejpřímočařejší je volba $a_k = n^3$ pro všechna k. Potom totiž

$$a_1 + \cdots + a_n = n \cdot n^3 = (n^2)^2, a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = (n^3)^n = (n^n)^3.$$

Jelikož n^2 i n^n jsou přirozená čísla, jsme hotovi.

(b) Uvažme přirozená čísla a, b taková, že

$$n^2 + 3m = (n + a)^2, m^2 + 3n = (m + b)^2.$$

Roznásobením a úpravou rovnic dostaneme

$$3m = 2na + a^2, 3n = 2mb + b^2.$$

Tuto soustavu vyřešíme, vyjádříme m a poté ho dosadíme do druhé rovnice. Dostaneme

$$3n = \frac{4nab + 2a^2b}{3} + b^2,$$

což dá

$$9n - 4nab = 2a^2b + 3b^2,$$

tedy

$$n = \frac{2a^2b + 3b^2}{9 - 4ab}.$$

Protože n je přirozené číslo a čitatel je vždy kladný, musí být i jmenovatel kladný. Díky tomu víme, že $ab \leq 2$.

Buď nastane situace $a = b = 1$, nebo je jedno z těchto čísel rovno jedné a to druhé je rovno dvěma. V prvním případě dostaneme $n = m = 1$, v druhém případě $n = 16$, $m = 11$, respektive $n = 11$, $m = 16$. Víc možností není a všechny tyto dvojice vyhovují, neboť

$$1 + 3 = 4 = 2^2, 11^2 + 3 \cdot 16 = 121 + 48 = 169 = 13^2, 16^2 + 3 \cdot 11 = 256 + 33 = 289 = 17^2.$$

Poznámky:

V části **(a)** většina řešitelů volila buď výše popsané řešení, nebo $a_k = k^3$. Součet pak je $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ (jedná se o známý vzorec, který se dá dokázat třeba indukcí), což je čtverec přirozeného čísla, neboť vždy jedno z čísel n, $n+1$ je dělitelné dvěma, a součin je $(n!)^3$.

V části **(b)** se sešla celá škála řešení, která více či méně využívala různé odhady výrazů (typicky $n^2 < n^2 + 3m < (n+3)^2$) doplněné o rozbor případů. Ráda bych upozornila na to, že pokud se odvodí rovnice, které musí řešení splňovat, pak jejich řešení ještě automaticky nemusí řešit původní zadání. Je tedy nutné provést zkoušku nebo jinak zdůvodnit, proč se jedná o řešení.

(Anička Doležalová)

Úloha 5.

(a) *Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro žádná dvě přirozená čísla $i \neq j$ nejsou zároveň $a_i + j$ a $a_j + i$ dělitelná 2017?*

(b) *Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že pro každá dvě přirozená čísla $i \neq j$ jsou $a_i + j$ a $a_j + i$ nesoudělná?* *(Rado van Švarc)*

Řešení:

(a) Vezměme si posloupnost (a_n) takovou, že každé $a_n \in \{1, 2, \cdots, 2017\}$ a zároveň $a_i \equiv 1 - i \pmod{2017}$. Ukážeme, že tato posloupnost splňuje zadání. Je zřejmé, že každý člen této posloupnosti je jednoznačně určený a že každý člen je přirozené číslo. Nyní pro spor předpokládejme, že existují $i \neq j$ taková, že $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou obě dělitelná 2017. Pak

$$0 \equiv (a_i + j) + (a_j + i) \equiv (1 - i + j) + (1 - j + i) \equiv 2 \pmod{2017},$$

což je požadovaný spor. Posloupnost (a_n) tedy splňuje zadání.

(b) Dokážeme sporem, že taková posloupnost neexistuje. Předpokládejme tedy, že (a_n) je posloupnost splňující zadání.

Vezměme libovolnou dvojici sudých indexů i, j. Pak $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou nesoudělná, a tak nejsou obě sudá. To znamená, že alespoň jedno z a_i, a_j je liché. A protože toto platí pro všechny dvojice sudých i, j, pak pro sudá i jsou všechna a_i až možná na jedno lichá.

Obdobně vezměme libovolnou dvojici lichých indexů i, j. Pak $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou nesoudělná, a tak nejsou obě sudá. To znamená, že alespoň jedno z a_i, a_j je sudé. A protože toto platí pro všechny dvojice lichých i, j, pak pro lichá i jsou všechna a_i až možná na jedno sudá.

Takže určitě existuje nějaké sudé i takové, že a_i je liché, a alespoň jedno liché j takové, že a_j je sudé. Pak ale $a_i + j$ a $a_j + i$ jsou obě sudá, a tudíž soudělná, a to je požadovaný spor. Posloupnost splňující zadání tedy neexistuje.

Poznámky:
Skoro všechna řešení, která jsem ať už k první nebo k druhé části úlohy dostal, došla ke správnému výsledku a použila velmi podobnou myšlenku jako vzorové řešení. V první části se občas objevily celkem zajímavé posloupnosti, zaujala mě například posloupnost Samuela Krajčiho. Ten indexům $i \equiv 2015 \pmod{2017}$ přiřadil $a_i = 3$, indexům $i \equiv 2016 \pmod{2017}$ přiřadil $a_i = 2$ a všem ostatním i přiřadil $a_i = 1$. Důkaz, že posloupnost splňuje zadání, ale až zas tak elegantní a jednoduchý není, a proto jsem tuto variantu ve vzorovém řešení neuváděl.

Několika řešitelům jsem doporučil podívat se na nějaký text o kongruencích – určitě se bude ještě mnohokrát hodit vědět, co všechno umí a jak se dají použít. Něco málo je o nich v Úvodním textu ke 3. sérii 34. ročníku a nebo v seriálu o Teorii čísel ze 33. ročníku. Zkuste si texty pročíst, trochu si s kongruencemi pohrát a třeba vám už brzo usnadní nějakou další úlohu.

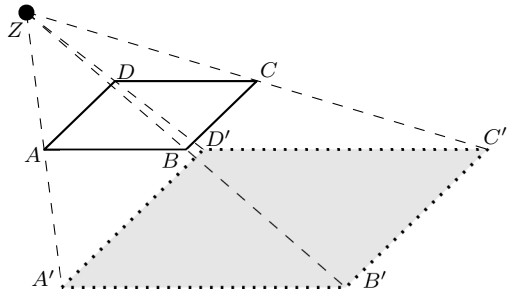
(Jáchym Solecký)

Úloha 6.

(a) *Na rovině leží krychle o hraně délky jedna. V dané výšce h nad touto rovinou ($h > 1$) je zdroj světla. Jakou nejmenší plochu může mít stín, který krychle vrhá na rovinu? Do plochy stínu počítáme i spodní podstavu krychle.* *(Martin „E.T.“ Sýkora)*

(b) *Slunce svítí rovnoběžnými paprsky kolmo na rovinu. Nad touto rovinou se v prostoru vznáší krychle o hraně délky jedna, kterou je možné libovolně otáčet. Určete, jaký největší stín může tato krychle na rovinu vrhat.* *(David Hruška)*

Řešení:



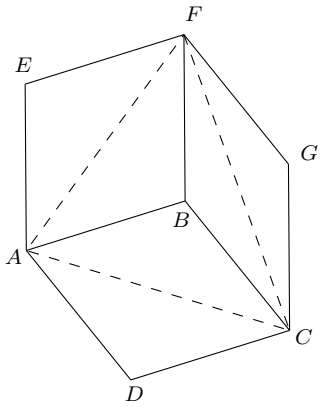
(a) Zdroj světla si označíme Z. Z krychle si zatím představíme jen její horní stěnu, jejíž vrcholy si označíme po řadě A, B, C a D. Tato stěna vrhá na rovinu čtvercový stín, jehož vrcholy si označíme stejným způsobem A', B', C' a D'.

Protože jsou jehlany $ZABCD$ a $ZA'B'C'D'$ stejnolehlé, nezávisí plocha stínu na poloze zdroje. Koeficient stejnolehlosti vypočítáme z poměru délek výšek. Výška jehlanu $ZA'B'C'D'$ je vzdálenost zdroje světla od roviny, tedy h. Jehlan $ZABCD$ má výšku o jedna menší. Protože délka úsečky AB je jedna, délka úsečky $A'B'$ je $1 \cdot \frac{h}{h-1}$. Plocha čtverce $A'B'C'D'$ je tedy

$$\frac{h^2}{(h-1)^2}.$$

To je ale také minimální možný rozměr stínu, protože horní stěna vrhá takovýto stín vždy, když je zdroj světla přímo nad krychlí, žádná další stěna již stín nevrhá.

(b) Nejprve je potřeba udělat dvě pozorování. Prvním pozorováním je, že nejvýše tři stěny krychle budou vždy vrhat stín. To platí proto, že nikdy nemůže být osvícena současně stěna a stěna s ní rovnoběžná. Druhým pozorováním bude fakt, že zkoumáme-li stín rovinného útvaru, bude mít maximální plochu, pokud je jeho rovina rovnoběžná s rovinou, na níž se promítá.



Nyní tedy vezmeme vrchol, kolem kterého jsou tři osvícené stěny, a označíme si ho B. Podle prvního pozorování je takový vrchol nejvýše jeden. Pokud by nebyl žádný, představíme si, že stín s nulovým obsahem vrhají i některé ze stěn, které jsou kolmé na rovinu, na níž krychle vrhá stín (této rovině budeme nadále říkat průmětna a pro každý bod X budeme X' značit jeho stín). Ostatní vrcholy krychle si označíme jako na obrázku. Stíny všech tří osvícených stěn jsou nutně rovnoběžníky. To platí například proto, že projekce zachovává příslušnost bodu k přímce a poměry vzdáleností, tedy i středovou symetrii. Protože strany krychle jsou čtverce, musí i jejich stíny být středově symetrické čtyřúhelníky, což jsou právě rovnoběžníky.

Nyní si všimneme, že stín krychle bude právě šestiúhelník $A'D'C'G'F'E'$ v němž možná některé vrcholy splývají. Podívejme se nyní na tři dvojice shodných trojúhelníků: $A'D'C'$ a $C'B'A'$, $C'G'F'$ a $F'B'C'$, $F'E'A'$ a $A'B'F'$. To nám říká, že obsah šestiúhelníku $A'D'C'G'F'E'$ je právě dvojnásobek obsahu trojúhelníku $A'C'F'$. Ten je ale maximální, když je rovina ACF rovnoběžná s průmětnou. Pak jsou trojúhelníky ACF a $A'C'F'$ shodné. Trojúhelník ACF je rovnostranný, jeho strana je stěnová úhlopříčka krychle, jejíž délka je $\sqrt{2}$ a obsah trojúhelníka ACF je tedy $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Maximální možný obsah stínu krychle je tedy $\sqrt{3}$.

Poznámky:
S částí **(a)** si většina řešitelů poradila hladce. O části **(b)** se ale to samé bohužel říct nedá. Spousta řešitelů vůbec nedokazovala, že nejlepší natočení krychle je právě toto. Taková řešení, neudělala-li žádnou další chybu, typicky získala jeden bod. Pouze *Samuel Krajčí* a *Klára* zvaná *Klátra Pernicová* se vydali stejnou cestou jako vzorové řešení a jenom Samuel tuto cestu dovedl až do zdárného konce. Oba dva byli za eleganci oceněni $+i$. Ostatní se pokoušeli o různé počítání pomocí goniometrických funkcí. Tento přístup typicky vedl též k cíli, ač často přes spoustu výpočtů a technických obtíží. V případech, kdy se řešitel navíc neobešel bez derivací, lineární algebry a jiných, primárně vysokoškolských technik, jsem se nakonec rozhodl udělit $-i$. *(Viki Němeček)*

Úloha 7.

(a) *Na kružnici o poloměru jedna leží naproti sobě body A a B. Zároveň je na ní začerveněno několik dalších bodů. Nechť a je geometrický průměr*[7] *délek všech úseček vedených z A do červených bodů a b je geometrický průměr délek všech úseček z B do červených bodů. Ukažte, že alespoň jedno z čísel a, b je menší nebo rovno $\sqrt{2}$.* *(Kuba Löwit)*

[7] Geometrický průměr nezáporných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je definován jako $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$.

(b) *Určete nejmenší kladné reálné číslo t takové, že pro všechna kladná reálná čísla a, b platí*

$$\frac{a+b}{2} \geq t\sqrt{ab} + (1-t)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(Rado van Švarc)

Řešení:

(a) Nechť $X_1, X_2, \dots X_n$ jsou červené body ze zadání. Jsou-li a_i, resp. b_i vzdálenosti X_i od A, resp. B, z Thaletovy věty jsou všechny trojúhelníky AX_iB pravoúhlé, takže z Pythagorovy věty plyne $a_i^2 + b_i^2 = 2^2$. Z AG nerovnosti pro a_i^2 a b_i^2 (nebo rozepsáním $(a_i - b_i)^2 \geq 0$) dostáváme $2a_ib_i \leq a_i^2 + b_i^2$, neboli $a_ib_i \leq 2$. Proto

$$ab = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \cdot \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n} = \sqrt[n]{a_1b_1 \cdot a_2b_2 \cdots a_nb_n} \leq \sqrt[n]{2^n} = 2.$$

Alespoň jedno z čísel a, b tedy musí být menší nebo rovno $\sqrt{2}$, jinak by jejich součin byl ostře větší než 2.

(b) Dokážeme, že nejmenší takové t je $\frac{1}{2}$. Ekvivalentními úpravami původní nerovnosti osamostatníme t. Předpokládejme, že $a \neq b$ (pro $a = b$ platí nerovnost vždy):

$$t\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right) \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2},$$

$$t \geq \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}}.$$

Povšimněme si, že znaménko nerovnosti se nezměnilo, protože jmenovatel je vždy kladný, což plyne z AG nerovnosti pro a^2 a b^2.

Poslední zlomek rozšíříme výrazem $\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}\right)$ a využijeme vztahu $(X+Y)(X-Y) = X^2 - Y^2$:

$$t \geq \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}} = \frac{\frac{(a-b)^2}{4}}{\frac{(a-b)^2}{2}} \frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}}\right).$$

Z AG nerovnosti je zřejmě poslední závorka menší než 1, takže $t = \frac{1}{2}$ jistě vyhovuje. Pro důkaz toho, že žádné menší t nevyhovuje, bychom potřebovali ukázat, že poslední zlomek může nabývat libovolně malých kladných hodnot. Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je libovolné, dosaďme $a = 1 + x$ a $b = 1 - x$ do zmíněného zlomku a pokusme se ekvivalentně nerovnost, kterou potřebujeme, upravit tak, abychom nalezli podmínku pro x, která zajistí její platnost:

$$\frac{\frac{2}{2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{2}} + \frac{2}{2}} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + 1} < \varepsilon.$$

Pokud zvolíme x tak, aby $1 - \sqrt{1-x^2} < \varepsilon$, budeme zřejmě hotovi, protože jmenovatel je větší než jedna. To ale znamená volit $0 < x < \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}$. Na pravé straně máme kladné číslo, takže takové x opravdu najít lze a jsme hotovi.

Poznámky:
Nerovnost $a_i b_i \leq 2$ v první části lze dokázat mnoha způsoby. Mezi algebraické (využívající pak Pythagorovu větu jako vzorové řešení) patří například nerovnost $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \sqrt{xy}$, která platí pro všechna nezáporná x, y a jejím zobecněním je tzv. *KAGH nerovnost*: jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ kladná čísla a označíme-li kvadratický průměr $K = \sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}$, aritmetický průměr $A = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, geometrický průměr $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ a harmonický průměr $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$, pak platí $K \geq A \geq G \geq H$. Další možností je všimnout si, že $a_i b_i$ je obsah obdélníka vepsaného do jednotkové kružnice, jehož úhlopříčka je průměrem té kružnice. Jeho obsah proto může být nejvýše dvojnásobkem vzdálenosti bodu X_i od průměru AB, tedy opět $a_i b_i \leq 2 \cdot 1$.

Řešení druhé části nebylo tolik, ale i mezi nimi se našly různé přístupy, které si často vysloužily kladné imaginární body. Například platnost nerovnosti pro $t = \frac{1}{2}$ lze zvlášť dokázat Jensenovou nerovností, konstrukcí vycházející z geometrického znázornění nerovnosti $KAGH$ nebo prostě dvěma umocněními a dalšími úpravami. Odhad $t \geq \frac{1}{2}$ většina řešení prováděla podobně vzorovému řešení až do speciálního dosazení za a a b. Pak z toho, že pro $a = b$ (takovou dvojici přímo dosadit nemůžeme, protože bychom v předchozích úpravách krátili nuly) nabývá zlomek

$$\frac{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{a+b}{2}}$$

hodnoty jedna, se zdá být jasné, že nabývá pro $a \neq b$ i hodnot libovolně blízkých jedné. Za pomoci základů matematické analýzy (bez kterých se žádné správné řešení neobešlo) to v tomto případě opravdu jasné je, ale podobná intuice nás často i zklame. *(David Hruška)*

Teorie grup III – Svoboda pro grupy

3. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Na stěnu si chceme pověsit obraz, a to pomocí provázku, který je oběma konci připevněn k jeho rámu. Do zdi je zatlučeno deset hřebíků.

(a) *Ukažte, že je možné na ně obraz pověsit tak, aby spadl po vyndání libovolných devíti hřebíků, zatímco po vytažení libovolných osmi bude stále ještě viset.*

(b) *Pět hřebíků je stříbrných a pět zlatých. Ukažte, že je možné na ně obraz pověsit tak, aby spadl pouze v případě, když vyndáme všechny hřebíky z jednoho kovu.*

(Kuba Löwit)

ŘEŠENÍ:

Nad možným zavěšením budeme přemýšlet jako nad slovy ve volné grupě tak, jak je popsáno v seriálu.

(a) Označme $a_1, \ldots, a_{10}$ otočky kolem jednotlivých hřebíků v jednom směru a $a_1^{-1}, \ldots, a_{10}^{-1}$ ve směru druhém. Dále uvažme slovo

$$w = a_1 \ldots a_{10} a_1^{-1} \ldots a_{10}^{-1}.$$

Pokud vyndáme devět hřebíků, zbude pouze slovo $a_i a_i^{-1}$, které je ekvivalentní prázdnému slovu. Když naopak vyndáme hřebíků méně, mezi každými dvěma písmeny tvaru a_i, a_i^{-1}, bude nějaké jiné písmeno – vzniklé slovo je ve zkráceném tvaru a triviálně není ekvivalentní slovu prázdnému. Tím jsme ověřili, že naše slovo skutečně vyhovuje zadání.

(b) Analogicky jako v předchozí části označme obmotání kolem stříbrných hřebíků $s_1, \ldots, s_5$ a $s_1^{-1}, \ldots, s_5^{-1}$ a obmotání kolem zlatých $z_1, \ldots, z_5$ a $z_1^{-1}, \ldots, z_5^{-1}$. Uvažme slovo

$$u = s_1 \ldots s_5 z_1 \ldots z_5 s_5^{-1} \ldots s_1^{-1} z_5^{-1} \ldots z_1^{-1}.$$

Jemu odpovídající zavěšení vyhovuje zadání. Když totiž odebereme všechny stříbrné hřebíky, tak zbude slovo z písmen odpovídajících zlatým hřebíkům, které je ekvivalentní prázdnému slovu. Analogicky zbude slovo ekvivalentní prázdnému i po odebrání všech zlatých hřebíků. Když ale zbudou stříbrné i zlaté hřebíky, budou zlatá písmena oddělena od svých inverzů písmeny stříbrnými a naopak. Vzniklé slovo bude proto ve zkráceném tvaru a zřejmě nebude ekvivalentní prázdnému.

POZNÁMKY:

Většina správných řešení byla velmi podobná výše uvedenému vzorovému řešení. Za nezdůvodnění správnosti řešení jsem body tentokrát nestrhával, protože ověřit ji není u těchto slov obtížné. Přesto však považuji za vhodné, aby řešení stručné zdůvodnění obsahovalo.

Za co jsem ale body strhával, bylo řešení druhé části, které se opíralo o fakt, že „na pět zlatých a pět stříbrných hřebíků se lze dívat jako na jeden zlatý a jeden stříbrný, čímž úlohu zjednodušíme na problém vyřešený v seriálu.“ To sice je pravda, ale toto pozorování není zřejmé a za plný počet bodů by si zasloužilo alespoň stručný komentář. Je totiž vhodné nastínit, že je možné každou pětici hřebíků obmotat provázkem, aniž bychom obmotali nějaký jiný hřebík.

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Úloha 2.

Buď A konečná abelovská grupa a B její podgrupa taková, že $|B|$ a $|A/B|$ jsou nesoudělná čísla. Dokažte, že $A \simeq B \times A/B$.

(Filip Bialas)

Řešení:

V celém řešení budeme používat aditivní notaci – tj. grupová operace bude zapisována jako sčítání.

Dokážeme nejdříve následující tvrzení: Mějme dvě (ne nutně abelovské) grupy G, H s nesoudělnými řády. Potom libovolná podgrupa grupy $G \times H$ je tvaru $A \times B$, kde A je podgrupa G a B podgrupa H.

Mějme libovolnou podgrupu C grupy $G \times H$. Stačí nám ukázat, že pokud $(g, h) \in C$, pak i $(g, 0) \in C$ a $(0, h) \in C$. Proč to stačí? Podgrupa C bude pak generována prvky tvaru $(g, 0)$ a $(0, h)$, které budou jistě tvořit podgrupy $A \times \{0\}, \{0\} \times B$ grupy $G \times H$, kde A je nějaká podgrupa G a B nějaká podgrupa H. Tyto prvky vygenerují právě grupu $A \times B$. Z čínské zbytkové věty ale můžeme najít takové přirozené n, že $|G| \mid n$ a $|H| \mid n - 1$ (zde využíváme nesoudělnost řádů grupy G a H). Pokud sečteme prvek (g, h) n-krát, tak s použitím Lagrangeovy věty vidíme, že dostaneme prvek $(0, h)$. Symetricky bychom dostali i prvek $(g, 0)$. Jelikož podgrupa musí být uzavřená na sčítání, patří tyto prvky do C, jak jsme chtěli ukázat.

Jednoduchou indukcí dostáváme toto tvrzení i pro direktní součin libovolného počtu grup s po dvou nesoudělnými řády. Nyní se vraťme k zadané úloze. Ze seriálu víme, že každá konečně generovaná abelovská grupa A je izomorfní direktnímu součinu cyklických grup s řády mocnin prvočísel. Označme $p_1, \ldots, p_k$ prvočísla, která dělí řád grupy A. Potom $A \simeq X_{p_1} \times \cdots \times X_{p_k}$, kde X_{p_i} je direktní součin cyklických grup s řády mocnin prvočísla p_i. Každá z grup X_{p_i} má tedy řád mocniny prvočísla a každá jiného. Jejich řády jsou tedy po dvou nesoudělné a z našeho tvrzení dostáváme, že libovolná podgrupa $B \leq A$ je izomorfní $Y_{p_1} \times \cdots \times Y_{p_k}$, kde Y_{p_i} je podgrupa X_{p_i} pro každé i. Pokud by ale některá z Y_{p_i} nebyla triviální nebo nebyla rovna X_{p_i}, dělilo by p_i jak řád grupy B, tak $\frac{|A|}{|B|}$, což je řád grupy A/B. To se však ze zadání nemůže stát. Dostáváme tedy, že je B izomorfní direktnímu součinu X_{p_i} pro některá z prvočísel p_i a A/B izomorfní direktnímu součinu X_{p_i} právě přes zbylá prvočísla. (To není vůbec těžké ukázat – stačí si uvědomit, že každý koset je reprezentován tím, co je v těchto zbylých grupách.) Grupa $B \times A/B$ je pak zřejmě izomorfní A, jak jsme měli dokázat.

Poznámky:

Úloha možná vypadala pro někoho až moc jednoduše a někteří si bohužel neuvědomili některé její zákeřnosti. V různých obměnách se vyskytovalo tvrzení ze vzorového řešení ale bez předpokladu nesoudělnosti řádů grup. Pro obecné (ne nutně abelovské) grupy bez tohoto předpokladu tvrzení neplatí. Jako protipříklad slouží např. podgrupa grupy $S_3 \times S_3$ tvořená prvky (π, σ) takovými, že permutace π, σ mají stejnou paritu. Tato podgrupa není izomorfní direktnímu součinu $G \times H$, kde G i H jsou podgrupy S_3.

Přiznáme se, že si nejsme jisti platností tohoto tvrzení, pokud se omezíme pouze na abelovské grupy, ale rozhodně nám nepřijde zřejmé. Podgrupy direktních součinů totiž můžou vypadat i velice nepřirozeně – příkladem může být abelovská grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ a její podgrupa generovaná prvkem $(1, 1)$.

(Filip Bialas)

Úloha 3.

Mějme volnou grupu F_2 nad písmeny $\{a, b\}$. Ukažte, že podgrupa H generovaná všemi součiny tvaru $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$ pro celá čísla m, n je izomorfní volné grupě s nekonečnou volnou bází.

(Kuba Löwit)

Řešení:

1. řešení (přímočará indukce): Pokud se m nebo n rovná nule, pak se $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$ zredukuje na e, a proto můžeme tyto prvky ignorovat. Nyní předpokládejme, že m, n jsou nenulová. U zbylých nekonečně mnoha prvků dokážeme, že se již jedná o volnou bázi, tzn. neexistuje mezi nimi netriviální relace. Ekvivalentně neexistuje netriviální kombinace, která by dala identitu, neboť můžeme všechny prvky převést na jednu stranu. Potom se můžeme na bloky $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$ dívat jako na jednotlivá písmena, čímž získáme dobře definovaný izomorfismus s příslušnou volnou grupou.

Zde netriviální rozumíme takovou kombinaci, v níž se nevyskytují sousední k sobě inverzní součiny, neboť ty by bylo zbytečné uvažovat. Mějme řetězec součinů $s_1 s_2 \dots s_k$. Indukcí podle k ukážeme, že je-li $s_1 = a^n b^m a^{-n} b^{-m}$, pak zredukovaný řetězec začíná na $a^n b^m$. Pro $k = 1$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k - 1$, pak naším cílem bude dokázat ho pro k. Nechť $s_1 = a^n b^m a^{-n} b^{-m}$. Aby zredukovaný řetězec nezačínal na $a^n b^m$, musí se oba $a^{-n} b^{-m}$ vykrátit, tzn. dva první úseky řetězce $s_2 \dots s_k$ jsou $b^m a^n$. Podle indukčního předpokladu se jedná o dva první úseky součinu s_2. Z toho plyne, že s_1 jsou s_2 jsou vůči sobě inverzní, což jsme zakázali.

Žádná netriviální kombinace nikdy nedává identitu, neboť se nikdy nevykrátí první dva úseky prvního součinu.

2. řešení (trikové): Volná grupa na dvou prvcích je fundamentální grupa grafu C se dvěma očky. Jedno očko znázorňuje prvek a a druhé prvek b. Uvažujme orientovaný graf D nekonečné čtvercové mřížky, kde všechny horizontální hrany vedou stejným směrem a všechny vertikální hrany vedou také stejným směrem. Je vidět, že D kryje C, a ze seriálu víme, že fundamentální grupa krycího grafu je podgrupa grupy F_2. Vrhněme se nyní na úlohu.

Ukážeme, že fundamentální grupa grafu D je právě H. Zvolme libovolný bázový vrchol x. Fundamentální grupa grafu D jistě obsahuje všechny prvky tvaru $a^n b^m a^{-n} b^{-m}$. Jedná se totiž o obdélníky s jedním vrcholem v x. Zbývá ukázat, že tyto prvky generují všechny procházky začínající a končící v x. Takové procházky jsou mnohoúhelníky obsahující x, jejichž algebraické zápisy jsou ve tvaru $a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} \dots a^{m_k} b^{n_k}$, kde součet všech m, resp. n je nulový, neboť abychom začali a skončili ve stejném bodě, potřebujeme dělat stejný počet kroků doleva a doprava, resp. nahoru a dolů. Nyní kýžený výsledek dokážeme indukcí podle počtu bloků a, b. Pokud takových bloků máme jen 1 nebo 2, pak se již podle podmínky musí jednat o identitu. Pokud je bloků více, pak

$$a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} \dots a^{m_k} b^{n_k} = (a^{m_1} b^{n_1} a^{-m_1} b^{-n_1})(b^{n_1} a^{m_1+m_2} b^{n_2} \dots a^{m_k} b^{n_k}).$$

Druhá závorka na pravé straně má o jeden blok méně než počáteční prvek a součty exponentů jak u a, tak u b jsou pořád nulové, tudíž můžeme aplikovat indukční předpoklad.

Teď stačí, abychom ukázali, že fundamentální grupa nekonečné čtvercové mřížky je nekonečně generovaná. Uvažujme libovolnou kostru. V každém políčku musí alespoň jedna hrana v této kostře chybět, a proto po odebrání kostry zůstane nekonečně mnoho hran a jsme hotovi.

Poznámky:

Přes náročnost letošního seriálu došla dvě správná řešení, což si zaslouží moji pochvalu. Jedno další řešení se odvážilo zaobírat postupem trikového řešení. *(Anh Dung „Tonda“ Le)*

Výsledky seriálu

	jméno	příjmení	r.	škola	1s	2s	3s	celkem	hist.
1.	*Matěj*	*Doležálek*	3	G Humpolec	15	15	11	**41,19**	425
2.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	15	14	11	**39,38**	261
3.	*Danil*	*Koževnikov*	4	GKepleraPH	15	15	–	**30,00**	759
4.	*Alexandr*	*Jankov*	4	MatičníGOS	15	13	–	**28,32**	387
5.	*Radek*	*Olšák*	3	GMensaPH	13	8	4	**25,53**	516
6.	*Ondřej*	*Krabec*	3	G KomHavíř	10	9	5	**25,41**	191
7.	*Jan*	*Vavřín*	1	PORG PH	15	–	5	**20,29**	150
8.	*Josef*	*Minařík*	3	GJarošeBO	15	5	–	**20,05**	239
9.	*Dominik*	*Stejskal*	3	G Krnov	14	–	5	**19,59**	20
10.	*Klára*	*Churá*	1	GNerudCheb	–	10	10	**19,08**	19
11.	*Martin*	*Zimen*	3	GJMasar JI	10	7	–	**17,56**	341
12.–13.	*Klára*	*Pernicová*	1	GŠlapanice	9	–	9	**17,02**	17
12.–13.	*Adéla Karolína*	*Žáčková*	1	GZborovPH	9	9	–	**17,02**	17
14.	*Magdaléna*	*Mišinová*	1	GKepleraPH	12	4	–	**16,43**	16
15.	*Jonáš*	*Havelka*	2	G Jírov ČB	14	2	–	**16,33**	16
16.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	2	GJHroncaBA	5	5	4	**15,04**	421
17.	*Adam*	*Křivka*	2	CMGPgBrno	15	–	–	**15,00**	15
18.	*Petr*	*Gebauer*	4	G Mělník	11	3	–	**13,81**	584
19.	*Hedvika*	*Ranošová*	4	GBudějovPH	13	–	–	**12,88**	577
20.	*Viktor*	*Fukala*	1	GKepleraPH	13	–	–	**12,56**	37
21.	*Matěj*	*Krátký*	2	PORG PH	12	–	–	**11,74**	78
22.	*Ondřej*	*Tkaczyszyn*	3	GKepleraPH	11	–	–	**11,23**	11
23.	*Pavel*	*Hudec*	4	GJarkovPH	10	–	–	**9,51**	596
24.	*Tomáš*	*Flídr*	0	GMasarykKM	9	–	–	**9,36**	17
25.	*Jan*	*Kaifer*	2	GKepleraPH	7	2	–	**8,95**	53
26.	*Zuzana*	*Urbanová*	4	GFXŠaldyLI	9	–	–	**8,50**	256
27.	*Petr*	*Khartskhaev*	1	PORG PH	8	–	–	**8,26**	48
28.	*Kateřina*	*Panešová*	2	G Teplice	–	–	7	**7,36**	7
29.	*Mikuláš*	*Brož*	1	GNadŠtolPH	7	–	–	**7,34**	7
30.	*Václav*	*Zvoníček*	2	GJarošeBO	7	–	–	**7,33**	14
31.	*Jan*	*Hrubeš*	3	G ČKrumlov	6	–	–	**6,40**	6
32.	*Zuzana*	*Šraierová*	3	GČeskoliPH	6	–	–	**6,33**	20
33.	*David*	*Beinhauer*	3	MendelG OP	0	6	–	**6,29**	29
34.	*Jakub*	*Růžička*	3	G Nymburk	6	–	–	**6,03**	80
35.	*Petr*	*Zahradník*	3	GŠmejkalÚL	6	–	–	**5,62**	150
36.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	1	PORG PH	2	–	2	**4,92**	17
37.	*Lucie*	*Kundratová*	3	G TGM Zlín	4	–	–	**4,10**	371
38.	*Anna*	*Mlezivová*	4	GCoubTábor	4	–	–	**4,09**	149
39.	*Martin*	*Raška*	4	WichtG OS	4	–	–	**3,95**	181
40.	*Martin*	*Bakoš*	4	GPBystrica	4	–	–	**3,87**	201

41.–42.	*Lenka*	*Kopfová*	3	MendelG OP	4	–	–	**3,50**	535
41.–42.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	4	GZborovPH	4	–	–	**3,50**	554
43.	*Filip*	*Čermák*	4	MendelG OP	3	–	–	**3,36**	354
44.	*Anna*	*Musilová*	2	PORG PH	–	–	3	**3,10**	125
45.	*Klára*	*Hloušková*	2	G Kolín	2	–	–	**1,68**	95
46.	*Martin*	*Hubata*	2	GMikul23PL	2	–	–	**1,64**	115
47.	*Jindřich*	*Dušek*	3	GKepleraPH	1	–	–	**1,45**	1
48.–52.	*Tomáš*	*Drobil*	3	G Dačice	0	–	–	**0,00**	243
48.–52.	*Matěj*	*Holubička*	2	G Hořice	–	0	–	**0,00**	10
48.–52.	*Kateřina*	*Charvátová*	3	GBNěmcovHK	0	–	–	**0,00**	222
48.–52.	*Michal*	*Chudoba*	3	GLitoměřPH	0	0	–	**0,00**	181
48.–52.	*Viktor*	*Materna*	2	GJarošeBO	0	–	–	**0,00**	15

Výsledky jarní části

	jméno	příjmení	r.	škola	1j	2j	3j	4j	2s	3s	celkem	hist.
1.	*Matěj*	*Doležálek*	3	G Humpolec	25	25	25	34	15	11	**135,56**	520
2.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	24	23	24	28	14	11	**124,51**	347
3.	*Adéla Karolína*	*Žáčková*	1	GZborovPH	22	22	22	31	9	–	**105,64**	106
4.	*Magdaléna*	*Mišinová*	1	GKepleraPH	23	22	22	29	4	–	**101,65**	102
5.	*Klára*	*Churá*	1	GNerudCheb	19	22	18	22	10	10	**100,19**	100
6.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	2	GJHroncaBA	21	23	21	24	5	4	**99,63**	506
7.	*Ondřej*	*Krabec*	3	G KomHavíř	21	19	20	20	9	5	**94,86**	261
8.	*Jonáš*	*Havelka*	2	G Jírov ČB	22	21	18	28	2	–	**90,71**	91
9.	*David*	*Klement*	2	GNadAlejPH	20	20	18	29	–	–	**88,38**	181
10.	*Jakub*	*Parada*	2	G Gröss BA	22	19	23	23	–	–	**87,66**	263
11.	*Dominik*	*Stejskal*	3	G Krnov	13	21	21	27	–	5	**86,77**	87
12.	*Adam*	*Křivka*	2	CMGPgBrno	15	22	22	28	–	–	**85,87**	86
13.	*Jan*	*Kaifer*	2	GKepleraPH	23	19	18	24	2	–	**85,72**	130
14.	*Mikuláš*	*Brož*	1	GNadŠtolPH	21	22	22	19	–	–	**84,72**	85
15.	*Klára*	*Pernicová*	1	GŠlapanice	20	19	13	18	–	9	**77,93**	78
16.	*Miroslav*	*Macko*	2	LeafAcademy	18	21	16	22	–	–	**76,86**	151
17.	*Radek*	*Olšák*	3	GMensaPH	23	19	17	4	8	4	**75,23**	565
18.	*Kateřina*	*Panešová*	2	G Teplice	16	22	13	16	–	7	**74,30**	74
19.	*Josef*	*Minařík*	3	GJarošeBO	25	23	–	20	5	–	**72,95**	292
20.	*Timea*	*Szöllsová*	2	G Gröss BA	23	15	18	17	–	–	**72,86**	73
21.	*Samuel*	*Krajči*	3	GAlejKošic	21	15	15	20	–	–	**70,71**	259
22.	*Petr*	*Khartskhaev*	1	PORG PH	18	22	21	9	–	–	**69,55**	110
23.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	1	PORG PH	17	21	15	14	–	2	**68,97**	81
24.	*Martin*	*Zimen*	3	GJMasar JI	15	20	13	10	7	–	**65,32**	388
25.	*David*	*Beinhauer*	3	MendelG OP	16	20	20	3	6	–	**64,71**	88
26.	*Lucie*	*Kundratová*	3	G TGM Zlín	20	20	14	9	–	–	**63,19**	430
27.	*Tomáš*	*Hulla*	1	GTajBanBys	11	7	21	19	–	–	**57,95**	58
28.	*Lenka*	*Kopfová*	3	MendelG OP	11	19	19	8	–	–	**56,62**	588
29.	*Alexandr*	*Jankov*	4	MatičníGOS	–	–	17	25	13	–	**56,05**	415
30.	*Adam*	*Mendl*	1	GCoubTábor	13	19	17	–	–	–	**49,39**	418
31.	*Josef*	*Král*	3	MendelG OP	8	20	6	7	–	–	**40,28**	89
32.	*Klára*	*Hloušková*	2	G Kolín	11	9	9	9	–	–	**38,28**	131
33.	*Martin*	*Hubata*	2	GMikul23PL	9	16	12	0	–	–	**36,90**	150
34.	*Alžběta*	*Manová*	3	G UherBrod	4	18	10	5	–	–	**36,36**	111
35.	*Tomáš*	*Čelko*	4	GPBystrica	13	11	11	–	–	–	**35,44**	267
36.	*Danil*	*Koževnikov*	4	GKepleraPH	20	–	–	–	15	–	**35,11**	764
37.	*Jakub*	*Růžička*	3	G Nymburk	12	16	7	–	–	–	**35,06**	109
38.	*Ján*	*Pavlech*	4	GsJozefaNM	13	12	9	–	–	–	**33,73**	34
39.	*Soňa*	*Husáková*	1	GČeskoliPH	11	15	7	–	–	–	**32,78**	33
40.	*Martin*	*Bakoš*	4	GPBystrica	8	12	12	–	–	–	**31,43**	228

41.	*Klára*	*Zemanová*	1	PORG PH	11	11	7	–	–	–	**29,55**	30
42.	*Tomáš*	*Flídr*	0	GMasarykKM	13	16	–	–	–	–	**29,16**	37
43.	*Matěj*	*Holubička*	2	G Hořice	9	14	5	0	0	–	**28,61**	39
44.	*Kateřina*	*Charvátová*	3	GBNěmcovHK	7	14	4	–	–	–	**25,12**	247
45.	*Jan*	*Nekarda*	2	GUHradiště	12	–	13	–	–	–	**24,22**	72
46.	*Jonáš*	*Stoilov*	2	PORG PH	13	11	–	–	–	–	**24,12**	57
47.	*Viktor*	*Fukala*	1	GKepleraPH	–	–	–	23	–	–	**22,87**	47
48.	*Václav*	*Zvoníček*	2	GJarošeBO	–	9	13	–	–	–	**22,38**	29
49.	*Michal*	*Chudoba*	3	GLitoměřPH	11	12	–	–	0	–	**22,30**	203
50.	*Jan*	*Vavřín*	1	PORG PH	16	–	–	–	–	5	**21,01**	151
51.	*Alexandra*	*Géciová*	2	GJHroncaBA	–	11	9	–	–	–	**20,48**	86
52.	*Anna*	*Musilová*	2	PORG PH	–	6	11	–	–	3	**20,24**	142
53.	*Lukáš*	*Gáborik*	1	GTajBanBys	–	–	15	5	–	–	**20,02**	20
54.	*Filip*	*Chudoba*	4	PORG PH	10	3	7	–	–	–	**20,01**	257
55.	*Jaroslav*	*Paška*	3	G SkalicBA	–	11	8	–	–	–	**19,39**	19
56.	*Zuzana*	*Doležalová*	0	GKepleraPH	8	11	–	–	–	–	**18,87**	51
57.	*Johana*	*Dvořáková*	3	G Trutnov	–	–	13	3	–	–	**15,94**	54
58.	*Kristýna*	*Kamenářová*	3	G TGM Zlín	–	8	6	1	–	–	**15,01**	15
59.	*Bohdan*	*Kopčák*	2	GNadAlejPH	–	9	5	–	–	–	**14,75**	15
60.	*Viktor*	*Materna*	2	GJarošeBO	–	9	5	–	–	–	**14,57**	30
61.	*Dominika*	*Hájková*	3	GPísnickPH	8	6	–	–	–	–	**14,46**	14
62.	*Ondřej*	*Macháč*	2	GStrážnice	–	9	5	–	–	–	**14,33**	14
63.	*Šimon*	*Hutař*	3	PORG PH	–	–	10	4	–	–	**14,26**	41
64.	*Matěj*	*Krátký*	2	PORG PH	–	14	–	–	–	–	**13,60**	80
65.	*Petr*	*Zahradník*	3	GŠmejkalÚL	0	13	–	–	–	–	**13,13**	157
66.	*Jakub*	*Čurda*	3	PORG PH	–	7	–	5	–	–	**12,65**	86
67.	*Aleš*	*Horák*	1	SPŠ Třebíč	3	7	–	–	–	–	**9,46**	9
68.	*Michaela*	*Loudová*	3	G Vodňany	–	4	4	–	–	–	**8,46**	8
69.	*Martin*	*Zimka*	3	GTajBanBys	–	–	8	–	–	–	**8,00**	8
70.	*Jan*	*Vondra*	2	G TýnNVlt	–	–	7	–	–	–	**6,51**	51
71.	*Bálint*	*Tóth*	3	GMaďDStred	–	–	6	–	–	–	**5,53**	6
72.–73.	*Anna*	*Jerhotová*	2	GJosefskPH	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
72.–73.	*Vilém*	*Raška*	2	GJarošeBO	–	5	–	–	–	–	**5,27**	5
74.	*Vít*	*Gaďurek*	3	PORG PH	–	3	–	1	–	–	**4,43**	182
75.	*David*	*Ha*	3	MasG Plzeň	–	4	–	–	–	–	**4,13**	25
76.–77.	*Samuel*	*Šúr*	3	GTajBanBys	–	–	–	3	–	–	**2,91**	3
76.–77.	*Vendelín*	*Vincze*	3	GTajBanBys	–	–	–	3	–	–	**2,91**	3
78.	*Petr*	*Gebauer*	4	G Mělník	–	–	–	–	3	–	**2,71**	573

Výsledky po 37. ročníku

	jméno	příjmení	r.	škola	1p	2p	3p	4p	1j	2j	3j	4j	1s	2s	3s	celkem	hist.
1.	*Matěj*	*Doležálek*	3	G Humpolec	23	24	25	25	25	25	25	34	15	15	11	**247,26**	631
2.	*Michal*	*Beránek*	0	GVoděraPH	24	23	24	22	24	23	24	28	15	14	11	**231,42**	453
3.	*Magdaléna*	*Mišinová*	1	GKepleraPH	22	22	25	23	23	22	22	29	12	4	–	**206,93**	207
4.	*Adéla Karolína*	*Žáčková*	1	GZborovPH	23	23	24	21	22	22	22	29	9	9	–	**203,81**	204
5.	*Lucia*	*Krajčoviechová*	2	GJHroncaBA	25	25	23	21	21	23	21	24	5	5	4	**199,52**	606
6.	*Jonáš*	*Havelka*	2	G Jírov ČB	24	23	23	23	22	21	18	28	14	2	–	**197,69**	198
7.	*Adam*	*Křivka*	2	CMGPgBrno	21	23	23	19	15	22	22	28	15	–	–	**187,25**	187
8.	*Ondřej*	*Krabec*	3	G KomHavíř	19	21	21	20	21	19	20	20	10	9	5	**185,55**	352
9.	*Josef*	*Minařík*	3	GJarošeBO	23	25	25	23	25	23	–	20	15	5	–	**184,27**	403
10.	*Klára*	*Churá*	1	GNerudCheb	21	22	23	17	19	22	18	22	–	10	10	**182,77**	183
11.	*Dominik*	*Stejskal*	3	G Krnov	21	21	21	12	13	21	21	27	14	–	5	**176,21**	176
12.	*Mikuláš*	*Brož*	1	GNadŠtolPH	14	23	22	22	21	22	22	19	7	–	–	**173,67**	174
13.	*Radek*	*Olšák*	3	GMensaPH	25	18	25	17	23	19	17	4	13	8	4	**173,40**	663
14.	*Miroslav*	*Macko*	2	LeafAcademy	23	22	23	21	18	21	16	22	–	–	–	**165,74**	240
15.	*David*	*Klement*	2	GNadAlejPH	18	16	21	20	20	20	18	29	–	–	–	**163,87**	257
16.	*Jakub*	*Parada*	2	G Gröss BA	23	18	12	24	22	19	23	23	–	–	–	**163,76**	339
17.	*Petr*	*Khartskhaev*	1	PORG PH	14	23	22	21	18	22	21	9	8	–	–	**158,36**	198
18.	*Klára*	*Pernicová*	1	GŠlapanice	18	21	19	15	20	19	13	18	9	–	9	**158,22**	158
19.	*Alexandr*	*Jankov*	4	MatičníGOS	20	22	23	19	–	–	17	25	15	13	–	**155,30**	514
20.	*Jan*	*Kaifer*	2	GKepleraPH	–	20	18	21	23	19	18	24	7	2	–	**151,69**	196
21.	*Martin*	*Zimen*	3	GJMasar JI	17	18	19	16	15	20	13	10	10	7	–	**145,16**	468
22.	*Danil*	*Koževnikov*	4	GKepleraPH	25	22	25	22	20	–	–	–	15	15	–	**144,77**	874
23.	*Vojtěch*	*Gaďurek*	1	PORG PH	16	21	18	18	17	21	15	14	2	–	2	**142,97**	155
24.	*Lucie*	*Kundratová*	3	G TGM Zlín	19	19	20	19	20	20	14	3	4	–	–	**137,98**	505
25.	*Kateřina*	*Panešová*	2	G Teplice	12	19	15	18	16	22	13	15	–	–	7	**136,43**	136
26.	*David*	*Beinhauer*	3	MendelG OP	16	20	14	20	16	20	20	3	0	6	–	**134,98**	158
27.	*Viktor*	*Fukala*	1	GKepleraPH	22	25	24	22	–	–	–	23	13	–	–	**129,30**	153
28.	*Lenka*	*Kopfová*	3	MendelG OP	16	14	19	19	11	19	19	8	4	–	–	**128,75**	660
29.	*Tomáš*	*Flídr*	0	GMasarykKM	23	23	17	15	13	16	–	–	9	–	–	**116,64**	125
30.	*Jakub*	*Růžička*	3	G Nymburk	17	19	20	16	12	16	7	–	6	–	–	**112,99**	187
31.	*Adam*	*Mendl*	1	GCoubTábor	17	18	21	–	13	19	17	–	–	–	–	**105,05**	474
32.	*Martin*	*Hubata*	2	GMikul23PL	18	12	23	13	9	16	12	0	2	–	–	**104,48**	217
33.	*Petr*	*Gebauer*	4	G Mělník	17	25	19	19	–	–	–	–	11	3	–	**93,92**	664
34.	*Jan*	*Vavřín*	1	PORG PH	17	22	–	18	16	–	–	–	15	–	5	**93,48**	223
35.	*Hedvika*	*Ranošová*	4	GBudějovPH	15	19	25	19	–	–	–	–	13	–	–	**90,74**	655
36.	*Tomáš*	*Čelko*	4	GPBystrica	10	16	17	7	13	11	11	–	–	–	–	**84,50**	317
37.	*Martin*	*Bakoš*	4	GPBystrica	9	16	17	7	8	12	12	–	4	–	–	**84,42**	281
38.	*Martin*	*Raška*	4	WichtG OS	20	21	17	20	–	–	–	–	4	–	–	**82,10**	259
39.	*Josef*	*Král*	3	MendelG OP	15	18	9	–	8	20	6	7	–	–	–	**81,93**	131
40.	*Matěj*	*Krátký*	2	PORG PH	18	21	16	–	–	14	–	–	12	–	–	**81,33**	147

41.	*Klára*	*Hloušková*	2	G Kolín	9	6	12	13	11	9	9	9	2	–	–	**80,84**	174
42.	*Ondřej*	*Tkaczyszyn*	3	GKepleraPH	24	21	24	–	–	–	–	–	11	–	–	**79,33**	79
43.	*Alžběta*	*Manová*	3	G UherBrod	3	20	11	9	4	18	10	5	–	–	–	**78,56**	154
44.	*Filip*	*Čermák*	4	MendelG OP	16	17	22	20	–	–	–	–	3	–	–	**78,49**	429
45.	*Ján*	*Pavlech*	4	GsJozefaNM	–	15	12	17	13	12	9	–	–	–	–	**77,73**	78
46.	*Zuzana*	*Urbanová*	4	GFXŠaldyLI	18	16	17	18	–	–	–	–	9	–	–	**77,16**	324
47.	*Soňa*	*Husáková*	1	GČeskoliPH	15	10	13	7	11	15	7	–	–	–	–	**77,10**	77
48.	*Petr*	*Zahradník*	3	GŠmejkalÚL	14	15	20	7	0	13	–	–	6	–	–	**75,12**	219
49.	*Jan*	*Hrubeš*	3	G ČKrumlov	15	18	21	14	–	–	–	–	6	–	–	**75,08**	75
50.	*Pavel*	*Hudec*	4	GJarkovPH	23	–	21	21	–	–	–	–	10	–	–	**73,67**	660
51.	*Timea*	*Szöllsová*	2	G Gröss BA	–	–	–	–	23	15	18	17	–	–	–	**72,86**	73
52.	*Anna*	*Mlezivová*	4	GCoubTábor	17	18	18	16	–	–	–	–	4	–	–	**72,80**	218
53.	*Martin*	*Starovič*	2	ŠpMNDaG BA	14	19	19	19	–	–	–	–	–	–	–	**72,16**	72
54.	*Samuel*	*Krajči*	3	GAlejKošic	–	–	–	–	21	15	15	20	–	–	–	**70,71**	259
55.	*Kateřina*	*Charvátová*	3	GBNěmcovHK	7	11	14	11	7	14	4	–	0	–	–	**68,31**	290
56.	*Jonáš*	*Stoilov*	2	PORG PH	9	15	9	9	13	11	–	–	–	–	–	**66,73**	100
57.	*Tomáš*	*Ganz*	2	ŠpMNDaG BA	13	19	14	18	–	–	–	–	–	–	–	**64,19**	64
58.	*Anna*	*Musilová*	2	PORG PH	12	16	9	6	–	6	11	–	–	–	3	**63,30**	185
59.	*Klára*	*Zemanová*	1	PORG PH	0	11	11	7	11	11	7	–	–	–	–	**59,10**	59
60.	*Tomáš*	*Hulla*	1	GTajBanBys	–	–	–	–	11	7	21	19	–	–	–	**57,95**	58
61.	*Alexandra*	*Géciová*	2	GJHroncaBA	8	17	11	–	–	11	9	–	–	–	–	**57,05**	123
62.	*Victoria María*	*Nájares Romero*	4	GZborovPH	18	16	11	8	–	–	–	–	4	–	–	**56,82**	607
63.	*Dominika*	*Hájková*	3	GPísnickPH	8	14	9	9	8	6	–	–	–	–	–	**55,27**	55
64.	*Jindřich*	*Dušek*	3	GKepleraPH	16	20	16	–	–	–	–	–	1	–	–	**54,00**	54
65.	*Filip*	*Chudoba*	4	PORG PH	6	11	7	9	10	3	7	–	–	–	–	**53,63**	291
66.	*Šimon*	*Hutař*	3	PORG PH	11	17	4	7	–	–	10	4	–	–	–	**53,24**	80
67.	*Ondřej*	*Macháč*	2	GStrážnice	7	18	13	–	–	9	5	–	–	–	–	**52,15**	52
68.	*David*	*Ryzák*	4	G Trutnov	13	12	13	13	–	–	–	–	–	–	–	**51,03**	121
69.	*Dominik*	*Majkus*	3	GNVPláníPH	17	17	8	8	–	–	–	–	–	–	–	**50,86**	51
70.	*Jan*	*Nekarda*	2	GUHradiště	9	17	–	–	12	–	13	–	–	–	–	**49,99**	98
71.	*Michal*	*Chudoba*	3	GLitoměřPH	8	5	11	3	11	12	–	–	0	0	–	**49,22**	230
72.	*Matěj*	*Holubička*	2	G Hořice	–	8	9	–	9	14	5	0	–	0	–	**46,12**	56
73.	*Viktor*	*Materna*	2	GJarošeBO	5	12	11	–	–	9	5	–	0	–	–	**42,17**	57
74.	*Klára*	*Grinerová*	1	GZborovPH	13	16	13	–	–	–	–	–	–	–	–	**41,17**	41
75.	*Zuzana*	*Šraierová*	3	GČeskoliPH	–	18	12	4	–	–	–	–	6	–	–	**40,90**	55
76.	*Václav*	*Janáček*	1	GJarošeBO	17	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,71**	39
77.	*Karel*	*Chwistek*	1	MendelG OP	15	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**37,32**	37
78.	*Jaroslav*	*Paška*	3	G SkalicBA	16	–	–	–	–	11	8	–	–	–	–	**35,75**	36
79.	*Václav*	*Zvoníček*	2	GJarošeBO	–	–	5	–	–	9	13	–	7	–	–	**34,94**	42
80.	*Bálint*	*Tóth*	3	GMaďDStred	8	20	–	–	–	–	6	–	–	–	–	**33,36**	33
81.	*Ludmila Hana*	*Houfková*	1	GMHS	13	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**30,34**	30
82.	*Ákos*	*Záhorský*	4	G VJM Šahy	13	18	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**30,16**	170
83.	*Erik*	*Řehulka*	2	ŠpMNDaG BA	–	20	9	–	–	–	–	–	–	–	–	**29,60**	30
84.	*Jakub*	*Čurda*	3	PORG PH	4	6	–	5	–	7	–	5	–	–	–	**27,94**	101
85.	*Vít*	*Gaďurek*	3	PORG PH	8	9	3	3	–	3	–	1	–	–	–	**27,25**	205
86.	*Lukáš*	*Frk*	1	GNadAlejPH	–	20	7	–	–	–	–	–	–	–	–	**26,60**	27
87.	*Vilém*	*Raška*	2	GJarošeBO	5	9	–	5	–	5	–	–	–	–	–	**25,29**	25
88.	*Tomáš*	*Drobil*	3	G Dačice	5	12	6	–	–	–	–	–	0	–	–	**22,32**	265
89.	*Tomáš*	*Jelínek*	1	ArcibisGPH	–	22	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**21,88**	22
90.	*Anna*	*Jerhotová*	2	GJosefskPH	15	–	–	–	5	–	–	–	–	–	–	**20,32**	20
91.	*Matej*	*Kvorka*	4	GŠkolDubni	10	5	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**20,15**	108
92.	*Lukáš*	*Gáborik*	1	GTajBanBys	–	–	–	–	–	–	15	5	–	–	–	**20,02**	20

93.	*Vojtěch*	*Dašek*	1	PORG PH	3	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**19,50**	20
94.	*Zuzana*	*Doležalová*	0	GKepleraPH	–	–	–	–	8	11	–	–	–	–	–	**18,87**	51
95.	*Jan*	*Vondra*	2	G TýnNVlt	0	5	7	–	–	–	7	–	–	–	–	**18,07**	62
96.	*Anna*	*Jandová*	3	G Leg PB	8	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,69**	58
97.	*Johana*	*Dvořáková*	3	G Trutnov	–	1	–	–	–	–	13	3	–	–	–	**17,34**	55
98.	*Karin*	*Janovjaková*	4	G Metod BA	–	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,00**	17
99.	*Aleš*	*Horák*	1	SPŠ Třebíč	–	7	–	–	3	7	–	–	–	–	–	**16,25**	16
100.	*Martin*	*Zimka*	3	GTajBanBys	–	–	8	–	–	–	8	–	–	–	–	**16,00**	16
101.	*Jaromír*	*Sladkovský*	3	PORG PH	11	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,83**	93
102.	*Karel*	*Balej*	3	G Rokycany	–	15	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**15,12**	55
103.	*Kristýna*	*Kamenářová*	3	G TGM Zlín	–	–	–	–	–	8	6	1	–	–	–	**15,01**	15
104.	*Jaroslav*	*Paidar*	4	SPŠMasarLI	–	–	11	4	–	–	–	–	–	–	–	**14,78**	337
105.	*Bohdan*	*Kopčák*	2	GNadAlejPH	–	–	–	–	–	9	5	–	–	–	–	**14,75**	15
106.	*Lukáš*	*Antoš*	0	G Mělník	–	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**12,95**	17
107.	*Jiří*	*Machyán*	3	G Vlašim	6	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,06**	11
108.	*Alžběta*	*Neubauerová*	4	GNadKavaPH	5	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,98**	181
109.	*David*	*Ha*	3	MasG Plzeň	1	–	–	4	–	4	–	–	–	–	–	**9,69**	31
110.	*Jakub*	*Šperka*	3	GTajBanBys	–	8	1	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,47**	9
111.	*Michaela*	*Loudová*	3	G Vodňany	–	–	–	–	–	4	4	–	–	–	–	**8,46**	8
112.	*Vojtěch*	*Votruba*	0	FZŠChlupPH	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,34**	8
113.	*Kateřina*	*Ševčíková*	0	ZSSLOUP	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,10**	21
114.	*Petr*	*Aubrecht*	3	GHeyrovPH	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,00**	8
115.	*Oldřich*	*Jandl*	3	NPorg	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,32**	98
116.	*Václav*	*Nevyhoštěný*	2	GJarošeBO	–	–	5	2	–	–	–	–	–	–	–	**7,18**	7
117.	*Samuel*	*Šúr*	3	GTajBanBys	–	4	–	–	–	–	–	3	–	–	–	**7,14**	7
118.	*Kristýna*	*Prokopová*	2	G FrýdČTěš	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,76**	7
119.	*Tomáš*	*Ježo*	3	GJHroncaBA	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,65**	28
120.	*Vanesa*	*Šmahovská*	4	G Metod BA	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
121.	*Hana*	*Tomanová*	3		–	–	4	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,23**	4
122.	*Kristian*	*Rigasz*	3	GJHroncaBA	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,04**	44
123.	*Miroslav*	*Beláčik*	4	EvSpŠMar	–	3	1	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
124.	*Dušan*	*Klíma*	4		4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,98**	6
125.	*Vendelín*	*Vincze*	3	GTajBanBys	–	–	–	–	–	–	–	3	–	–	–	**2,91**	3
126.	*Světlana*	*Gareeva*	4	G Nymburk	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,00**	2
127.	*Anna*	*Švarcová*	2	G Prachati	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**1,87**	20
128.–129.	*Adam*	*Hušek*	2	GRychnovKn	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
128.–129.	*Barbora*	*Zamazalová*	1	PORG PH	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://mks.mff.cuni.cz/*
e-mail: *mks@mff.cuni.cz*