1. série

Goniometrické funkce

1. ÚLOHA

Dokažte, že

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

2. ÚLOHA

Dokažte, že

$$\cos\frac{1}{15}\pi\cos\frac{2}{15}\pi\ldots\cos\frac{14}{15}\pi = -2^{-14}.$$

3. ÚLOHA

Nechť $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Jestliže $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, potom $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Dokažte.

4. ÚLOHA

Řešte rovnici $\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \cdots + \sin nx \sin n^2 x = 1$.

5. ÚLOHA

Dokažte nerovnost $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

Řešení 1. série

1. Úloha

Ze vzorce pro $\cos(5a)$, pro $a = 18^\circ$ vyjde, že $x = \cos^2 18^\circ$ musí splňovat rovnici $16x^2 - 20x + 5 = 0$. Z nerovnosti $x > \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ dostaneme, že kořen $x = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ můžeme vyloučit z podezření, zbývá jediná možnost $x = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$. Jelikož $\cos 18^\circ > 0$, je $\cos 18^\circ = \sqrt{x}$.

2. Úloha

Užitím součtového vzorce získáme:

$$\cos\frac{1}{15}\pi \dots \cos\frac{14}{15}\pi \sin\frac{1}{15}\pi \dots \sin\frac{14}{15}\pi =$$
$$= \frac{1}{2}\sin\frac{2}{15}\pi\frac{1}{2}\sin\frac{4}{15}\pi \dots \frac{1}{2}\sin\frac{28}{15}\pi = (-1)^7 2^{-14}\sin\frac{1}{15}\pi \dots \sin\frac{14}{15}\pi.$$

Po vydělení obou stran rovnosti součinem sinů dostáváme žádané.

3. Úloha

Z trigoniometrických pouček zjistíme, že pokud $\alpha + \beta + \delta = \pi$, pak $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\delta = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\delta}{2}$. Odečtením těchto rovností dostaneme $\cos\gamma - \cos\delta = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\delta}{2})$. Snadno nahlédneme, že buď pravá strana je nezáporná a levá je nekladná, nebo naopak. Tedy $\cos\gamma - \cos\delta = 0$, odkud lehce plyne dokazované.

4. Úloha

Ze vzorce pro $\sin x \sin y$ dostaneme $1 = \frac{1}{2}[(1 - \cos 2x) + (\cos 2x - \cos 6x) + \dots + (\cos(n^2 - n)x - \cos(n^2 + n)x)]$, tj. $\cos(n^2 + n)x = -1$. Tedy všechna řešení jsou $x = \frac{(2k+1)\pi}{n^2+n}$, kde k probíhá všechna celá čísla.

5. Úloha

Jest $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \sin x) - \sin(\cos x) = 2\sin y\cos z$, kde $y = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x)$ a $z = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \sin x + \cos x)$. Jelikož $|\cos x \pm \sin x| = \sqrt{\cos^2 x \pm 2\sin x\cos x + \sin^2 x} \le \sqrt{1 + |\sin 2x|} \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, je $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $0 < z < \frac{\pi}{2}$, takže $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0$.

Poznámka: Výše uvedené nepokládejte za vzorové řešení, ale za návody. Od vás zpravidla očekáváme podrobnější zdůvodnění jednotlivých kroků.