2. série
Reálné polynomy

Než začnete řešit: Reálným *polynomem* (dále jen polynomem) rozumíme reálnou funkci reálné proměnné p, kterou lze uvést na tvar

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,$$

kde $a_n \neq 0$. Číslo n se nazývá *stupeň* polynomu p. *Graf* polynomu p je množina $\{[x, y] : y = p(x)\}$. Číslo $a \in \mathbb{R}$ se nazývá *kořen* polynomu p, jestliže $p(a) = 0$. *Derivace* polynomu p ve výše uvedeném tvaru je polynom p', definovaný předpisem

$$p'(x) = \sum_{j=1}^{n} j a_j x^{j-1}.$$

Řekneme, že polynom p je *neklesající* na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ platí implikace $x < y \implies p(x) \leq p(y)$. Řekneme, že polynom p je konvexní na intervalu I, jestliže pro všechna $x, y \in I$ a $c \in (0, 1)$ je

$$p(cx + (1-c)y) \leq cp(x) + (1-c)p(y).$$

Pokud oním intervalem I je celá reálná osa $\mathbb{R}$, potom říkáme pouze „konvexní“, „neklesající“ (bez výslovného udání kde).
Bez důkazu přijměme tato tvrzení:
Jestliže a je kořen polynomu p, potom existuje polynom q stupně o jednu menšího tak, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $p(x) = (x - a)q(x)$.
Jestliže polynom p nabývá v některém bodě intervalu I kladné hodnoty a v jiném bodě záporné hodnoty, potom má p v I kořen.
Jestliže $p'(x) \geq 0$ ve všech bodech x intervalu I, potom p je neklesající na I.
Jestliže $p'(x)$ je neklesající na intervalu I, potom p je konvexní na I.
Řekneme, že body $A, B, C, D \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tvoří vrcholy obdélníka, jestliže tyto body jsou navzájem různé a pro jejich souřadnice platí : $B_1 - A_1 = C_1 - D_1$, $B_2 - A_2 = C_2 - D_2$, $(B_1 - A_1)(D_1 - A_1) + (B_2 - A_2)(D_2 - A_2) = 0$.
Znění úloh:

1. Úloha
Dokažte, že neklesající konvexní polynom má stupeň nejvýše jedna.

2. Úloha
Rozhodněte, zda každý polynom je rozdílem konvexních polynomů.

3. ÚLOHA
Nechť p je polynom. Jestliže pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí $(p(x) - p(y))^3 \leq (x - y)^8$, potom p má stupeň nejvýše 2.

4. ÚLOHA
Nechť polynom p nabývá v přirozených číslech pouze celých hodnot. Potom p nabývá v celých číslech pouze celých hodnot. Dokažte.

5. ÚLOHA
Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ a reálná čísla r, pro než graf polynomu $p(x) = x^n + rx$ obsahuje všechny vrcholy některého obdélníka.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA
Jelikož p je neklesající a konvexní, musí být p' a p'' nezáporné. Je-li $n \geq 2$, potom jeden z polynomů p', p'' je nezáporný polynom lichého stupně. Nechť $q(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ je polynom lichého stupně, nechť např. $a_n > 0$. Potom $q(x) = x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots \frac{x_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}) < 0$ pro x tak malé, že $x < -1$ a $x < -\left|\frac{a_j(n+1)}{a_n}\right|$ pro všechna $j = 0, \dots, n-1$.

2. ÚLOHA
Nechť $q(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ je polynom sudého stupně, $a_m > 1$. Buď K maximum absolutních hodnot čísel $a_j (j = 0, \dots, m)$. Podobně jako v příkladu 1 máme $q(x) > 0$ pro $|x| > (m+1)K$ a $q(x) \geq -\sum_{j=0}^{m} |a_j| K^j (m+1)^j$ pro $|x| \leq K(m+1)$. Existuje tedy konstanta c taková, že $q(x) > c$ pro všechna reálná čísla x. Mějme polynom p stupně n, sudé číslo $m > n$ a nechť q je druhá derivace polynomu $x^m + p(x)$. Najděme $c > 0$ tak, že $q(x) > -c$ pro všechna reálná x. Potom $[p(x) + x^m + \frac{c}{2}x^2] - [x^m + \frac{c}{2}x^2]$ je zápis p jako rozdílu dvou konvexních polynomů o čemž se přesvědčíme dvojím derivováním.

3. ÚLOHA
Buď $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, n \geq 3$. Podobně jako v prvním příkladu, pokud $|x| > K+1$, kde $K = 2(n+1)\max_{j=0}^{n} |\frac{a_j}{a_n}|$, potom $p(x) - p(0) > \frac{1}{2} a_n x^n$. Najděme $|x| > K+1$ tak, že $\frac{1}{8} a_n^3 x > 1$. Potom, $(p(x) - p(0))^3 > (x-0)^8$, což je spor.

4. ÚLOHA
Dokážeme indukcí podle stupně polynomu p. Pro polynomy stupně 0 tvrzení platí. Nechť tvrzení platí pro všechny polynomy stupně nejvýše $n-1$ a uvažme polynom p stupně n, splňující předpoklady. Podle indukčního předpokladu polynom $q(x) = p(x+1) - p(x)$, který je stupně $\leq n-1$, nabývá ve všech celých číslech celých hodnot. Nyní snadno dokážeme indukcí podle k, že $p(2-k)$ je celé číslo pro všechna přirozená čísla k, neboť $p(2-k) = p(2-k+1) - q(2-k)$.

5. ÚLOHA
Polynom $f(x) = x^2 + p^2(x)$ udává čtverec vzdálenosti bodu grafu funkce o prvé souřadnici x od počátku. Lze ukázat, že graf funkce p může obsahovat všechny vrcholy některého obdélníka jen tehdy, je-li n liché a střed takového obdélníka musí ležet v počátku. Pokud n je liché, nutnou a postačující podmínkou k existenci takového obdélníka s vrcholy na grafu p je, aby funkce f nebyla v oboru $x > 0$ prostá. To nastane právě když $n \geq 3$ a $r < \frac{2\sqrt{n}}{n-1}$.