4. série

Planimetrie — trojúhelník

1. ÚLOHA

Je dán trojúhelník ABC, který není pravoúhlý. Průsečík jeho výšek označíme V. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABC, ABV, AVC, VBC jsou shodné.

2. ÚLOHA

V trojúhelníku ABC se středem kružnice opsané O, kde platí $|AB| = |AC|$, je D střed strany AB a E těžiště trojúhelníka ACD. Dokažte, že přímka OE je kolmá na přímku CD.

3. ÚLOHA

Je dán trojúhelník ABC s obsahem 1 a reálné číslo p, $0 < p < 1$. Na stranách AB, BC, CA jsou po řadě sestrojeny body D,E,F tak, že

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|CF|}{|CA|} = p.$$

Vypočítejte obsah trojúhelníka DEF. Najděte takovou hodnotu čísla p, pro niž je obsah trojúhelníka DEF (při pevném trojúhelníku ABC) nejmenší.

4. ÚLOHA

V trojúhelníku ABC sestrojíme bod S — střed strany AB. Bod O je souměrně sdružený s průsečíkem výšek V trojúhelníka ABC podle středu S. Dokažte, že $|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle ACB| = \pi$.

5. ÚLOHA

Jestliže v trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ACB| > |\sphericalangle ABC| > |\sphericalangle BAC|$, potom bod I leží uvnitř trojúhelníka OBH, kde O,I,H značí po řadě střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané a průsečík výšek trojúhelníka ABC. Dokažte.

Řešení 4. série

1. ÚLOHA
Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, bod V leží v jeho vnitřku, pak platí $|\sphericalangle AVB| = \pi - (|\sphericalangle VAB| + |\sphericalangle VBA|) = \pi - (\frac{\pi}{2} - |\sphericalangle CBA| + \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle CAB|) = \pi - |\sphericalangle ACB|$. Je-li W bod souměrně sdružený s bodem V podle přímky AB, potom zřejmě $\triangle ABV \simeq \triangle ABW$; $|\sphericalangle AWB| + |\sphericalangle ACB| = \pi$; tedy čtyřúhelníku $AWBC$ lze opsat kružnici. Ta je společnou opsanou kružnicí trojúhelníkům ABC, AWC, tedy kružnice opsané trojúhelníkům ABC a ABV jsou shodné. Obdobně pro trojúhelníky AVC, VBC.

Je-li trojúhelník ABC tupoúhlý s tupým úhlem např. při vrcholu C, je trojúhelník ABV ostroúhlý s průsečíkem výšek C. Použijeme-li již dokázané pro trojúhelník ABV, dostaneme tvrzení úlohy.

2. ÚLOHA
Označme T těžiště trojúhelníka ABC, F střed strany AC, H průsečík přímek EC a AB. (Kreslete si obrázek!) FD je těžnice v trojúhelníku ADC, proto $E \in FD$, FD je střední příčka v $\triangle ABC$, proto $FD \parallel BC$. Přímka AT je osou souměrnosti trojúhelníka ABC, tedy $AT \perp BC$, také $AT \perp ED$; $O \in AT$. Dále body E, T dělí úsečky CH, CD v témž poměru $2:1$ (obě jsou těžnice, ale každá v jiném trojúhelníku), tedy $ET \parallel AB$. Odtud již vyplývá, že O je průsečík výšek trojúhelníka EDT, tudíž $OE \perp CD$.

3. ÚLOHA
Ze vzorce pro obsah trojúhelníka $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ plyne, že obsahy trojúhelníků ADF, BED, CFE jsou si rovny a hodnota každého z nich je $p(p-1)$. Obsah S trojúhelníka DEF je potom $S = 1 - 3p(1-p)$. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je $p(p-1) \leq (\frac{p+1-p}{2})^2 = \frac{1}{4}$, tedy $S \geq 1 - 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, přičemž rovnost zde nastává, právě když $p = 1-p$, tedy hledaná hodnota je $p = \frac{1}{2}$.

4. ÚLOHA
Jak jste jistě zjistili, tvrzení platí jen když vnitřní úhly trojúhelníka ABC při vrcholech A, B jsou ostré. V tom případě si stačí uvědomit, že $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle AVB|$ a použít výsledků z prvního příkladu. Je-li některý z vnitřních úhlů při vrcholech A, B pravý, tvrzení nemá smysl; je-li některý z nich tupý, platí místo dokazovaného vztahu rovnost $|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle ACB|$.

5. ÚLOHA *(podle A. Obržálka)*
Z nerovností $|\sphericalangle ABO| < |\sphericalangle ABI| < |\sphericalangle ABH|$, plyne, že bod I leží v úhlu $\sphericalangle OBH$. Označme S střed úsečky OH; O_a, S_a, H_a, I_a kolmé průměty bodů O, S, H, I na stranu a (obdobně $O_b, \ldots, O_c, \ldots$). Protože platí $|O_cI_c| > |I_cH_c|$ a $|O_aI_a| > |I_aH_a|$, leží bod S_c (S_a) mezi body O_c, I_c (O_a, I_a). Proto bod I leží uvnitř čtyřúhelníka BS_aSS_c. Odtud již snadno plyne, že I leží v trojúhelníku OBH.