5. série
Diskrétní úlohy

1. ÚLOHA
Nechť m, n jsou celá čísla, $n > 0$. Délka periody desetinného rozvoje čísla $\frac{m}{n}$ je nejvýše $n - 14$. Dokažte.

2. ÚLOHA
V obdélníkovém hostinci je lichý počet pistolníků, jejichž vzdálenosti jsou po dvou různé. V určitém okamžiku každý vystřelí na nejbližšího souseda. Dokažte, že i kdyby se všichni trefili, alespoň jeden zůstane naživu.

3. ÚLOHA
V rovině je dáno 5 přímek. Dokažte, že se mezi nimi najdou dvě takové, které svírají úhel ne větší než $36°$.
V následující dvou úlohách značí D_n množinu všech uspořádaných n-tic nul a jedniček.

4. ÚLOHA
Libovolná podmnožina D_n, jejíž dva prvky se liší alespoň na třech místech, má nejvýše $\frac{2^n}{n+1}$ prvků. Dokažte. Dále najděte pro $n = 1, 2, \dots, 6$ největší přirozené číslo $k(n)$, pro které existuje $k(n)$-prvková množina $\{y_1, \dots, y_{k(n)}\} \subset D_n$, jejíž libovolné dva prvky se liší alespoň na třech místech.

5. ÚLOHA
Určete nejmenší přirozené číslo m, pro které existuje m-prvková množina $Z \subset D_5$ taková, že pro každé $x \in D_5$ existuje $y \in Z$, které se od x liší nejvýše na jednom místě.

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Je-li desetinný rozvoj čísla $\frac{m}{n}$ konečný, je tvrzení zřejmé (perioda 0 délky 1). Není-li konečný, při postupném dělení, kdy „sepisujeme“ už jen nuly, můžeme dostat nejvýše $n-1$ různých zbytků při dělení číslem n, a tedy nejvýše $n-1$ „částečných dělenců“. Tedy perioda může mít délku nejvýše $n-1$.

2. ÚLOHA

Tvrzení dokážeme indukcí podle n. Pro jednoho pistolníka je tvrzení zřejmé. Nechť je $n \geq 3$ a pro $n-2$ pistolníků tvrzení platí. Pak vybereme dva pistolníky, jejichž vzájemná vzdálenost je nejmenší. Ti určitě vystřelí na sebe navzájem. Pokud vypustíme je a předpokládáme, že všichni, kteří stříleli na někoho z nich se netrefili, dostaneme přípustnou situaci pro $n-2$ pistolníků. Nyní užijeme indukční předpoklad.

3. ÚLOHA

Zvolme bod v rovině a přímky do něj (rovnoběžně) posuňme. Úhel dvou přímek se tím samozřejmě nezmění. Potom 5 úhlů mezi přímkami má součet $180°$, a tedy alespoň jeden je nejvýš $36°$.

4. ÚLOHA

K libovolnému prvku oné množiny sestrojíme dalších n prvků tak, že se od něj liší právě na jednom místě. Dostaneme tak $(n+1)$-prvkové po dvou disjunktní skupiny vektorů. Množina D_n má 2^n prvků, tedy podle Dirichletova principu může být těchto množin nejvýše $\frac{2^n}{n+1}$.

Pro $n = 1, 2, \ldots, 6$ vychází $k(n)$ po řadě $1, 1, 2, 2, 4, 8$. Pro $n = 1, 2, 3$ je to zřejmé. Pro $n = 4$: kdyby existovaly tři čtveřice, musely by se první a třetí a taky druhá a třetí shodovat nejvýše na jednom místě, tedy existují alespoň dvě místa, kde se odlišují první a třetí čtveřice i druhá a třetí čtveřice. Na těchto dvou místech se pak shodují první a druhá čtveřice. Dvě čtveřice existují: 0000 a 1111. Pro $n = 5$: kdyby existovaly více než čtyři pětice, nejméně tři by začínaly stejnou cifrou. Pokud u těchto pětic smažeme první cifru, dostaneme tři čtveřice, z nichž každé dvě se liší alespoň na třech místech, což, jak víme, není možné. Čtyři pětice existují: 00000, 11100, 00111, 11011. Pro $n = 6$: osm šestic existuje: 000000, 011100, 000111, 011011, 110001, 101101, 110110, 101010. Existenci devítiprvkové množiny požadovaných vlastností dovedeme ke sporu stejnou metodou, jako v případě $n = 5$.

5. ÚLOHA

Ke každému $y \in Z$ existuje právě šest takových x, které se od něj liší nejvýše na jednom místě. Musí tedy být $6m > 2^5$, odtud $m \geq 6$ (m je celé). Sedmiprvková množina Z existuje: 00000, 00111, 11100, 10011, 11110, 01011, 11101. Dále ukážeme, že šestiprvková množina Z neexistuje, čímž bude dokázáno, že $m = 7$. Definujme vzdálenost prvků $x, y \in$

$D_5 : v(x,y) =$ počet míst, ve kterých se liší x od y. Řekneme, že x a y sousedí, pokud $v(x,y) \leq 1$. Řekneme, že x sousedí s množinou $L \subset D_5$, pokud x sousedí s nějakým $y \in L$. Dále označme $D_5^1 = \{x; x \in D_5, x \text{ má na prvním místě jedničku}\}$, obdodně D_5^0 a položme $Z_0 = Z \cap D_5^0, Z_1 = Z \cap D_5^1$. Nechť tedy množina Z má šest prvků. Lehce se ukáže, že Z_0 i Z_1 jsou tříprvkové (sporem: nechť např. Z_1 má pouze dva prvky, pak nejvýše 14 prvků ze šestnáctiprvkové množiny Z_5^1 sousedí se Z). Nechť L a M jsou podmnožiny D_5, $L = \{l_1, \ldots, l_r\}$, $M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ a nechť $\forall i, j; 1 \leq i, i \leq r$ platí $v(l_i, l_j) = v(m_i, m_j)$. Pak s L sousedí stejný počet prvků jako s M (dokažte si to). Vzhledem k tomu, že platí $v(x,y) + v(y,z) = v(x,z) \mod 2$ a $v(x,y) + v(y,z) \geq v(x,z)$, lze ukázat, že pro $a, b, c \in Z_1$ (obdobně Z_0) mohou nastat pouze tyto možnosti: (lze předpokládat, že $v(a,b) \geq v(b,c) \geq v(a,c)$)

	I	II	III	IV	V	VI
$v(a,b)$	2	3	4	3	4	2
$v(b,c)$	1	2	3	3	2	2
$v(a,c)$	1	1	1	2	2	2

Množina Z vyhovuje zadání, tři prvky z D_5^1 sousedí s množinou Z_0, tedy nejméně 13 prvků z D_5^1 musí sousedit se Z_1 (analogicky pro D_5^0). Vzhledem k úvahám výše (o množinách M a L) stačí zvolit jednu konkrétní množinu Z_1 a určit počet prvků, které s ní sousedí. Vyšetříme případ VI. Položme $Z_1 = \{10000, 10011, 10101\}$. Pak v D_1^5 existuje pouze 12 prvků, které sousedí se Z_1 (nesousedí: 11111, 11110, 11100, 11001). Tedy případ VI nemůže nastat. Dále rozebereme případ III. Nechť $Z_1 = \{10000, 11111, 10001\}$. Pak prvky z D_5^1, které nesousedí se Z_1 jsou 11100, 10110, 11010. Tyto prvky nutně sousedí se Z_0 a tedy $Z_0 = \{01100, 00110, 01010\}$. Vzdálenosti prvků v Z_0 však odpovídají případu VI, který, jak víme, nemůže nastat. Případy I, II, V se vyloučí analogicky jako případ VI. Případ IV se převede na případ I.