2. série

Celá čísla

1. ÚLOHA

Pro která $n \in \mathbb{N}$ existují $i, j, k \in \mathbb{N}$ a $x, y, z \in (0,1)$ tak, že $i + j + k = n$, $i - x = \frac{n}{2}$, $j - y = \frac{n}{3}$, $k - z = \frac{n}{7}$?

2. ÚLOHA

Dokažte: Existuje $n > 1986$ tak, že mezi n^{2^n} a $(n+1)^{2^{n+1}}$ neleží žádné číslo tvaru $2^k!,\quad k \in \mathbb{N}$.

3. ÚLOHA

Najděte množinu $M \subset \mathbb{N}$ tak, aby splňovala

(V1) $1 \in M$
(V2) každé přirozené číslo je rozdílem dvou čísel z M
(V3) jestliže $M' \subset M$ a M' splňuje V1 i V2, pak $M' = M$ (tj. žádné číslo z M nelze vypustit, chceme-li V1, V2).

4. ÚLOHA

Najděte všechna přirozená řešení rovnice $a^4 + b^4 = c^4 + 4$, kde $a, b, c \leq 800$.

5. ÚLOHA

Najděte všechny množiny $A \subset \mathbb{Z}$ s následující vlastností: Jestliže $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b - a \in A$, $d - c \in A$, potom $bd - ac \in A$.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Pro $p \in \mathbb{N}$ označme $M_p = \{1, 2, \dots, p-1\}$. Nechť n vyhovuje podmínce úlohy. Potom $x = \frac{X}{2}$, $y = \frac{Y}{3}$, $z = \frac{Z}{7}$, kde $X \in M_2$, $Y \in M_3$, $Z \in M_7$. Úpravou vyšetřovaných rovnic dostaneme $n = i + j + k = \frac{X+n}{2} + \frac{Y+n}{3} + \frac{Z+n}{7}$, $n = 21X + 14Y + 6Z$. Nechť naopak n je přirozené číslo tvaru $21X + 14Y + 6Z$. Potom zřejmě čísla $n + X$, $n + Y$, $n + Z$ jsou dělitelná po řadě $2, 3, 7$. Tedy čísla $i = \frac{n+X}{2}$, $j = \frac{n+Y}{3}$, $k = \frac{n+Z}{7}$ jsou celá. Pokud $X \in M_2, Y \in M_3, Z \in M_7$, potom čísla x, y, z definovaná jako výše splňují požadovanou příslušnost do intervalu $(0, 1)$ a vztah $i + j + k = n$ vyjde snadným dosazením.

Závěr: Úloze vyhovují pravě čísla n tvaru $21X + 14Y + 6Z$, kde aspoň jedno z čísel X, Y, Z je různé od nuly.

2. ÚLOHA

Omlouváme se za nejasnost v zadáné úlohy: Není jedno, zda „mezi“ chápeme ve smyslu ostré nebo neostré nerovnosti. V případě neostré nerovnosti vznikají problémy, kterých si naštěstí nikdo z řešitelů a zprvu ani sám autor úlohy nevšiml. Je totiž nutno ukázat, že číslo tvaru k^{2^k} nemůže být současně faktoriálem, což je nejlépe vidět z ne zrovna elementárních vlastností rozložení prvočísel. Na hodnocení úlohy neměla tato nejasnost vliv. Nyní si ukážeme, jak lze úlohu vyřešit, chápeme-li „mezi“ ve smyslu ostré nerovnosti nebo věříme-li výše uvedenému tvrzení. Budeme postupovat sporem. Označme $x = 2000$. Nechť existují pro každé $p \in \mathbb{N}$ čísla $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$ tak, že $x^{2^x} < 2^{n_1}! < (x+1)^{2^{x+1}} < 2^{n_2}! < \cdots < 2^{n_p}! < (x+p)^{2^{x+p}}$. Položme $p = 2^{2x}$. Zřejmě $p > x$, $2x+1 < 2^x$ a $(2^p)^{2^p} < (2^{p+1})! < (x+p)^{2^{x+p}}$ (k poslednímu vztahu jsme použili, že $n_p > p$). Tedy $(x+p)^{2^{x+p}} < (2p)^{2^{x+p}} = (2^{2x+1})^{2^{x+p}} < (2^{2^x})^{2^{x+p}} = (2^{2^{2x}})^{2^p} = (2^p)^{2^p} < (x+p)^{2^{x+p}}$, což je spor.

3. ÚLOHA

a) Buď $M = \{1, 2, 4, 6, 8, \dots\}$. Zřejmě (V1) platí. Každé liché přirozené číslo p je rozdílem $p + 1 \in M$ a $1 \in M$. Každé sudé přirozené číslo je rozdílem $p + 2 \in M$ a $2 \in M$. Nechť $M' \subset M$ má vlastnosti (V1), (V2). K vyjádření lichého přirozeného čísla q rozdílem dvou prvků M' nutně potřebujeme, aby čísla $q + 1$ a 1 ležela v M'. Je tedy $M' = M$.
b) Druhou část úlohy vypustil tiskařský shoteck. V původním znění úlohy byl ještě dotaz, zda umíte najít více takových množin M. Našlo by se, třeba $M = \{1, 2, 5, 7, 9, 11, \dots\}$.

4. ÚLOHA

Pro každé celé číslo d označme r_d jeho zbytek po dělení 16 (tj. $r_d \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$, $d - r_d$ je dělitelné 16). Buď k liché číslo a m jeho čtvrtá mocnina. Potom z čísel $k-1, k+1$ je jedno dělitelné 4, druhé sudé číslo. Číslo $k^2 + 1$ je sudé. Tedy $m - 1 = k^4 - 1 = (k^2 - 1)(k^2 + 1) = (k - 1)(k + 1)(k^2 + 1)$ je dělitelné 16, $r_m = 1$ Jestliže m by byla naopak čtvrtá mocnina sudého čísla, potom je r_m zřejmě nula. Položme $d = a^4 + b^4 - c^4$, kde a, b, c jsou celá čísla. Z výše uvedeného vyplývá, že r_d nemůže být 4, tím spíš d není 4. Rovnice tedy nemá v oboru přirozených čísel žádné řešení.

5. ÚLOHA

Mějme takovou množinu A. Potom buď $A \subset \{0\}$, nebo A obsahuje nenulový prvek x. V druhém případě položme $a = 0$, $b = x$, $c = p - x$, $d = p$. Dostaneme $px \in A$ pro libovolné číslo p. Buď y nejmenší přirozené číslo, ležící v A. Jestliže $x \in A$, potom existují $k \in \mathbb{Z}$ a $r \in \{0, 1, \ldots, y - 1\}$ tak, že $x = ky + r$. Položme $a = 1$, $b = y + 1$, $c = -k - x$, $d = -k$. Potom dostáváme $r = bd - ac \in A$. Jelikož y bylo nejmenší přirozené číslo z A máme $r = 0$. Zjistili jsme, že A může být pouze $\emptyset$ nebo množina všech celočíselných násobků některého celého čísla. Snadno se přesvědčíme, že takové množiny vyhovují požadavkům úlohy.