6. série

Faktoriály a kombinační čísla

1. Úloha

Najděte všechny dvojice přirozených čísel k, n, pro něž je splněna nerovnost

$$k(1+2!+3!+\cdots+n!) < (n+1)!\,.$$

2. Úloha

Najděte všechny uspořádané dvojice (n,k) přirozených čísel, pro které je kombinační číslo $\binom{n}{k}$ prvočíslo.

3. Úloha

Sečtěte

$$1+\binom{n}{2}z+\binom{n}{4}z^2+\binom{n}{6}z^3+\cdots+\binom{n}{n}z^{\frac{n}{2}},$$

kde n je sudé přirozené číslo, z je kladné reálné číslo.

4. Úloha

Buď n přirozené číslo větší než 2. Nechť všechna kombinační čísla $\binom{n+1}{2}, \binom{n+1}{3}, \ldots, \binom{n+1}{n-1}$ jsou dělitelná číslem n. Potom n je prvočíslo. Dokažte.

5. Úloha

Buď q reálné číslo z intervalu $(1,2)$. Potom existují přirozená čísla n, k tak, že q^n je menší než $\binom{n}{k}$. Dokažte.

Řešení 6. série

1. ÚLOHA

Dokažme nejprve tuto pomocnou větu: Pro každé přirozené číslo n platí $1!+2!+\cdots+n! < (n+1)!$ Důkaz: matematickou indukcí 1) $n=1$, potom $1! < 2!$. 2) $n>1$, potom: $(1!+2!+\cdots+(n-1)!+n!)+(n+1)! < 2(n+1)! < (n+2)!$ (první nerovnost plyne z indukčního předpokladu, druhá z toho, že n je přirozené číslo). Pro $n=1$ nebo $n=2$ vyhovuje zadání jen $k=1$. Nechť $n>2$, pak a) je-li $k \geq n$, potom (k,n) nevyhovuje: $k(1!+2!+\cdots+n!) \geq n(1!+2!+\cdots+n!) > n((n-1)!+n!) = (n+1)!$ b) je-li $k<n$, potom (k,n) vyhovuje: $k(1!+2!+\cdots+n!) \leq (n-1)(1!+2!+\cdots+n!) = n(1!+2!+\cdots+n!)-(1!+2!+\cdots+n!) = n(1!+2!+\cdots+(n-2)!)+n(n-1)!+nn!-(1!+2!+\cdots+n!) < n(n-1)!+n!+nn!-n! = (n+1)!$ Tedy řešením je dvojice (1,1) a všechny dvojice (k,n), kde $k<n$.

2. ÚLOHA

Označme si P množinu všech prvočísel. ($P = 2,3,5,7,\ldots$). Ze zápisu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ je vidět, že je-li $p \in P$, p dělí $\binom{n}{k}$, pak p dělí některé z čísel menších nebo rovných n a tedy $p \leq n$. Je-li $\binom{n}{k} \in P$, potom, protože $\binom{n}{k}$ dělí $\binom{n}{k}$, je $\binom{n}{k} \leq n$. Je-li $\binom{n}{k} \leq n$, pak $\binom{n}{k} = 1$ nebo $\binom{n}{k} = n$. Z toho plyne, že řešení jsou všechny dvojice $(n,1)$ a $(n,n-1)$ kde $n \in P$.

3. ÚLOHA

Použijeme binomickou větu na $(1 \pm \sqrt{z})^n$:

$$(1) \qquad (1 \pm \sqrt{z})^n = 1 \pm \binom{n}{1}\sqrt{z} + \binom{n}{2} z \pm \cdots + \binom{n}{n}(\sqrt{z})^n .$$

Dosaďme (1) do $\frac{1}{2}[(1+\sqrt{z})^n + (1-\sqrt{z})^n]$ a získáme: $\frac{1}{2}[(1+\sqrt{z})^n + (1-\sqrt{z})^n] = \frac{1}{2}[(1+\binom{n}{1}\sqrt{z}+\binom{n}{2}z+\cdots+\binom{n}{n}(\sqrt{z})^n) + (1-\binom{n}{1}\sqrt{z}+\binom{n}{2}z-\cdots+\binom{n}{n}(\sqrt{z})^n)] = \frac{1}{2}(2 + 2\binom{n}{2}(\sqrt{z})^2+\cdots+2\binom{n}{n}z^{\frac{n}{2}}$. Tedy součet je $\frac{1}{2}[(1+\sqrt{z})^n + (1-\sqrt{z})^n]$.

4. ÚLOHA

Nechť n je složené číslo. Označme si nejmenší prvočíslo dělící n jako a. Zřejmě $2 \leq a \leq \sqrt{n}$. Nechť k je takové přirozené číslo, že a^k dělí n a a^{k+1} nedělí n. Čísla a a k vždy existují a jsou jednoznačně určena. a je prvočíslo a tudíž z a po sobě jdoucích přirozených čísel dělí právě jedno: a dělí $a!$, a^2 nedělí $a!$, a^k dělí $(n+1)n(n-1)\ldots(n-a+2)$ a a^{k+1} nedělí $(n+1)n(n-1)\ldots(n-a+2)$ Z toho plyne, že a^{k-1} dělí $\frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-a+2)}{a!}$ a a^k nedělí $\binom{n+1}{a}$. Tím jsme dokázali, že pro každé složené číslo n existuje číslo l, $2 \leq l \leq \sqrt{n} \leq n-1$ takové, že n nedělí $\binom{n+1}{l}$. Jesliže nyní n dělí všechna kombinační čísla $\binom{n+1}{2}, \binom{n+1}{3}, \ldots, \binom{n+1}{n-1}$, pak n nemůže být složené číslo, a tudíž je prvočíslo.

5. ÚLOHA

Čísla k, n budeme hledat ve tvaru $n=2k$. Dokážeme tedy, že pro každé $q \in (0,1)$ existuje přirozené číslo k takové, že $q^{2k} < \binom{2k}{k}$. Poznačme si $a_k = q^{2k}$, $b_k = \binom{2k}{k}$. Pak

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = q^2$, $\frac{b_{k+1}}{b_k} = c_k$, kde $c_k = 4(1 - \frac{1}{2k+2})$. Zřejmě najdeme $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $k > p$ je $c_k > q^2$. Zřejmě existuje $t > 0$ tak, že $a_p < tb_p$. Indukcí dokážeme, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnosti $a_{p+k} < tb_{p+k}$, $c_p^k b_p \leq b_{p+k}$. Nyní najdeme $r \in \mathbb{N}$ tak, že $(\frac{c_p}{q^2})^r > t$. Dostáváme $a_{p+r} = q^{2r} a_p \leq tq^{2r} b_p < c_p^r b_p \leq b_{p+r}$.

Závěr: Hledané n je $2p + 2r$, kde k je $p + r$.