2. série

Stereometrie

1. ÚLOHA
Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, $|AB| = 1$, $|AV| = 1$. Určete plochu největšího jehlanu $A'B'C'D'V'$ jemu podobného, který je do něj vepsán tak, že $\triangle A'B'V'$ leží v základně jehlanu, tedy ve čtyřúhelníku $ABCD$.

2. ÚLOHA
Jsou dány body A, B. Určete množinu všech takových bodů E v prostoru, že existují body C, D splňující podmínky:

(i) $|AB| = |CD| = |AC| = |BD|$,
(ii) D je středem úsečky CE.

3. ÚLOHA
Do krychle o straně 4 byly vrtány 3 různé otvory tvaru válce o poloměru 1, jejichž osy spojují středy protějších stěn krychle (skrz naskrz). Určete poloměr největší možné koule, jež se vejde do takto vzniklé dutiny.

4. ÚLOHA
V rovině jsou dány body A, B, C, S tak, že $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| = |\sphericalangle CSA| = 120°$. Dokažte, že pro každý bod X prostoru platí: je-li $X \neq S$, pak

$$|AX| + |BX| + |CX| > |AS| + |BS| + |CS|.$$

5. ÚLOHA
Na Zeměkrychli s městy ve vrcholech byla znemožněna povrchová doprava. Navrhněte náhradní spojení tunelovou dopravou, která by spojila město A se třemi nejbližšími městy tak, aby celková délka tunelů byla minimální. Společné úseky se do celkové dráhy započítavají pouze jednou. Prostorový aspekt délky nezanedbáváme. Navrhněte řešení i v případě, že neumíte dokázat jeho minimalitu.

Řešení 2. série

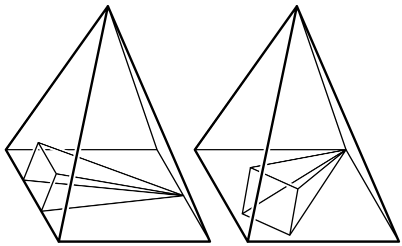
1. ÚLOHA

Označme $a = AB$, $a' = A'B'$, rovina $\rho = ABC$, jehlan $J = ABCDV$, jehlan $J' = A'B'C'D'V'$, $E' =$ střed $C'D'$, $F' =$ střed $A'B'$, C'', D'', $E'' =$ kolmé průměty bodů C', D', E' do ρ, K =kužel s vrcholem V vepsaný do J, $L =$ kužel s vrcholem C' a podstavou v ρ podobný s K.

Lemma: Pro libovolný bod $C' \in J$ je $L \subset J$.

Důkaz: Snadný, stačí kolem L opsat jehlan podobný a stejně orientovaný jako J.

Důsledek: V našem případě bude $B' \in L$, takže, zaručíme-li, aby trojúhelník $V'C'D' \subset J$, bude i $B' \in L \subset J$ a podobně $J' \subset J$. Mějme nějaký J' takový, že trojúhelník $V'C'D' \subset J$. Krátkou diskusí se dá ukázat, že vhodně použitými operacemi i) Otáčení trojúhelníku $V'C'D'$ kolem osy procházející jedním z jeho vrcholů a kolmé k ρ. ii) Posunování trojúhelníku $V'C'D'$ rovnoběžně s AB či AD. iii) Stejnolehlé zvětšení trojúhelníku $V'C'D'$ podle středu V', můžeme nalézt nový jehlan J', který není menší než původní a navíc má jednu z vyobrazených poloh.



obr. 1 obr. 2

V obou případech snadno spočítáme: $|E''D''| = \frac{1}{2}a'$, $|F'V'| = \frac{1}{2}\sqrt{15}a'$, $|D''A'| = \frac{1}{15}\sqrt{15}a'$, $|V'E''| = \frac{13}{30}\sqrt{15}a'$ a plochu jehlanu $J' : S' = (1+\sqrt{15}){a'}^2$.

Ad 1 — V tomto případě platí: $a = |F'V'| = a'_1 \frac{1}{2}\sqrt{15} = a'_1 k$.

Ad 2 — (Situace je symetrická podle roviny BVD.) Označíme-li X kolmý průmět D' do AB a Y, Z kolmé průměty D'', E'' do AD, pak $|DZ| = \frac{|V'E''|}{2}$, $|ZY| = \frac{E''D''}{\sqrt{2}}$ a navíc $|YA| = |D''X| = |D''A'|$, neboť $\triangle D''A'D' \simeq \triangle D''XD'$ (podle věty *usu*). Odtud $a = |DZ| + |ZY| + |YA| =$ po dosazení a úpravě

$$= a'_2 \frac{\sqrt{2} + \frac{13}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{15}}{\sqrt{30}} = a'_2 l.$$

Roznásobením a odhadem $\sqrt{15} < 4$ se ukáže, že $l < k$, neboli $a'_1 < a'_2$. Maximální J je tedy vepsán do J druhým způsobem a má plochu

$$S' = \frac{840}{99 + 4\sqrt{2} + 83\sqrt{15} + 24\sqrt{30}}.$$

2. ÚLOHA

Budiž $|AB| = 1$.

Lemma: V rovině jsou dány body A, B, C, C', D, D', E, F a kladné číslo r tak, že kružnice $k = (A, r)$ a $l = (F, r)$ se dotýkají v bodě B. D (resp. D') je středem úsečky CE (resp. CE'), $D \neq D'$, $r = |ED| = |ED'| = |BD| = |BD'|$. Je-li $|EA| > r$ a $|EF| > r$, pak právě jeden z bodů C, C' leží k A blíže než r.

Důkaz: Označme Ok (resp. Ol) kruh určený kružnicí k (resp. l). Průsečíky kružnice $m = (D, r)$ s kružnicemi k, l různé od bodu B označme K, L. Body K, L rozdělí kružnici m na dvě části P_1 a P_2, kde $P_1 \subset Ok \cup Ol$, $P_2 \cap (Ok \cup Ol) = \emptyset$. Zřejmě $E \in P_2$. Vzhledem k tomu, že $r = |DB| = |BF| = |FL| = |LD|$ je $DBFL$ rovnoběžník, podobně $ABDK$ je rovnoběžník. Tedy jest $DK \parallel DA$ a $DL \parallel BF$. Ale $AB \parallel BF$, neboť body A, B, F leží na jedné přímce. Odtud dostáváme, že $DK \parallel DL$ a tedy D je středem úsečky KL. Z tohoto faktu plyne, že P_1 a P_2 jsou polokružnice a tedy $C \in P_1 \subset Ok \cup Ol$. Nyní již snadno ukážeme, že bod B je středem úsečky CC' a z toho plyne, že body C, C' leží každý v jednom z kruhů Ok, Ol.

Vraťme se nyní k zadání úlohy. Buď E bod hledané množiny M. Buď D' (resp. E') bod souměrně sdružený s bodem D (resp. E) dle přímky CB. Pak snadno ověříme, že $E' \in M$. Množina M je tudíž symetrická dle středu B. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|EB| \leq |ED| + |DB| = 2$, $|EA| \geq |CE| - |AC| = 1$. Odtud plyne, že $M \subset M'$, kde M' je koule $Q_1 = (B, 2)$, z níž byly ubrány koule $Q_2 = (A, 1)$ a $Q_3 = (F, 1)$, kde F je bod souměrně sdružený s A podle B. Nyní ukážeme, že libovolný bod $E \in M$ už patří do M. V rovině ABE najdeme podle lemmatu bod C uvnitř a bod C' vně koule Q_2. Nechť $n = (B, |BC|)$ je kružnice ležící v rovině kolmé na přímku EB. Zjevně pro každý bod $N \in n$ bude $l = N'N = N'B = N'E$, kde N' je střed úsečky EN. Bod $C \in n$ leží vně Q_2. Proto existuje $C'' \in n$, ležící na povrchu Q_2 a pro ten platí $|AC''| = |C''D''| = |D''B| = |AB|$, kde D'' je střed EC'', tudíž $E \in M$, a proto $M = M'$.

3. ÚLOHA

Osy vyvrtaných válců tvoří kartézský souřadnicový systém s počátkem S. Ačkoliv korektní důkaz není lehký, všichni správně usoudili, že S bude středem hledané koule: $K = (S, r)$. Bod $X = [x, y, z]$, $|x| \leq 2, |y| \leq 2$, $|z| \leq 2$, je uvnitř díry právě tehdy, když $x^2 + y^2 < 1$ nebo $y^2 + z^2 < 1$ nebo $z^2 + x^2 < 1$. Bod $A = [a, a, a]$, kde $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ není uvnitř díry. Proto je $r \leq \sqrt{\frac{3}{2}} = |AS|$. Ale již koule s tímto poloměrem vyhovuje zadání, neb pro každý její bod platí $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq r$ a tedy $(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (x^2 + z^2) \leq 3$. Nyní se sporem ukáže, že alespoň jedna závorka má hodnotu menší nebo rovnu jedné a tedy bod X leží v díře.

4. ÚLOHA

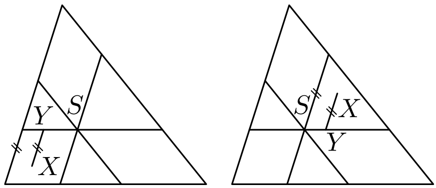
Označme $d(X) = |AX| + |BX| + CX|$ pro libovolný bod X. Zjevně $d(X) \leq d(X')$, kde X je kolmý průmět X' do roviny ABC.

1) Nechť je trojúhelník ABC rovnostranný
   a) Nechť je $X \in \triangle ABC$.

Lemma: Nechť $|BX| < |CX|$. Označíme Q kolmý průmět bodu X do výšky AR trojúhelníka ABC. Pak je-li Y uvnitř úsečky XQ, platí $d(Y) < d(X)$.

Důkaz: Budiž D bod souměrně sdružený s bodem B podle osy XQ. Označme E průsečík úsečky XC s osou úhlu $\sphericalangle DYC$. Platí: $|\sphericalangle EYC| > |\sphericalangle YEC|$, tudíž $|YC| < |EC|$, $|\sphericalangle EYD| > |\sphericalangle YED|$, tudíž $|DY| < |DE|$, $|\sphericalangle XYA| > |\sphericalangle YXA|$, tudíž $|AY| < |AX|$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|DE| \le |DX| + |XE|$, pak je zřejmé, že $|XE| + |EC| = |XC|$ a ze symetrie plyne, že $|DX| = |BX|$ a konečně $|BY| = |DY|$. Když tohle všechno sečteme, ejhle vyjde $d(Y) < d(X)$.

V trojúhelníku ABC vedeme středem S rovnoběžky s jeho stranami. Ty rozdělí trojúhelník ABC na kosočtverce a trojúhelníky. Ať už je bod X v kosočtverci či v trojúhelníku, dvojím užitím lemmatu postupně dostaneme $d(X) \ge d(Y) > d(S)$. (viz obrázek)



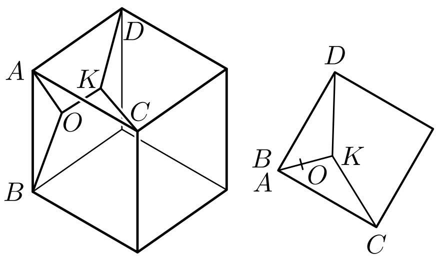
b) Leží-li bod X vně trojúhelníka ABC, pak se snadno ověří, že $d(X) > d(Y) > d(S)$, kde Y je bod z trojúhelníka ABC nejbližší k bodu X.

2) Pro obecný trojúhelník ABC označme A' (resp. B', resp. C') průsečík kružnice $k = (S, r)$ s polopřímkami SA (resp. SB, resp. SC), kde r je dostatečně velké (např. $r = d(S)$). Z 1) plyne: $|A'X| + |B'X| + |C'X| > |A'S| + |B'S| + |C'S|$. K tomuto vztahu přičteme nerovnosti $|AA'| + |AX| > |A'X|$, $|BB'| + |BX| > |B'X|$, $|CC'| + |CX| > |C'X|$, a rovnosti $|AA'| + |AS| = |A'S|$, $|BB'| + |BS| = |B'S|$, $|CC'| + |CS| = |C'S|$, čímž dostaneme požadovaný vztah.

5. úloha

Vydejme se z města A novým tunelem. Přijdeme na první odbočku O, odkud lze jít buď do jednoho města — označme ho B — nebo na křižovatku K, kde se tunel rozdvojí ke zbývajícím dvěma městům — označme je C a D. Nová dopravní síť se tedy obecně sestává z pěti (zjevně přímých úseků) OA, OB, OK, KC, KD, z nichž, pravda, některý může mít nulovou délku. Předpokládejme, že již známe O a chtějme najít nejvhodnější K. Jistě bude ležet v rovině OCD a navíc bude buď $|\sphericalangle OKC| = |\sphericalangle KCD| = |\sphericalangle DKO| = 120°$ (výsledek úlohy 4), nebo $O = K$ a zároveň $|\sphericalangle COD| > 120°$. Podobně budeme uvažovat neznajíce O, ale K. Zadívejme se na Zeměkrychli tak, aby města A a B splynula. Ježto B, O, K a A leží v jedné rovině, jeví se nám tunel AOK jako přímý.

Ze symetrie je zřejmé, že $|DK| = |CK|$. Označme S střed úsečky CD. Potom $SK \perp CD$ a odtud plyne $|CD| : |SK| = 2 \tan 60° = 2\sqrt{3}$. Zřejmě $K \in OS$. Dále budeme pracovat už jen v rovině, ve které leží body S, K, O, B a A. Vně Zeměkrychle doplníme rovnostranný trojúhelník ABE a opíšeme mu kruž-



nici k. Platí $|\sphericalangle BEA|+|\sphericalangle BOA| = 60^\circ+120^\circ = 180^\circ$ a čtyřúhelník $OBEA$ je tedy tětivový, a proto $|\sphericalangle BOE| = |\sphericalangle BAE| = 60^\circ$. Odtud $|\sphericalangle SOE| = |\sphericalangle SOB| + |\sphericalangle BOE| = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. Odtud plyne, že $O \in ES$ a tím jsme hotovi: Napřed najdeme S střed úsečky CD. Pak v rovině BAS najdeme mimo krychli třetí vrchol rovnostranného trojúhelníku ABE. Snadno sestrojíme kružnice k a $l = (S, \frac{2}{2\sqrt{3}})$; ($\frac{2}{2\sqrt{3}}$ je podle předchozího délka úsečky SK) a v průsečících těchto kružnic s ES najdeme křižovatky O a K. Úloha má proto právě tři řešení dle toho, které město označíme B.

Poznámka: Uplná diskuse k tomuto příkladu by byla poněkud delší. Není totiž jasné, co je to tunel z A do B. Pokud bychom ho chápali jako křivku, spojující body A a B museli bychom předpokládat, že máme definován pojem *délka křivky* a ten zavést není zcela triviální (existují značně „divoké“ křivky). Pokud budeme předpokládat, že hledaná dopravní síť je konečným sjednocením úseček, pak je naše řešení přesné.