5. série
Extrémální úlohy

1. ÚLOHA
a) Najděte kladná reálná čísla a, b, c tak, aby jejich součet byl sto a jejich součin byl co největší.
b) Najděte přirozená čísla a, b, c tak, aby jejich součet byl sto a jejich součin byl co největší.

2. ÚLOHA
V ostroúhlém trojúhelníku ABC určete bod X_{max} (resp. X_{min}), pro který je součet vzdáleností tohoto bodu od stran AB, AC, BC největší (resp. nejmenší).

3. ÚLOHA
a) (rozcvička) Určete reálné číslo x, pro které je výraz $x^2 - 7x + 1$ minimální.
b) (zahřívací kolo) Určete reálná čísla x, y tak, aby výraz $9x^2 + 4y^2 + 12xy - 24x - 16y + 36$ byl minimální.
c) Určete reálná čísla x, y, z tak, aby byl minimální výraz $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 4yz + 2x + 2y + 365\frac{1}{4}$.

4. ÚLOHA
Najděte funkci f definovanou na intervalu $< 0, 1 >$ tak, aby splňovala následující podmínky: a) f je spojitá, b) $\forall x \in < 0, 1 >$: $f(x) \geq 0$, c) $f(0) = f(1) = 0$, d) $f(\frac{1}{2}) = 1$, e) je-li g jiná funkce splňující podmínky a)–d), pak plocha ohraničená grafem funkce g a osou x je větší nebo rovna než plocha obrazce omezeného grafem funkce f a osou x. (Řešitelé z nižších ročníků, kteří nejsou obeznámeni s pojmem spojitosti funkce mohou nahradit podmínku a) podmínkou a') graf funkce f je sjednocením konečně mnoha uzavřených úseček (tj. úseček i s krajními body) kladné délky.

5. ÚLOHA
Je dán ostrý úhel $\sphericalangle AVB$ a bod X ležící v jeho vnitřku. Veďte bodem X přímku p tak, aby vzniklý trojúhelník měl co nejmenší a) plochu b) obvod.

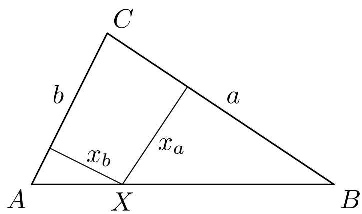
Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Vyjdeme ze známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, která má pro tři čísla tvar $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Odtud plyne, že $abc \leq (\frac{100}{3})^3$, přičemž rovnost nastává právě pro $a = b = c = \frac{100}{3}$. Tím máme vyřešen případ a). Případ b) řešíme obdobně jako úlohu 4. čtvrté sérii. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a \leq b \leq c$. Nyní ukážeme, že nutně $a = c$ nebo $a + 1 = c$. Nechť toto není pravda, pak $a + 1 < c$, neboli $c - a - 1 > 0$. Pak ale součin čísel $(a - 1), b, (c - 1)$ (jejich součet je sto) je ostře větší než abc Tedy pokud nějaká čísla řeší úlohu b), pak se každá dvě čísla z této trojice liší nejvýše o jedničku. Snadno zjistíme, že řešením jsou pouze trojice $[33, 33, 34]$, $[33, 34, 33]$, $[34, 33, 33]$.

2. ÚLOHA

Nechť X je libovolný bod trojúhelníka. Označme x_a, x_b, x_c jeho vzdálenosti od příslušných stran a $f(X) = x_a + x_b + x_c$. Nechť X je bod strany c a nechť $a \geq b$ (viz obr.)



Pak z rovností obsahů dostáváme $ax_a + bx_b = av_a = bv_b$, kde $v_a = f(A)$, $v_b = f(B)$ jsou výšky na strany a, b. Protože $a \geq b$ je $a(x_a + x_b) \geq ax_a + bx_b = av_a$ a $b(x_a + bx_b) \leq ax_a + bx_b = bv_b$. Tedy $v_a \leq x_a + x_b \leq v_b$, což ovšem znamená, že funkce f nabývá na úsečce AB minima v bodě A a maxima v bodě B. Nechť nyní X leží uvnitř $\triangle ABC$. Veďme bodem X rovnoběžku p s přímkou AB. Označme D (resp. E) průsečík přímky p s přímkou AC (resp. BC). Podle předchozích úvah leží extrémy funkce f v krajních bodech úsečky DE, to jest na obvodu trojúhelníka ABC. Opakováním předchozích úvah pak dostaneme, že extrémy se nabývají ve vrcholech trojúhelníka ABC. Je-li např. $a \geq b \geq c$, pak $X_{min} = A$, $X_{max} = C$. Dále snadno nahlédneme, že ve speciálních případech (trojúhelník rovnoramenný či rovnostranný) se maximum či minimum nabývá dokonce na celé straně či v celém trojúhelníku.

3. ÚLOHA

a) $x^2 - 7x + 1 = (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{45}{4}$. Minimální hodnotu nabývá výraz pro $x = \frac{7}{2}$, neboť jeho velikost závisí pouze na velikosti $(x - \frac{7}{2})^2$ a ta je zřejmě nejmenší pro $x = \frac{7}{2}$.

b) Zkoumaný výraz je roven $(3x - 2y + 4)^2 + 20$. Podle předchozích úvah je jasné, že minimální hodnotu nabývá pro x, y taková, že $3x - 2y + 4 = 0$. Takových dvojic je ovšem nekonečně mnoho. (Zvolíme-li si y libovolně, lze vždy najít x tak, aby uvedená rovnost byla splněna).

c) Zkoumaný výraz je roven $2(x + 1)^2 + (y - x + 1)^2 + (y + z)^2 + 362\frac{1}{4}$. Minimum se nabývá pro $x = -1$, $y = -2$, $z = 2$.

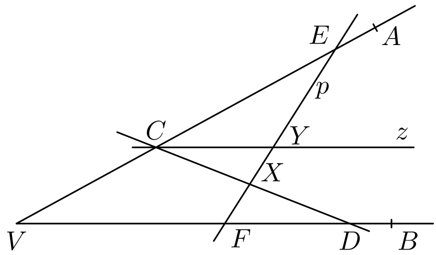
4. ÚLOHA

Pro přirozené číslo $n \geq 2$ sestojme funkci f_n: $f_n(x) = 0$, pro $x \in < 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \cap (\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1 >$, $f_n(x) = 1 - n|x - \frac{1}{2}|$, pro $x \in < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n} >$. (Nakreslete si obrázek). Funkce f_n splňují podmínky a)–d). Plocha obrazce ohraničeného osou x a grafem funkce f_n je $\frac{1}{n}$. Mějme nyní libovolnou funkci f, splnující podmínky a)–d). Ze spojitosti funkce f plyne, že $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, |x - \frac{1}{2}| < \delta)$ platí $|f(x) - 1| < \epsilon$. Zvolíme-li $\epsilon = \frac{1}{2}$, pak jistě existuje $\delta > 0$ tak, že na intervalu $(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta)$ má funkce f větší hodnotu než $\frac{1}{2}$. To ovšem znamená, že do vyšetřovaného obrazce lze umístit obdélník o stranách $\frac{1}{2}$ a 2δ. Plocha obrazce je větší než kladné číslo δ.

Nechť f je funkce splňující a)–e). Pak plocha zkoumaného obrazce je rovna nějakému kladnému číslu P. Nyní ale stačí zvolit přirozené číslo k větší než $\frac{1}{P}$. Funkce f_k pak splňuje a)–d) s plocha pod grafem f_k je menší než P. Funkce daných vlastností tedy neexistuje.

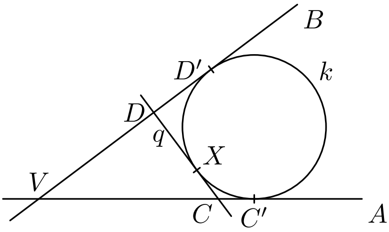
5. ÚLOHA

Vzniklý trojúhelník bude mít nejmenší plochu, pokud bude bod X středem strany ležící na p. Důkaz: přímka q nechť je obrazem přímky AV při středové souměrnosti se středem X, bod D je průsečíkem přímek BV a q, bod C je obrazem bodu D ve středové souměrnosti se středem X. Nechť p je nějaká přímka procházející bodem X různá od přímky CD. Označme si E průsečík přímek p a AV, F průsečík přímek p a BV.



Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $|VF| < |VD|$ (viz obrázek). Označme si z obraz přímky BV ve středové souměrnosti se středem X a Y průsečík přímek p a z. Platí $P_{VDC} = P_{VFXC} + P_{FDX} = P_{VFXC} + P_{CXY} < P_{VFXC} + P_{CXY} + P_{CYE} = P_{FVE}$. Tedy $P_{VDC} < P_{VFE}$, což jsme chtěli dokázat.

Hledaný trojúhelník musí mít tuto vlastnost — kružnice, dotýkající se VA, VB, p a neležící uvnitř hledaného trojúhelníka má s přímkou p dotyk v bodě X. Důkaz: nechť k je kružnice dotýkající se VA, VB a mající s úsečkou VX jediný společný bod X. Označme si q tečnu této kružnice v bodě X, C (resp. D) průsečík přímky q a přímky AV (resp. BV), C' (resp. D') bod dotyku přímky AV (resp. BV) a kružnice k. (viz obrázek)



Zřejmě platí $|DX| = |D'D|$ a $|CX| = |C'C|$, $|VD'| = |VC'|$, tedy obvod VCD je roven dvojnásobku $|VC'|$. Mějme nyní nějakou přímku p procházející bodem X. Označme si E průsečík přímek p a AV, F průsečík přímek p a BV. Dále sestrojíme kružnici l dotýkající se AV, BV, p, ležící vně trojúhelníka VEF. Označme si E' bod dotyku kružnice l a přímky AV, F' bod dotyku kružnice l a přímky BV, Y bod dotyku kružnice l a přímky p. (viz obr.) Jako v předchozím dostaneme — obvod EVF je roven dvojnásobku $|VE'|$. Pokud by trojúhelník VEF měl menší obvod než trojúhelník VCD, pak by muselo být $|VE'| < |VC'|$ a tedy poloměr kružnice l by byl menší než poloměr kružnice k. Pak by ale bod X ležel uvnitř kružnice l a přímka p by měla s kružnicí l společné alespoň dva body, což není možné, neboť p je tečna k l.