# 8. série
## Od každého trochu

1. ÚLOHA
Určete kolika způsoby lze do sedmi přihrádek umístit 17 červených a 21 modrých kuliček, požadujeme-li splnění těchto podmínek

(a) v každé přihrádce je alespoň jedna modrá kulička,
(b) existuje přihrádka, ve které jsou právě tři červené kuličky.

2. ÚLOHA
Každý ze skupiny 1988 lidí má mezi zbývajícími lidmi této skupiny osm dlužníků a osm věřitelů. (Předpokládejme, že dlužník dané osoby nemůže být zároveň jejím věřitelem). Rozdělte skupinu na $M$ podskupin tak, aby v rámci podskupiny nikdo nikomu nic nedlužil. Určete minimální $M$ tak, aby to vždy šlo.

3. ÚLOHA
Určete reálná čísla $x$, pro než existuje kladná konstanta $K$ taková, že pro všechna přirozená čísla $n$ platí

$$|\sin(11x+1)+\sin(22x+1)+\cdots+\sin(11nx+1)|<K.$$

4. ÚLOHA
V prostoru je dána rovina $\rho$ a v ní elipsa $E$. Určete geometrické místo bodů $V$, pro které platí: $V$ je vrcholem kužele $L$ a $L\cap\rho=E$.

5. ÚLOHA
Nechť $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$ jsou všechny kladné kořeny rovnice $\tan x=x$. Potom se pro velká $n$ výraz $\sqrt{n}(\sqrt{x_n+1}-\sqrt{x_n})$ neomezeně blíží číslu $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, přesně řečeno pro každé kladné číslo $\epsilon$ existuje $n_0$ tak, že pro všechna $n>n_0$ je

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{x_n+1}-\sqrt{x_n}\right)\in\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\epsilon,\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\epsilon\right).$$

Dokažte.

# Řešení 8. série

1. Úloha

Zabývejme se nejprve otázkou, kolika způsoby lze umístit $k$ kuliček (jedné barvy) do $n$ přihrádek (bez dalších omezujících podmínek). Vezměme $k$ kuliček a $n-1$ tyčinek a uspořádejme je. Např.: $\circ\circ \mid \circ \mid\mid \circ\circ\circ \mid$.

Toto můžeme chápat jako rozmístění $k$ kuliček v $n$ přihrádkách — vše, co je před první tyčinkou dáme do první přihrádky, kuličky mezi první a druhou tyčinkou dáme do druhé přihrádky atd. Výše uvedený obrázek odpovídá následujícímu umístění šesti kuliček v pěti přihrádkách:

Protože existuje právě $N!$ způsobů, kterými lze uspořádat $N$ předmětů, je počet všech možných uspořádání $k$ kuliček a $n-1$ tyčinek roven číslu $(k+n-1)!$. Vzhledem k tomu, že na uspořádání kuliček (resp. tyčinek) nezáleží (neboli 1 2 | 4 6 | 5 | 3 je pro nás totéž jako 2 4 | 1 3 | 5 | 6) musíme číslo $(k+n-1)!$ vydělit číslem $k!$ (počet všech uspořádání $k$ kuliček) a číslem $(n-1)!$ (počet všech uspořádání $(n-1)$ tyčinek). Dostáváme tak počet všech uspořádání $k$ kuliček v $n$ přihrádkách:

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

Zabývejme se nyní modrými kuličkami. Do každé přihrádky dejme jednu modrou kuličku a zbývajících čtrnáct můžeme umístit v sedmi přihrádkách $\binom{20}{14}$ způsoby.

A nyní červené kuličky — vybereme jednu přihrádku (to lze učinit právě sedmi způsoby) a dejme do ní tři červnené kuličky. Zbývá rozmístit čtrnáct červených kuliček v šesti přihrádkách, což lze učinit $\binom{19}{14}$ způsoby. Zdálo by se tedy, že všech možností je $7\binom{17}{14}$ a mnozí z vás v tomto místě své úvahy ukončili. Po kratším přemýšlená však zjistíte, že výše uvedených způsobem rozmísťování červnených kuliček se budete občas opakovat, např. není jasné zda rozmístění 3 3 4 1 5 0 1 vzniklo tak, že jsem nejprve zvolil první přihrádku, do ní dal tři červené kuličky a zbylé pak rozmístil do zbylých přihrádek, nebo, že jsem zvolil druhou přihrádku, do ní dal tři červnené kuličky a zbylé pak umístil ve zbylých přihrádkách. Musíme tedy počítat opatrněji. Označme $P(i)$ počet všech rozmístění takových, že v $i$-té přihrádce jsou právě tři kuličky a položme $a_1 = P(1) + P(2) + \dots + P(7)$. Dále položme $P(i,j)$ počet všech rozmístění kuliček, při kterých jsou v $i$-té a v $j$-té přihrádce právě tři kuličky ($P(i,j)$ definujeme jen pro ty dvojice $i$, $j$, pro které $1 \le i < j \le 7$). Položme $a_2 = P(1,2) + P(1,3) + \dots P(1,7) + P(2,3) + P(2,4) + \dots + P(5,6) + P(5,7) + P(6,7)$. Podobně definujeme $P(i,j,k)$, $P(i,j,k,l)$, $P(i,j,k,l,m)$. Nyní snadno ověříme, že hledaný počet je $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5$.

Rozmístění, ve kterých je právě jedna přihrádka obsahující tři kuličky je započtena jen jednou (v $a_1$). Rozmístění, ve kterých jsou právě dvě přihrádky, které obsahují tři kuličky jsou započítany dvakrát v $a_1$ a „mínusjedenkrát“ v $a_2$, tedy celkově jedenkrát. Rozmístění, ve kterých jsou právě tři přihrádky obsahující tři kuličky jsou započteny třikrát v $a_1$, „mínustřikrát“ v $a_2$ a jedenkrát v $a_3$. Celkově opět jedenkrát. Další postup je snad už zřejmý. Výše uvedené úvahy se v kombinatorických úlohách objevují dosti často a nazývají se *princip a zapojovaní a vylučování prvků* (pro milovníky cizích slov *princip inkluze a exkluze*).

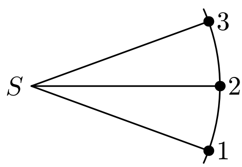
Nyní spočteme $a_i$: $a_1 = \binom{7}{1}\binom{19}{14}$, $a_2 = \binom{7}{2}\binom{15}{11}$, $a_3 = \binom{7}{3}\binom{11}{8}$, $a_4 = \binom{7}{4}\binom{7}{4}$, $a_5 = \binom{7}{5}\binom{3}{2}$. (První činitel vždy znamená počet sčítanců $P(i, j, \dots)$ viz. definici $a_i$ s druhý pak hodnotu každého z těchto sčítanců). Odtud dostáváme $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = \binom{7}{1}\binom{19}{14} - \binom{7}{2}\binom{15}{11} + \binom{7}{3}\binom{11}{8} - \binom{7}{4}\binom{7}{4} + \binom{7}{5}\binom{3}{2}$ a řešením úlohy 1 je tedy číslo

$$\binom{20}{6}\left[\binom{7}{1}\binom{19}{14} - \binom{7}{2}\binom{15}{11} + \binom{7}{3}\binom{11}{8} - \binom{7}{4}\binom{7}{4} + \binom{7}{5}\binom{3}{2}\right].$$

2. ÚLOHA

Minimální $M$ je 17.

a) Najdeme takovou skupinu 1988 lidí, aby bylo vidět, že $M$ je alespoň 17 — rozdělme skupinu na 240 skupin $A_1, \dots, A_{240}$ po osmi lidech a zbývajících 68 lidí na čtyři skupiny $B_1, \dots, B_4$ po sedmnácti lidech. Označme ještě $A_0 = A_{240}$ a $A_{241} = A_1$. Nechť každý člověk ze skupiny $A_i$ je dlužníkem každého člověka ze skupiny $A_{i+1}$ a věřitelem každého člověka ze skupiny $A_{i-1}$. Ve skupině $B_1$ (a podobně v dalších třech) zavedeme tyto vztahy — představme si lidi této skupiny (očíslujeme si je $1, \dots, 17$) a umístíme na kružnici ve vrcholech pravidelného 17-úhelníka.




Položme $d(i, j)$ rovno úhlu, o který je nutno otočit ve směru hodinových ručiček přímku $Si$, aby splynula s přímkou $Sj$ (otáčíme kolem bodu $S$). Zřejmě $d(i, j) + d(j, i) = 2\pi$. Nechť $i$ dluží $j$ právě tehdy, když $d(i, j) < \pi$. Zřejmě má každý právě osm dlužníku a právě osm věřitelů. Rozdělení této skupiny na méně než 17 podskupin není možné (každá dvojice z této skupiny je buď dvojice věřitel-dlužník nebo dlužník-věřitel).

b) $M$ je nejvýše 17. Důkaz je velmi snadný a přenecháváme ho tedy tobě, milý příteli.

3. ÚLOHA

Označme si $f_n(x) = \sin(11x+1) + \sin(22x+1) + \cdots + \sin(11nx+1)$ a pokusme se vyjádřit $2f_n(x)\sin(\frac{11}{2}x)$. Užitím vzorce $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&2f_n(x)\sin\left(\tfrac{11}{2}x\right) = \\
&= \sin\left(11x+1\right)\sin\left(\tfrac{11}{2}x\right) + \sin\left(22x+1\right)\sin\left(\tfrac{11}{2}x\right) + \cdots + \sin\left(11nx+1\right)\sin\left(\tfrac{11}{2}x\right) = \\
&= \cos\left(\tfrac{11}{2}x+1\right) - \cos\left(\tfrac{33}{2}x+1\right) + \cos\left(\tfrac{33}{2}x+1\right) - \cos\left(\tfrac{55}{2}x+1\right) + \dots \\
&\cdots + \cos\left(\tfrac{22(n-1)}{2}x+1\right) - \cos\left(\tfrac{22(n+1)}{2}x+1\right) = \\
&= \cos\left(\tfrac{11}{2}x+1\right) - \cos\left(\tfrac{22(n+1)}{2}x+1\right).
\end{aligned}$$

Pokud $\sin(\frac{11}{2}x) \neq 0$, můžeme z této rovnosti vypočítat $f_n(x)$:

$$f_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{11}{2}x+1\right) - \cos\left(\frac{22(n+1)}{2}x+1\right)}{2\sin\left(\frac{11}{2}x\right)}$$

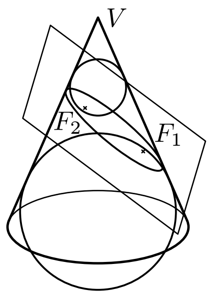
a tedy

$$\left|f_n(x)\right| = \left|\frac{\cos\left(\frac{11}{2}x+1\right) - \cos\left(\frac{22(n+1)}{2}x+1\right)}{2\sin\left(\frac{11}{2}x\right)}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{11}{2}x\right)\right|}.$$

Pro dané $x$ je pravá strana poslední nerovnosti hledanou konstantou (neboť nezávisí na $n$). Snadno ověříme, že pokud $\sin(\frac{11}{2}x) = 0$, jsou všechny sčítance zkoumaného výrazu rovny číslu $\sin 1$ a v tomto případě se nám $f_n(x)$ nepodaří odhadnout číslem nezávislým na $n$.

4. ÚLOHA

Uveďme nejprve Quételetovu-Dandelinovu větu — řezem na rotační kuželové ploše rovinou, která není ani vrcholová, ani kolmá k ose plochy, je kuželosečka, jejímiž ohnisky jsou dotykové body kulových ploch, které lze vepsat do kuželové plochy tak, že se dotýkají roviny řezu. Obrázek znázorňuje situaci, kdy je výslednou kuželosečkou elipsa.




Naznačme důkaz věty pro tento případ. Zvolme bod $A$ v řezu a označme $p_A$ površku procházející bodem $A$, $H_A$ (resp. $D_A$) průnik $p_A$ s horní (resp. dolní) koulí. Pak $|F_2A| = |H_AA|$ a $|F_1A| = |D_AA|$. $|F_1A| + |F_2A| = |D_AH_A|$ a toto číslo zjevně nezávisí na volbě bodu $A$.

Nyní již snadno vyřešíme naši úlohu. Označme si $V_1$ a $V_2$ hlavní vrcholy elipsy. Snadno ukážeme, že bod $V$ musí ležet v rovině kolmé k $\rho$ a obsahující body $V_1$ a $V_2$. Podívejme se na situaci v této rovině (nakreslete si obrázek). Označme $T_1$ (resp. $T_2$) průnik přímky $V_1V$ (resp. $V_2V$) a horní koule. Potom $|VV_1| = |VT_1| + |T_1V_1| = |VT_2| + |F_1V_1| =$

$|VV_2|-|V_2T_2|+|F_1V_1| = |VV_2|-|V_2F_1|+|F_1V_2|$. Tedy $|VV_1|-|VV_2| = |F_1V_1|-|F_1V_2|$ a výraz vpravo nezávisí na $V$. Odtud plyne, že hledaná množina je částí hyperboly, která leží v rovině kolmé k $\rho$ a procházející body $V_1$ a $V_2$. Tato hyperbola má ohniska $V_1$ a $V_2$ a vrcholy $F_1$ a $F_2$. Sami snadno ověřte, že všechny body této hyperboly s vyjímkou bodů $F_1$ a $F_2$ již řeší naši úlohu.

5. ÚLOHA

a) Pro každé přirozené $n$ má rovnice $\tan x = x$ v intervalu $(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ alespoň jeden kořen. (Tvrzení je zřejmé z obrázku, ale jeho přesný důkaz není snadný, narážíme zde na stejné obtíže jako v závěru komentáře k třetí úloze šesté série.)

b) Pro každé přirozené číslo $n$ má rovnice $\tan x = x$ v intervalu $(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ nejvýše jeden kořen. Toto tvrzení dokážeme sporem užitím známé nerovnosti $\tan y > y$ pro $y \in (0, \frac{\pi}{2})$. Nechť toto tvrzení neplatí. Pak existují $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tak, že $n\pi + \alpha = \tan(n\pi+\alpha) = \tan\alpha$ a $n\pi+\beta = \tan(n\pi+\beta) = \tan\beta$. Nechť $\beta > \alpha$, pak $(\beta-\alpha) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Odečtením výše uvedených rovností dostaneme $\beta - \alpha = \tan\beta - \tan\alpha$. Avšak $\beta - \alpha < \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha$, což je spor.

c) V intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ ani v intervalech $< (n+\frac{1}{2})\pi, (n+1)\pi >$ ($n$ přirozené) rovnice $\tan x = x$ kořeny nemá a tedy $x_n \in (n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$.

d) Z obrázku je opět patrno, že kořeny $x_n$ se v intevalech $(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi)$ „stěhují stále více doprava“. Přesněji pro každé kladné $d$ (sebemenší), existuje přirozené $n_1$ tak, že pro všechna přirozená $n$ větší než $n_1 : x_n \notin (n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi - d)$.

*Důkaz:* Nechť je dáno $d > 0$ (stačí předpokládat, že $d < \frac{\pi}{2}$). Na intevalu $(n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi - d)$ nabývá funkce tan největší hodnotu v pravém krajním bodě tohoto intervalu (neboť je na tomto intervalu rostoucí): $\tan x \le \tan(n+\frac{1}{2})\pi - d) = \tan(\frac{\pi}{2} - d)$ pro $x \in (n\pi, (n+\frac{1}{2})\pi - d)$. Funkce $f(x) = x$ je na tomto intervalu jistě větší než $n\pi$. Stačí tedy zvolit $n_1$ tak, aby $n_1 > \frac{\tan(\frac{\pi}{2}-d)}{\pi}$.