# 1. série
## Planimetrie

1. ÚLOHA
Dokažte, že pro každý trojúhelník platí nerovnost:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2}\geq\frac{27\cdot r}{8\cdot S}\,,$$

kde $S$ značí obsah trojúhelníku a $r$ poloměr kružnice vepsané, $a, b, c$ jsou velikosti stran a $\alpha, \beta, \gamma$ velikosti úhlů. Pro které trojúhelníky platí rovnost?

2. ÚLOHA
V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ prochází úhlopříčka $BD$ středem $N$ úsečky $AC$. Dokažte, že

$$2|BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2\,.$$

3. ÚLOHA
Rovnostranné trojúhelníky $ABC, CDE$ a $EHK$ jsou stejně orientovány, přičemž bod $D$ je středem úsečky $AK$. Dokažte, že trojúhelník $BHD$ je také rovnostranný.

4. ÚLOHA
Body $M$ a $P$ jsou středy stran $BC, CD$ konvexního čtyřúhelníka $ABCD$. Je dána hodnota $a = |AM| + |AP|$. Dokažte, že obsah čtyřúhelníka je menší než $a^2/2$.

5. ÚLOHA
Na průměru $AC$ kružnice je dán bod $E$. Veďte bodem $E$ tětivu $BD$ dané kružnice tak, aby obsah čtyřúhelníku $ABCD$ byl maximální.

# Řešení 1. série

1. ÚLOHA

Podle vzorce $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos x)$ a podle kosinové věty platí:

$$\frac{1}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2a}(1+\cos\alpha) = \frac{1}{2a}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{4abc}\,.$$

Podobně si přepíšeme:

$$\frac{1}{b}\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{c^2+a^2-b^2+2ac}{4abc}\,,\quad \frac{1}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{4abc}\,.$$

Označíme-li $T$ levou stranu dokazované nerovnosti, pak platí:

$$T = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{4abc} = \frac{s^2}{abc}\,,$$

kde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Dále je $S = r\cdot s$, tedy $T = \frac{s^3}{abc}\cdot\frac{r}{S}$. Podle AG nerovnosti platí $\frac{1}{3}(a+b+c) \geq \sqrt[3]{abc}$, což je ekvivalentní s $s^3 \geq \frac{27}{8}abc$ a rovnost nastává právě tehdy, když $a=b=c$. Po dosazení za $s^3$ dostáváme $T \geq \frac{27r}{8S}$. Rovnost nastává pro rovnostranné trojúhelníky.

2. ÚLOHA

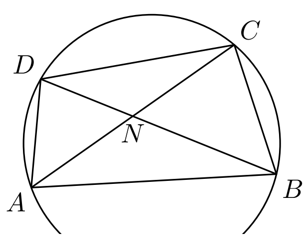
Podle věty o protilehlých úhlech v tětivovém čtyřúhelníku je $|\sphericalangle BCD| = 180^\circ - \alpha$, kde $\alpha = |\sphericalangle BAD|$. Podle kosinové věty a vzhledem k tomu, že $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$, platí:

$$|BD|^2 = |AB|^2+|AD|^2-2|AB||AD|\cos\alpha\,,\quad |BD|^2 = |BC|^2+|CD|^2+2|BC||CD|\cos\alpha\,.$$

Tedy

$$(\diamondsuit)\qquad 2|BD|^2 = |AB|^2+|BC|^2+|CD|^2+|DA|^2-2(|AB||AD|-|BC||CD|)\cos\alpha\,.$$

Vzhledem k tomu, že platí rovnosti $|\sphericalangle ANB| = |\sphericalangle DNC|$, $|\sphericalangle BNC| = |\sphericalangle AND|$, $|\sphericalangle ABN| = |\sphericalangle DCN|$, $|\sphericalangle BCN| = |\sphericalangle ADN|$ (obvodový úhel nad obloukem $AD$ (případně $AB$) kružnice, do které je tětivový čtyřúhelník vepsán), platí:

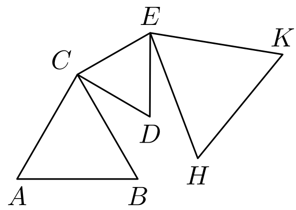



$$\triangle ABN \sim \triangle DCN\,,\quad \triangle BCN \sim \triangle ADN\,.$$

Z toho $|AB||DN| = |DC||AN|$ a $|AD||CN| = |BC||DN|$. Vynásobením rovnic dostáváme $|AB||DN||AD||CN| = |DC||AN||BC||DN|$ a protože

$|AN| = |CN|$, platí $|AB||AD| = |BC||CD|$. Dosazením do ($\diamondsuit$) dostáváme požadovanou rovnost.

3. ÚLOHA




Otočením roviny kolem jednoho bodu o úhel $\alpha$ a otočením roviny kolem jiného bodu o úhel $-\alpha$ dostaneme jen posunutí. Otočíme-li $\triangle CAD$ kolem bodu $C$ o úhel 60°, dostaneme $\triangle CBE$ (z rovnostrannosti trojúhelníků $ABC$, $CDE$). Otočíme-li $\triangle HBE$ kolem bodu $H$ o úhel $-60°$, dostaneme $\triangle HFK$ (Bod $E$ přejde do bodu $K$ — plyne z rovnostrannosti trojúhelníka $EHK$). Při prvním otočení přešel bod $D$ do bodu $E$, při druhém bod $E$ do bodu $K$. Složením obou otočení dostaneme tedy posunutí o vektor $\overrightarrow{DK}$. Protože bod D je středem úsečky $AK$, posunutím přejde bod $A$ do bodu $D$. Protože po prvním otočení přešel $A$ do $B$, musí při druhém otočení přejít $B$ do $D$, z čehož vyplývá, že trojúhelník $BHD$ je rovnostranný.

4. ÚLOHA

Protože $M$ je střed strany $DC$, je $P_{\triangle ACM} = \frac{1}{2}P_{\triangle ACD}$ ($P_{\triangle ACM}$ je obsah trojúhelníka $ACM$), obdobně $P_{\triangle APC} = \frac{1}{2}P_{\triangle ABC}$. Stačí tedy dokázat, že $P_{APCM} \leq \frac{1}{4}a^2$.

Aby byl čtyřúhelník $ABCD$ konvexní při daném $A, M, P$, musí $C$ ležet uvnitř lichoběžníka $MPQR$, kde $RQ$ vznikne z $MP$ stejnolehlostí se středem $A$ a koeficientem 2. Z toho dostáváme, že $P_{\triangle APM} \geq P_{\triangle MPC}$ (neboť $|AK| \geq |KC|$, kde $K$ je průsečík $MP$ a $AC$). Stačí tedy dokázat $P_{\triangle APM} \leq \frac{1}{8}a^2$.

Označme $x = |AP|$, pak $P_{\triangle APM} = \frac{1}{2}x(a-x)\sin\gamma \leq \frac{1}{2}x(a-x) = \frac{4}{8}x(a-x)$. Použijeme-li $4xy \leq (x+y)^2$, dostaneme $P_{\triangle APM} \leq \frac{1}{8}(a-x+x)^2 = \frac{1}{8}a^2$, což je přesně to, co jsme potřebovali k dokončení důkazu.

5. ÚLOHA

Označme $O$ střed a $R$ poloměr dané kružnice, $a = |OE|$, $v$ (resp. $w$) označme délku kolmice spuštěné z vrcholu $D$ (resp. $B$) na průměr $AC$. Potom $S_{ABCD} = Rv + Rw = R(v+w)$, $S_{\triangle OBD} = \frac{1}{2}av + \frac{1}{2}aw = \frac{1}{2}a(v+w)$. Odtud plyne, že stačí hledat takovou tětivu $BD$, aby obsah $OBD$ byl maximální, tedy $\sin\varphi$ musí být maximální, kde $\varphi$ je velikost úhlu u vrcholu $O$, tedy $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Sestrojme kružnici $k$ se středem $O$ a poloměrem $\frac{R}{\sqrt{2}}$. Pokud $E$ leží vně této kružnice, hledanou tětivou bude tečna vedená bodem $E$ ke kružnici $k$. Pokud bude $E$ uvnitř kružnice $k$, bude $90° < \varphi \leq 180°$. Protože funkce sinus je na tomto intervalu klesající, musí být úhel $\varphi$ co nejmenší, tedy vzdálenost bodu $O$ od tětivy co největší. To nastane právě tehdy, když $DB$ bude kolmá na $AC$.