2. série
Dělitelnost

1. ÚLOHA
Nechť x_1, x_2 jsou kořeny rovnice $x^2 - px - 1 = 0$, kde p je liché prvočíslo. Dokažte, že potom jsou čísla $x_1^{17} + x_2^{17}$ a $x_1^{18} + x_2^{18}$ celá a nesoudělná.

2. ÚLOHA
Najděte všechny 1986-tice prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_{1986}$, pro které platí

$$p_1^{1986} + p_2^{1986} + \cdots + p_{1986}^{1986} = 1987! + 1\,.$$

3. ÚLOHA
Číslo N vznikne zapsáním čísel 100 až n za sebou: $N = 100101102\ldots n$. Zjistěte, pro která lichá trojciferná n je číslo N dělitelné třinácti.

4. ÚLOHA
Posloupnost $\{a_n\}$ je definována vztahem $a_n = 3n^2 + 3n + 12$. Dokažte, že mezi každými pěti po sobě jdoucími členy této posloupnosti je právě jedno číslo dělitelné patnácti.

5. ÚLOHA
Dokažte, že jestliže n dělí číslo $(n-1)! + 1$, pak je n prvočíslo.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Dokážeme obecnější tvrzení. Pro každé přirozené číslo n jsou čísla $s_n = x_1^n + x_2^n$ a $s_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$ celá a nesoudělná. Matematickou indukcí podle n dokážeme, že pro každé přirozené n je číslo s_n celé.

Pro $n = 1, 2$ tvrzení platí: $s_1 = p$, $s_2 = p^2 + 2$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné číslo $k \leq n$. Potom $p \cdot s_n = (x_1 + x_2)(x_1^n + x_2^n) = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_1x_2(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) = s_{n+1} - s_{n-1}$. Odtud plyne vyplývá rekurentní vztah $s_{n+1} = ps_n + s_{n-1}$. Protože čísla s_n i s_{n-1} jsou celá, je i číslo s_{n+1} celé. Podle principu matematické indukce platí, že pro všechna přirozená n je s_n celé.

Nyní předpokládejme, že čísla s_n, s_{n+1} jsou soudělná a mají největšího společného dělitele $d > 1$, to znamená, že existují celá čísla a_n, a_{n+1}, že $s_n = da_n$, $s_{n+1} = da_{n+1}$. Potom $da_{n+1} = pda_n + s_{n-1}$. Z toho vyplývá, že i číslo s_{n-1} musí být dělitelné číslem d. Indukcí zjistíme, že i čísla s_1, s_2, musí být dělitelná číslem d. Tato čísla jsou však pro p liché nesoudělná, tedy $d = 1$ a to je spor.

2. ÚLOHA

Žádná taková 1986-tice neexistuje. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že nějaká taková 1986-tice existuje. Protože p_i jsou prvočísla, tak vzhledem k tomu, že 1987 je prvočíslo, jsou p_i buď nesoudělná s číslem 1987, nebo je $p_i = 1987$ pro některá $i \in \{1, 2, \dots, 1986\}$. Jsou-li p_i nesoudělná s 1987, pak $p_i^{1986} \equiv 1 \mod 1987$ podle malé Fermatovy věty. Protože $1987! + 1 \equiv 1 \mod 1987$, musí být právě jedno z čísel p_i prvočíslo různé od 1987. Součet na levé straně je potom roven $1985 \cdot 1987^{1986} + p_k^{1986} = 1987! + 1$. To ale není možné, neboť levá strana je ostře větší.

3. ÚLOHA

Číslo $N = 100101102\dots n$ rozdělíme na šestice takto: $N = 100101 \cdot 10^{3(n-101)} + 102103 \cdot 10^{3(n-103)} + \dots + 1000(n-1) + n = (100 \cdot 1001 + 1) \cdot 10^{3(n-101)} + (102 \cdot 1001 + 1) \cdot 10^{3(n-103)} + \dots + 1001(n-1) + 1 \equiv \sum_{i=0}^{k} 10^{3i} \mod 1001$, kde $k = n - 101$ (bereme jen sudá i). Protože $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, dává číslo N při dělení třinácti zbytek $\sum_{i=0}^{m} 10^{6i} = \sum_{i=0}^{m} (999 \cdot 1001 + 1)^i = m + 1 \mod 13$, kde $m = \frac{k}{2}$. Aby bylo N dělitelné třinácti, musí být $m = 13h - 1$, kde $h = 1, 2, \dots$. Vypočteme $n = 101 + k = 101 + 2m = 101 + 26h - 2 = 99 + 26h$. Protože $n \leq 999$, tak $h \leq \frac{900}{26} \doteq 34,6$. Číslo N je tedy dělitelné třinácti pro $n = 125, 151, 177, \dots, 957, 983$.

4. Úloha

Nejprve si všimněme, že všechny členy posloupnosti jsou dělitelné třemi. Stačí proto zjišťovat pouze dělitelnost pěti. Vypočteme pět po sobě jdoucích členů:

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= 3(n^2-4n+4)+3(n-2)+12 = 3(n^2-3n+6) \\ a_{n-1} &= 3(n^2-n+4) \\ a_n &= 3(n^2+n+4) \\ a_{n+1} &= 3(n^2+3n+6) \\ a_{n+2} &= 3(n^2+5n+10) \end{aligned}$$

Pomocí kongruencí určíme zbytky po dělení jednotlivých členů pěti pro různá n:

$$\begin{array}{llllll} n \equiv 0 \mod 5\text{, potom} & a_{n-2} \equiv 3 & a_{n-1} \equiv 2 & a_n \equiv 2 & a_{n+1} \equiv 3 & a_{n+2} \equiv 0 \\ n \equiv 1 \mod 5\text{, potom} & a_{n-2} \equiv 2 & a_{n-1} \equiv 2 & a_n \equiv 3 & a_{n+1} \equiv 0 & a_{n+2} \equiv 3 \\ n \equiv 2 \mod 5\text{, potom} & a_{n-2} \equiv 2 & a_{n-1} \equiv 3 & a_n \equiv 0 & a_{n+1} \equiv 3 & a_{n+2} \equiv 2 \\ n \equiv 3 \mod 5\text{, potom} & a_{n-2} \equiv 3 & a_{n-1} \equiv 0 & a_n \equiv 3 & a_{n+1} \equiv 2 & a_{n+2} \equiv 2 \\ n \equiv 4 \mod 5\text{, potom} & a_{n-2} \equiv 0 & a_{n-1} \equiv 3 & a_n \equiv 2 & a_{n+1} \equiv 2 & a_{n+2} \equiv 3 \end{array}$$

Vidíme, že z každých pěti po sobě jdoucích členů posloupnosti je právě jeden dělitelný pěti a tedy i patnácti.

5. Úloha

Dokazované tvrzení je zřejmě ekvivalentní s tvrzením, že žádné složené číslo n nedělí číslo $(n-1)!+1$. Tuto obměnu původního tvrzení snadno dokážeme: Je-li n složené číslo, potom existují taková přirozená čísla a, b, že platí $n = ab$, $1 < a < n$, $1 < b < n$. Potom se čísla a, b vyskytují v součinu $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$, tedy a dělí číslo $(n-1)!$ a nemůže proto dělit $(n-1)!+1$. Potom ale ani číslo n nemůže dělit $(n-1)!+1$. (Pro $n = 1$ tvrzení samozřejmě neplatí, což ovšem bylo potřeba poznamenat ke správnému řešení.)