3. série
Diskrétní úlohy

1. ÚLOHA
Na večírku je n lidí a platí

(i) někdo někoho zná
(ii) pokud a zná b, pak také b zná a
(iii) pokud dva mají stejně známých, pak nemají společného známého

Rozhodněte, zda musí nutně existovat člověk, který má právě jednoho známého.

2. ÚLOHA
Rozřežte krychli $3 \times 3 \times 3$ na jednotlivé krychličky nejmenším počtem řezů. (Rozřezané části můžete stavět na sebe).

3. ÚLOHA
Rozhodněte, zda lze libovolné zobrazení $f : E^n \to E$, kde $n \in \mathbb{N}$, $E = \{0, 1\}$ získat skládáním funkce $g : E^2 \to E : [x, y] \mapsto x/y$, kde $(x/y) = 0 \Leftrightarrow (x = 1 \& y = 1)$.

4. ÚLOHA
Je dáno přirozené číslo n. Nalezněte a dokažte strategii následující hry: Dva hráči od čísla n postupně odečítají libovolné (přirozené nebo nulové) mocniny čísla 2 tak, aby číslo stále zůstávalo nezáporné. Hráč, který dostane výsledek 0, vyhrává.

5. ÚLOHA
Je dáno přirozené číslo n, $n \geq 4$. Zjistěte, kolik prvků má množina permutací, které můžeme naskládat z permutací

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení 3. série

1. ÚLOHA

Úlohu převedeme do jazyka teorie grafů a to tak, že lidi prohlásíme za vrcholy a hrana bude mezi těmi, kteří se znají. Jedná se o konečný, neorientovaný graf.

Vybereme vrchol, který má největší stupeň (pokud je jich více, tak libovolný z nich). Označíme ho X a jeho stupeň k. Z podmínky (i) plyne, že $k \geq 1$. Označme $l_1, \dots, l_k$ stupně jeho sousedů. Zřejmě platí $1 \leq l_i \leq k$ pro každé $i = 1, 2, \dots, k$. Z podmínky (iii) plyne, že $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\} : \ i \neq j \Rightarrow l_i \neq l_j$. Tedy máme k různých přirozených čísel menších než $k + 1$. Mezi nimi musí být i jednička, tedy někdo má jenom jednoho známého.

2. ÚLOHA

Na šest řezů by to jistě každý dokázal i bez jakéhokoliv stavění. Že to nejde lépe plyne z toho, že prostřední krychlička musí být odříznuta ze všech šesti stran.

3. ÚLOHA

Nejprve ukážeme, že je možné ze zadané funkce naskládat základní logické operace: $\neg X = X/X, X\&Y = \neg(X/Y) = (X/Y)/(X/Y), X\vee Y = (\neg X)/(\neg Y) = (X/X)/(Y/Y)$. Nyní se pokusíme naskládat libovolné zobrazení z těchto operací. Prostor E^n je konečný. Představme si zápis zobrazení f v pravdivostní tabulce — na levé straně bude n-tice $\beta \in E^n$, na pravé straně pak funkční hodnota $f(\beta) \in E$. Vezměme nyní takový řádek této tabulky, ve kterém je na pravé straně jednička, tj. takové β, že $f(\beta) = 1$. Snadno dokážeme poskládat takovou funkci $g(\beta) : E^n \to E$, která n-tici β přiřadí jedničku a všem ostatním nulu. Stačí označit $i_1, \dots, i_k$ ty indexy, pro něž je $\beta_i = 1$ a $j_1, \dots, j_m$ takové indexy, pro něž je $\beta_j = 0$. Funkce g_β pak bude mít zápis: $g_\beta(X) = X_{i_1}\&X_{i_2}\&\dots\&X_{i_k}\&(\neg X_{j_1})\&\dots\&(\neg X_{j_m})$, což již umíme naskládat.

Označíme-li nyní ${}_1\beta, {}_2\beta, \dots, {}_p\beta$ všechny takové n-tice β, pro něž je $f(\beta) = 1$, naskládáme funkci f takto: $f = g_{{}_1\beta} \vee g_{{}_2\beta} \vee \dots \vee g_{{}_p\beta}$, tedy libovolnou funkci vyhovující zadání je vskutku možno naskládat z funkce g.

4. ÚLOHA

Vyhrává ten, komu se prvnímu podaří dostat číslo dělitelné třemi. Pak už může pokaždé odečíst 1 nebo 2 tak, aby byl výsledek dělitelný třemi, protože žádná mocnina dvojky číslem 3 dělitelná není. Tedy pro n dělitelná třemi vyhraje druhý, jinak první.

5. ÚLOHA

Operaci skládání budeme značit $\cdot$, vícenásobné skládání jako mocnění. Platí:

$$\alpha^i = \alpha^{i \bmod n}, \quad \beta^i = \beta^{i \bmod 2}.$$

Tedy ačkoliv můžeme uvažovat všechny celé mocniny permutací α, β, má α nejvýše n a β nejvýše 2 různé mocniny.

Pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, k\}$ platí:

$$\alpha^i(k) = (k + i) \bmod n$$
$$\beta^1(k) = (2 - k) \bmod n$$
$$\beta^0(k) = k$$

Dále platí $\alpha^{-i} \cdot \beta = \beta \cdot \alpha^i$, neboť $(-i + (2 - k)) \bmod n = (2 - (k + i)) \bmod n$. Každou permutaci vzniklou skládáním α, β můžeme zapsat ve tvaru $u = \alpha^{k_1} \cdot \beta^{l_1} \cdot \alpha^{k_2} \cdot \beta^{l_2} \cdot \ldots \cdot \alpha^{k_r}\beta^{l_r}$, a z předešlého vztahu lze indukcí snadno dokázat („probublat“ všechny α na začátek), že $u = \alpha^k \cdot \beta^l$ pro vhodná k, l, která jsou jednoznačně určena koeficienty k_i, l_i. Tedy existuje maximálně $2n$ různých permutací u, které vyhovují zadání. Abychom dokázali, že jsou takto získané permutace vzájemně různé, stačí ukázat, že pro každé i, j je $\alpha^i\beta \neq \alpha^j$. Sporem: kdyby bylo $i = j \bmod n$, pak by muselo platit, že je β identickou permutací, což není pravda. Pokud $i \neq j \bmod n$, pak $\alpha^i(1) = \alpha^j(1)$, což je opět spor. Zkoumaná množina má tedy právě $2n$ prvků.