5. série

Velká čísla

1. ÚLOHA

Najděte příklady k, n na všechna možná uspořádání podle velikosti čísel $(k!)^n$, $(k^n)!$, $k^{n!}$. Pokud na nějaké uspořádání podle velikosti nenajdete příklad, dokažte, že je nemožné!

2. ÚLOHA

Dokažte, že číslo $6^{7^{8^9}}$ je více než $10^{10^{10^7}}$-krát větší než $11^{10^{9^8}}$.

3. ÚLOHA

Buďte

$$a_n = n^{n^{n^{n^{n^2}}}}, \quad b_n = 2^{2^{2^{2^{2^n}}}}.$$

Které z množin $A = \{n \in \mathbb{N},\ a_n > b_n\}$, $B = \{n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n\}$ mají nekonečně mnoho prvků? Podepřete důkazem!

4. ÚLOHA

Nechť

$$p_n = 2^{3^{4^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}}, \quad q_n = (n+1)^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4^{3^2}}}}}}.$$

Pro která $n \in \mathbb{N}$ je $p_n < q_n$?

5. ÚLOHA

Dokažte

$$\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right)! \leq 3^{\frac{3((2k-1)\cdot 3^k - 1)}{4}}.$$

Řešení 5. série

Obecná připomínka: Není příliš pěkné, když úlohy na celá čísla řešíme logaritmováním, nebo dokonce pomocí diferenciálního počtu (nemluvím o složitých problémech vyšší teorie čísel, kde je to zapotřebí). Uvědomme si, že již samotná existence logaritmů je hluboký výsledek matematické analýzy, k řešení těchto elementárních úloh zcela nepotřebný.

1. Úloha

Označme $a = (k!)^n$, $b = (k^n)!$, $c = k^{n!}$. Pro $n = 1$ dostáváme $a = b = k!$, $c = k$. Pro $k = 1$ máme $a = b = c = 1$. Tím jsme dostali příklady na $a = b = c$ a $a = b > c$.

V dalším můžeme předpokládat, že $n, k > 1$. Potom $n \le 2^{n-1} \le k^{n-1}$, tedy $(k!)^n < (nk)! \le (k^n)!$. Dále číslo $(k^n)!$ je dělitelné číslem $k^2 - 1$, což nemůže být pravda o $k^{n!}$. Můžeme tedy vyloučit všechny možnosti, kde $a \ge b$, nebo $b = c$ (s výjimkou výše uvedených pro n nebo k rovno 1). Zbývá: $a = c < b$: $n = 2,\ k = 2$; $a < b < c$: $n = 6,\ k = 2$; $a < c < b$: $n = 3,\ k = 2$; $c < a < b$: $n = 2,\ k = 3$.

2. Úloha

Jelikož $2^8 > 3^5$, je $2^{27} > 8 \cdot 3^{15} > 2 \cdot 3^{16} = 2 \cdot 9^8$. Dále $9^8 = (3^4)^4 > 8^4 \cdot 10^4 > 10^7$, neboť $8^4 > 10^3$. Dostáváme

$$6^{7^{8^9}} = 6^{7^{2^{27}}} > 6^{7^{9^8 \cdot 2}} = 6^{49^{9^8}} > \left(6^4\right)^{10^{9^8}} = \left(36^{10^{9^8}}\right)^2 > 11^{10^{9^8}} \cdot 10^{10^{9^8}} > 11^{10^{9^8}} \cdot 10^{10^{10^7}}.$$

3. Úloha

Ukážeme, že B obsahuje všechna čísla $n \ge 10$. Pro $n \ge 10$ snadno dostaneme indukcí $2^n > n^3 = n \cdot n^2$. Nechť $a, b \in \mathbb{N}, n \ge 10, b > na$. Potom $2^b > 2^{na} > \left(n^2\right)^a \ge n \cdot n^a$. Pomocí předchozích kroků dostáváme postupně

$$2^{2^n} > n \cdot n^{n^2}\ ,\ 2^{2^{2^n}} > n \cdot n^{n^{n^2}}\ ,\ \ldots\ ,\ b_n > n \cdot a_n\ .$$

4. Úloha

Rozlišíme několikero případů:

(a) Probereme po jednom $n < 7$. Je

$$2^{3^{4^{\left(5^6\right)}}} < 7^{6^{5^{\left(4^{3^2}\right)}}}\ ,$$

neboť $5^6 = 25^3 < 64^3 = 4^9$. Tedy $p_6 < q_6$. Ještě jednodušší důkazy (pro $n = 2, 3, 4, 5$) ponecháme čtenáři (tento obrat ve svých řešeních nepoužívejte!). Pro $n = 1$ není výraz p_n definován.

(b) Nechť $n=7$. Potom postupně dostáváme $3^7 > 2^{11}+1$, $6^7 > 4^9+1$, $5^{6^7} > 5\cdot 5^{4^9} > 2\cdot 5^{4^9}+1$, $4^{5^{6^7}} > 4^{2\cdot 5^{4^9}+1} > 2\cdot 6^{5^{4^9}}+1$, $3^{4^{5^{6^7}}} > 3\cdot 7^{6^{5^{4^9}}}$, $p_7 > q_7$.
(c) Pro $n>7$ dokážeme indukcí $p_n > q_n$. Startovní krok $n=7$ máme za sebou. Nechť platí $p_n > q_n$. Potom

$$p_{n+1} > 2^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{(n-1)(n-1)^n}}}}}} > 2^{(n-1)p_n} > \left(2^{n-1}\right)^q_n > (n+2)^{q_n} = q_{n+1}.$$

K tomu jsme využili snadného odhadu $a^{nb} > n\cdot a^b$ pro $n>2$ a $a^b>1$ a nerovnosti $2^{n-1} > n+1$, kterou pro $n>3$ snadno dokážeme indukcí.

5. Úloha

Pro každé $j,i\in\mathbb{N}$ máme

$$(3^j-i)(3^j+i) = 3^{2j}-i^2 < 3^{2j}.$$

Odtud

$$\left(3^j-\frac{3^j-1}{2}\right)\left(3^j-\frac{3^j-1}{2}+1\right)\dots\left(3^j+\frac{3^j-1}{2}\right) < 3^{j3^j},$$

tedy

$$\left(\frac{3^{k+1}-1}{2}\right)! < 3^{1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+k\cdot 3^k}.$$

Nyní stačí nahlédnout, že

$$\begin{aligned}1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+k\cdot 3^k &= (3^1+\cdots+3^k)+(3^2+\cdots+3^k)+\cdots+3^k = \\ &= \frac{1}{2}\left((3^{k+1}-3)+(3^{k+1}-3^2)+\cdots+(3^{k+1}-3^k)\right) = \frac{3\big((2k-1)3^k-1\big)}{4},\end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno.