6. série

Všehochuť

1. ÚLOHA

Úsečka AB velikosti d se pohybuje tak, že její krajní body leží na dvou navzájem kolmých přímkách. Nechť X je bod přímky AB různý od bodů A, B. Jakou křivku při tomto pohybu bod X opíše? Může být křivka opsaná bodem X kružnice? Je-li Y jiný bod přímky AB, může být křivka opsaná bodem Y shodná nebo podobná s křivkou opsanou bodem X?

2. ÚLOHA

Množina čtverců má tuto vlastnost: Každý čtverec této množiny má jeden vrchol na přímce p, druhý na přímce q a třetí na přímce r (body jsou brány ve stejném pořadí). Dokažte, že čtvrté vrcholy čtverců této množiny leží také na přímce.

3. ÚLOHA

Jestliže číslo n je přirozené, potom číslo

$$V = \frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$$

je přirozené nebo nula. Dokažte.

4. ÚLOHA

Nechť čísla a, b jsou kladná racionální a nechť číslo $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ je také racionální. Potom i čísla $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$ jsou racionální. Dokažte.

5. ÚLOHA

Délky stran obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla p, q; obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází úhlopříčka AC.

Řešení 6. série

1. ÚLOHA

Dané přímky zvolíme za souřadné osy tak, aby $A = (a, 0)$, $B = (0, b)$. Označme $X = (x, y)$. Podle zadání musí v každém okamžiku platit:

$$a^2 + b^2 = d^2. \tag{1}$$

Poloha bodu X na přímce AB je charakterizována číslem $r \in \mathbb{R}$:

$$x = \frac{a}{1-r}, \quad y = \frac{-rb}{1-r} \qquad \text{(zkuste si nakreslit obrázek)}. \tag{2}$$

Dosadíme-li do (1) čísla a, b vyjádřené ze vztahu (2), dostaneme:

$$\frac{(1-r)^2}{d^2}x^2 + \frac{(1-r)^2}{d^2r^2}y^2 = 1\,. \tag{3}$$

Každý bod X tedy leží na elipse o rovnici (3). Obráceně, leží-li bod (x, y) na této elipse, můžeme z (2) dopočítat a, b a tato poloha bodů A, B bude vyhovovat zadání, tj. splňovat podmínku (1). Proto je elipsa (3) geometrickým místem všech bodů X.

Aby byla kružnicí, musí mít stejné koeficienty u x^2 a u y^2. Jejich porovnáním dostaneme podmínku $r^2 = 1$, nebo-li $r = -1$ ($r \neq 1$, aby měla (2) smysl). Bod X je pak středem úsečky AB.

Nechť je poloha bodu Y určena číslem $s \neq r$. Aby byly odpovídající elipsy podobné, musejí být úměrné délky poloos a tedy i jejich kvadráty. Proto se musí číslo

$$\left(\frac{d}{1-r}\right)^2 : \left(\frac{-rd}{1-r}\right)^2 \quad \text{rovnat číslu} \quad \left(\frac{d}{1-s}\right)^2 : \left(\frac{-sd}{1-s}\right)^2,$$

nebo číslu převrácenému. Odtud snadno dostaneme všechna řešení:

1) $r^2 = s^2$, nebo-li $r = -s$ a jde o pouhou podobnost, neboť koeficient podobnosti je $\left|\frac{1-r}{1+r}\right| \neq 1$, protože $r \neq 0$ (protože $r \neq s$).
2) $r^2s^2 = 1$. Zde mohou nastat dva případy:
   a) $r = \frac{1}{s}$ a koeficient podobnosti je $\left|\frac{s(1-r)}{1-s}\right| = 1$, takže jde o shodnost.
   b) $r = -\frac{1}{s}$ a koeficient podobnosti je $\left|\frac{s(1-r)}{1-s}\right| \neq 1$, protože $s \neq 0$, jde tedy o pouhou podobnost.

2. ÚLOHA

Uvedeme pouze řešení pro případ, kdy přímky p, r odpovídající protějším vrcholům čtverců nejsou vzájemně kolmé. (V opačném případě lze snadno dokázat, že zbývající vrcholy pak musejí ležet na osách souměrnosti různoběžek p, r.) Díky tomuto zjednodušení platí:

Lemma 1. Mějme dán bod Q ($Q \notin p \cap r$). Pak existuje právě jeden čtverec $PQRS$ (orientovaný obvyklým způsobem — jinak jsou takové čtverce právě dva) takový, že protější vrcholy P, R leží pořadě na přímkách p, r.

Důkaz: Stačí si uvědomit, že bod P najdeme v jednoznačně určeném průsečíku přímky p s přímkou, kterou dostaneme otočením přímky r o $90°$ v kladném smyslu kolem středu Q.

Ještě dokážeme jednu pomocnou větu, kde symbolem $C = kA + (1-k)B$ rozumíme: C je takový bod přímky AB, že poměr orientovaných vzdáleností mezi body A a C a mezi body C a B je číslo $\frac{1-k}{k}$. (Např. pro číslo $k = 0,5$ je C středem úsečky AB apod.) Pro $A = B$ se tímto symbolem rozumí bod $C = A$. Bod C je vždy jednoznačně určen. (Proč?)

Lemma 2. Jsou dány čtverce $A_1A_2A_3A_4$ a $B_1B_2B_3B_4$. Pro $i = 1,2,3,4$ označíme $C_i = kA_i + (1-k)B_i$. (k je dané reálné číslo). Potom i $C_1C_2C_3C_4$ je čtverec.

Důkaz: Označme $D_1D_2D_3D_4$ čtverec vzniklý posunutím čtverce $B_1B_2B_3B_4$ tak, aby měl střed společný se čtvercem $A_1A_2A_3A_4$. Označme dále pro $i = 1,2,3,4$ $E_i = kA_i + (1-k)D_i$. Dvojice čtverců $A_1A_2A_3A_4$, $D_1D_2D_3D_4$ je invariantní vůči otáčení o $90°$ kolem společného středu S, proto body E_i mají stejnou vlastnost, takže tvoří také čtverec. Z podobnosti trojúhelníků $A_iB_iD_i$ a $A_iC_iE_i$, kterážto má koeficient $m = \frac{1}{1-k}$, plyne, že bod C_i můžeme dostat posunutím bodu E_i o m-násobek vektoru $\overrightarrow{D_iB_i}$, tj. o vektor $m\overrightarrow{D_iB_i}$. Proto můžeme posunutím čtverce $E_1E_2E_3E_4$ o zmíněný vektor dostat útvar $C_1C_2C_3C_4$, který je tudíž též čtverec.

Nyní už snadno dořešíme celou úlohu. Nechť M obsahuje takové čtverce $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$, že $Q_1 \neq Q_2$. (V opačném případě jsou přímky p, r kolmé (Dokažte!), nebo má M méně než 2 prvky.) Nechť je Q libovolný bod přímky q, různý od bodů Q_1, Q_2. Nyní podle lemmatu 2 snadno najdeme čtverec $PQRS$, že $P \in p, R \in r$ a navíc S leží na přímce S_1S_2. Lemma 1 potom zaručí, že v M není žádný jiný čtverec s vrcholem Q. (Zde byl podán jen náznak důkazu, promyslete si zbytek.)

3. Úloha

Platí: $V = \frac{W}{120}$, kde $W = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Součin pěti po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný pěti, protože aspoň jedno z nich musí být dělitelné pěti. Dále aspoň jedno z nich je dělitelné třemi a aspoň dvě jsou sudá, z nichž aspoň jedno je dělitelné čtyřmi. W je tudíž dělitelné nesoudělnými čísly 3, 5, 8, a tudíž i jejich součinem. Nezápornost čísla W je zřejmá.

4. Úloha

Ze zadání plyne: $\sqrt{b} = c - \sqrt{a}$, tedy $b = c^2 + a - 2c\sqrt{a}$, takže platí: $\sqrt{a} = \frac{c^2+a-b}{2c}$ a analogicky $\sqrt{b} = \frac{c^2-a+b}{2c}$, což jsou čísla racionální.

5. Úloha

a) Buďtež p, q nesoudělná, strana délky p budiž vodorovná. Pak úhlopříčka protne v každém z p sloupců buďto jeden nebo více čtverců — podle toho, kolikrát v tom kterém sloupci přechází z jedné řady na druhou). Celkem přechází $(q-1)$-krát mezi řadami, tedy celkem protne $p+q-1$ čtverců.

b) Budiž d největší společný dělitel čísel p a q. Úhlopříčka je teď rozdělena na d stejných dílů a každý z nich je úhlopříčkou nějakého obdélníka $\frac{p}{d} \times \frac{q}{d}$, který již splňuje podmínky případu a). Odtud snadno plyne, že úhlopříčka protne právě $p+q-d$ čtverců.