7. série
Dirichletův princip

1. ÚLOHA
Čtverečky nekonečného čtverečkovaného papíru jsou obarveny třemi barvami. Zjistěte, zda existuje sto řádek a sto sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají tutéž barvu.

2. ÚLOHA
Zjistěte, zda mezi libovolnými třinácti reálnými čísly z intervalu $(-1, 1)$ můžeme najít čísla a, b tak, že $0 < a\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-a^2} < \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

3. ÚLOHA
Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ a $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{k^n-1}{k-1}$. Dokažte, že existují $d_1, d_2, \dots, d_n$ celá tak, aby bylo aspoň jedno z nich nenulové, absolutní hodnota každého byla menší nebo rovna $k-1$ a aby $|d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n| \leq 1$.

4. ÚLOHA
Ve městě tvaru čtverce o straně 10km je rozmístěno 1000 policistů. Zjistěte, zda existuje čtverec se stranami délky 4km rovnoběžnými se stranami města, ve kterém je aspoň 112 policistů. Platí totéž, bude-li některý z nich propuštěn?

5. ÚLOHA
Téčko má tvar úsečky délky 2, z jejíhož středu vychází kolmá úsečka stejné délky. Uvnitř čtverce o straně délky 18 je 290 téček. Zjistěte, zda některé z nich mají společný bod. Platí totéž, ubereme-li 10 téček?

Řešení 7. série

1. ÚLOHA

Vezmeme si vodorovný nekonečně dlouhý pás šířky 298 čtverečků. V něm existuje 100 stejně obarvených sloupců (Pás ani nemusí být nekonečný, stačí nám délka $99 \cdot 3^{298} + 1$ (Proč?)). Uvažme jeden z těchto sloupců. Podle DP je v něm aspoň 100 čtverečků téže barvy. Stejně je tomu v ostatních 99 sloupcích, QED.

2. ÚLOHA

Označme daných 13 čísel $x_1, x_2, \dots, x_{13}$. Pro $i = 1, 2, \dots, 13$ označme y_i taková čísla z intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, že $x_i = \sin y_i$. Rozdělme interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na 12 stejných částí. Podle DP se v jedné z nich nacházejí aspoň dvě z čísel y_i. Nechť jsou to čísla a a b. Funkce sinus je na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ rostoucí, proto platí: $(\sin a)\sqrt{1 - \sin^2 b} - (\sin b)\sqrt{1 - \sin^2 a} = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \sin(a - b) < \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Takže siny čísel a, b jsou řešením.

3. ÚLOHA

Nechť $M = \{d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n; 0 \le d_i \le k - 1\}$. Každé z čísel d_i tedy může nabývat k různých hodnot. Rozlišme dva případy:

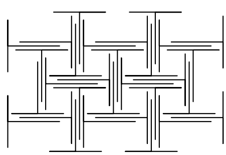
(a) existují $b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n; 0 \le c_i, b_i \le k - 1$ a pro nějaké i je $b_i \ne c_i$ taková, že $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$. Pak snadno zvolíme $d_i = (b_i - c_i)$.

(b) Jestliže taková b_i, c_i neexistují, má množina M právě k^n prvků. Největším z nich je prvek $m = (k-1)x_1 + (k-1)x_2 + \dots + (k-1)x_n = (k-1)(x_1 + \dots + x_n) = k^n - 1$. Tedy všechna čísla z M jsou v intervalu $[0, k^n - 1]$ a podle DP jsou mezi nimi dvě, jejichž rozdíl je menší nebo roven jedné. Nechť jsou to čísla $b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ a $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$. Pak pro $i = 1, 2 \dots, n$ zvolíme $d_i = b_i - c_i$ a opět snadno ověříme, že je $|d_1x_1 + \dots + d_nx_n| \le 1$.

4. ÚLOHA

Město je rozděleno na devět stejně velkých čtvercových obvodů. Podle DP je aspoň v jednom z obvodů aspoň 112 policistů. Lehce najdeme čtverec o straně 4km, který obsahuje tento obvod a má strany rovnoběžné se stranami města. Po propuštění jednoho policisty se všichni ostatní shromáždili po 111 členech na každé z devíti policejních stanic, které jsou ve vrcholech, středu a středech stran onoho města. Teď již podobný čtverec nenajdeme.

5. ÚLOHA



Do čtverce lze umístit 536 téček, aniž by některá dvě měla společný bod. Mnohým z vás se povedlo do čtverce umístit následujícím způsobem 512 disjunktních téček, čímž je dokázáno, že ani DP nepomůže chceme-li dokázat, že se některá z 290 téček protínají. Protnout se však mohou, jsou-li tam aspoň dvě. Zkuste schválně upřesnit z obou stran odhah maximálního počtu disjunktních téček v daném čtverci.