8. série

Stereometrie

1. ÚLOHA
V prostoru E^3 jsou dány nerovnoběžné přímky p, q a body $P_1, P_2 \in p, Q_1, Q_2 \in q$ tak, že $|P_1Q_1| = |P_2Q_2|$ a $|P_1P_2| = |Q_1Q_2| > 0$. Body $A \in p, B \in q$ nazveme sdružené, jestliže $|AP_1| = |BQ_1|$ a $|AP_2| = |BQ_2|$. Najděte dva sdružené body A, B tak, aby jejich vzájemná vzdálenost byla co nejmenší.[1]

2. ÚLOHA
Rozhodněte, zda lze E^3 rozřezat na stejně velké tetraedry.[2]

3. ÚLOHA
V tetraedru $ABCD$ najděte body $K \in \triangle BCD, L \in \triangle ACD, M \in \triangle ABD, N \in \triangle ABC$, aby délka $|KL| + |LM| + |MN|$ byla minimální.

4. ÚLOHA
V tetraedru $ABCD$ najděte body $K \in \triangle BCD, L \in \triangle ACD, M \in \triangle ABD, N \in \triangle ABC$, aby délka $|KL| + |LM| + |MN| + |NK|$ byla minimální.

5. ÚLOHA
V E^3 jsou dány dvě disjunktní koule. Najděte množinu M všech bodů tohoto prostoru, jimiž lze vést přímku, která se dotýká obou koulí.

---

[1] $|XY|$ značí délku úsečky XY.
[2] Tetraedr jest pravidelný čtyřstěn.

Řešení 8. série

Ve stereometrii se často setkáváme s pojmem mimoběžky, všimeme si tedy několika jejich základních vlastností, ze kterých potom můžeme vycházet při řešení stereometrických úloh. Důkazy jednotlivých tvrzení nejsou obtížné, zkuste je proto nalézt sami (pozor na tzv. důkaz kruhem!). Mějme dvě mimoběžky p, q. Pak existuje právě jedna jejich nejkratší spojnice, tj. úsečka PQ taková, že $P \in p, Q \in q$ a délka $|PQ|$ je minimální. Dále existuje jediná spojnice těchto mimoběžek, která je na obě kolmá a tato spojnice splývá s nejkratší spojnicí. Označme S její střed. Dále existuje právě jedna dvojice rovin $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ takových, že $p \subset \mathbf{p}, q \subset \mathbf{q}$ a $\mathbf{p} \parallel \mathbf{q}$. Vzdálenost těchto rovin je rovna délce nejkratší příčky, která je navíc na obě kolmá. Osa mimoběžek je taková přímka o, že p je souměrně sdružená s q podle osy o. (Proč se o nedá nadefinovat jako přímka, podle níž je množina $M = \{X \in E^3; X \in p \quad \text{nebo} \quad X \in q\}$ osově souměrná?) Mimoběžky p, q mají právě dvě osy, ty jsou spolu s přímkou PQ po dvou kolmé a protínají se v bodě S. Rovinu jimi určenou nazveme středovou rovinou mimoběžek p, q. Je-li o osou mimoběžek p, q, pak je PS nejkratší spojnicí mimoběžek p, o. Úhlem mimoběžek p, q se rozumí úhel sevřený jejich kolmými průměty do středové roviny. Takže například protější hrany tetraedru jsou kolmé a jejich nejkratší spojnicí je úsečka spojující jejich středy.

1. ÚLOHA

Jsou-li p, q mimoběžky, pak značíme-li pruhem kolmý průmět do jejich středové roviny, platí pro libovolné body $K, L \in p, M, N \in q$ ekvivalence:

$$\big(|KM| = |LN|\big) \Leftrightarrow \big(|\overline{KM}| = |\overline{LN}|\big)$$
$$\big(|KM| \geq |LN|\big) \Leftrightarrow \big(|\overline{KM}| \geq |\overline{LN}|\big)$$

Platí totiž $|KM|^2 = |\overline{KM}|^2 + d^2$ a $|LN|^2 = |\overline{LN}|^2 + d^2$, kde d je vzdálenost přímek p, q. Stačí tedy vyřešit stejnou úlohu pro $\overline{p}, \overline{q}$, čímž je úloha převedena na následující případ.

Jsou-li p, q různoběžky, označme S jejich průsečík. Ze zadání plyne, že jsou trojúhelníky $P_1P_2Q_1$ a $Q_2Q_1P_2$ shodné podle věty sss. Přímky p, q nejsou rovnoběžné, takže oba trojúhelníky jsou souměrně sdružené podle osy o úsečky P_2Q_1, odtud $S \in o$ a konečně musí také platit $|P_1S| = |Q_2S|$ a $|P_2S| = |Q_1S|$.

Mějme sdružené body A, B. Budiž B' čtvrtý vrchol rovnoběžníka P_1ABB'. Jestliže bod A probíhá přímku p, pak bod B' probíhá přímku r, kde $Q_1 \in r$ a $r \parallel o$, neboť trojúhelník Q_1BB' je vždy rovnoramenný a jeho úhly se nemění. Jelikož vždy platí $|AB| = |P_1B'|$, stačí najít bod přímky r, který je nejblíže k bodu P_1 a ten zvolit za B'; příslušným bodem B pak bude střed přepony pravoúhlého trojúhelníka Q_1Q_2B' a A bude středem úsečky P_1P_2.

Ať jsou p, q různoběžky nebo mimoběžky, budou hledanými body středy úseček P_1P_2 a Q_1Q_2.

2. ÚLOHA

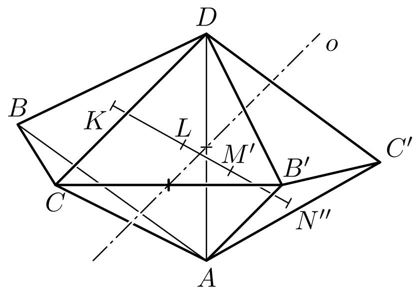
Nelze. V tetraedru označme β uhel sevřený stěnami. Je-li K středem hrany AB, a L středem hrany CD, je $|\sphericalangle KLA| = \frac{\beta}{2}$ a odtud plyne: $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Pro $\beta' = 360^\circ : 6$ je $\sin\frac{\beta'}{2} = 0,5$ a pro $\tilde{\beta} = 360^\circ : 5$ je $\sin\frac{\tilde{\beta}}{2} \doteq 0,5877\ldots$, což je větší než $\sqrt{\frac{1}{3}} \doteq 0,5773\ldots$. Tedy kdyby šlo E^3 složit z tetraedrů, byla by každá hrana společná právě n tetraedrům, kde $5 < n < 6$, což zjevně nelze.

K důkazu nerovností $\beta' < \beta < \tilde{\beta}$ bylo čistější místo kalkulaček a nepřesných odhadů použít přesného vyjádření:

$$\frac{1}{\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{5}}}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}\,.$$

3. ÚLOHA

Nechť B' (resp. M', N') je bod souměrně sdružený s bodem B (resp. M, N) podle roviny ACD. Nechť C' (resp. N'') je bod souměrně sdružený s C (resp. N') podle roviny $AB'D$. Dostaneme tak vyobrazené těleso, které je symetrické podle osy o, která spojuje středy úseček AD a CB'. Z konstrukce tohoto tělesa plyne rovnost $|KL| + |LM'| + |M'N''| = |KL| + |LM| + |MN|$, což je délka, kterou máme minimalizovat. Proto buďto leží body $KLM'N''$ na přímce, nebo (kvůli nekonvexnosti tělesa) je $L \equiv M' \in AD$. Z dalšího postupu však vyplyne, že druhý případ nebude minimální, ani kdybychom místo délky $|KL| + |LN''|$ uvažovali délku $|KN''|$; přesto na něj nesmíme zapomenout.

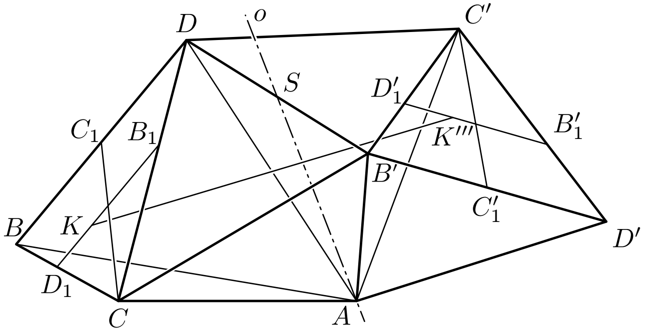


Zkusme tedy najít body K a N'' tak, aby jejich vzdálenost byla co nejmenší. Budiž d vzdálenost mimoběžek CD a AB'. Uvážíme-li dvě rovnoběžné roviny obsahující tyto mimoběžky (viz předmluva), je jejich vzdálenost rovna d a body K, N'' leží každý na jinou stranu od pásu určeného těmito rovinami, takže jejich vzdálenost $|KN''|$ nemůže být menší než d. Aby bylo $|KN''| = d$, musí body K, N'' ležet přímo ve zmíněných rovinách, tj. na mimoběžkách CD a AB'. Protože $AB'CD$ je tetraedr, bude touto spojnicí spojnice středů hran CD a AB'. Odpovídajícím řešením je proto čtveřice bodů K, L, M, N takových, že $K = L =$ střed hrany CD a $M = N =$ střed hrany AB.

4. ÚLOHA

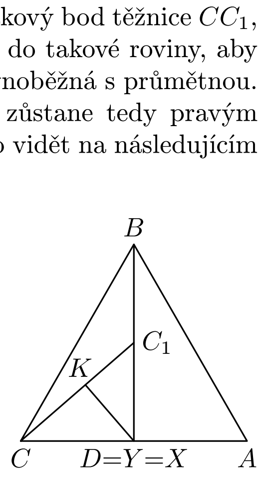
Úlohu budeme řešit podobně jako předchozí, uděláme však o jednu rovinovou symetrii více, čímž zbude pouze problém najít bod K a K''' tak, aby jejich vzdálenost byla co nejmenší a aby po provedení oněch 3 rovinových symetrií přešel bod K na K''', tj. aby byl bod K v trojúhelníku BCD na stejném místě jako bod K''' v trojúhelníku $B'C'D'$. K vyřešení tohoto problému pak využijeme tvrzení dokázané v první úloze. Označme B', K', M', N' body souměrně sdružené s B, K, M, N podle roviny ACD. Označme

C', K'', N'' body souměrně sdružené s C, K', N' podle roviny $AB'D$. Označme D', K''' body souměrně sdružené s D, K'' podle roviny $AB'C'$. Označme B_1 (resp. D_1) průsečík přímky rovnoběžné s BD a procházející bodem K s hranami CD (resp. CB). Označme C_1 střed hrany BD. Označme B_1' (resp. D_1') průsečík přímky rovnoběžné s $B'D'$ a procházející bodem K''' s hranami $C'D'$ (resp. $C'B'$). Označme C_1' střed hrany $B'D'$. Tak dostaneme těleso symetrické podle osy o procházející bodem A a středem S hrany DB':



Z této symetrie plyne: $|B_1B_1'| = |D_1D_1'|$ a aby bylo $|KK'''|$ minimální, musí být podle první úlohy K středem úsečky B_1D_1 a K''' středem úsečky $B_1'D_1'$. Tedy K leží na těžnici $C'C_1'$ a oba jsou souměrně sdružené podle osy o (to platí jen díky tomu, že je bod C_1 jediným bodem úsečky BD, který je souměrně sdružený se sobě odpovídajícím bodem na úsečce $B'D'$ zrovna podle osy o). Osa o je také osou mimoběžek CC_1 a $C'C_1'$, takže snadno nahlédneme, že KK''' musí být nejkratší spojnicí těchto mimoběžek. Označíme-li O její střed, pak KO je nejkratší spojnicí mimoběžek CC_1 a AS. Ty jsou však souměrně sdružené podle osy DX, kde X je střed AC.

Takže KY je nejkratší spojnicí mimoběžek CC_1 a DX, kde Y je střed úsečky KO. Máme tedy daný tetraedr $ABCD$ a bod K v něm najdeme jako takový bod těžnice CC_1, který je nejblíže k těžnici DX. Celý tetraedr promítneme kolmo do takové roviny, aby body D, X, Y splynuly. Úsečka KY je na DX kolmá, je tedy rovnoběžná s průmětnou. Pravý úhel CKY má jedno rameno rovnoběžné s průmětnou, zůstane tedy pravým úhlem i po promítnutí. Průmět potom musí vypadat tak, jak je to vidět na následujícím obrázku.



Je-li $|AB| = 1$, je $|CC_1| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a výška tetraedru bude $v = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Na průmětu bude mít úsečka BD délku v a úsečka AC délku 1. Proto bude na průmětu mít C_1D délku $v/2$ a úsečka CD délku $1/2$. V tomto pravoúhlém trojúhelníku CDC_1 je tedy poměr délek odvěsen roven v, proto je přepona CC_1 dělena patou K výšky KD v poměru $v^2 = 2/3$. Bod K leží ve dvou pětinách úsečky CC_1 a to musí platit nejen na tomto průmětu, ale i ve skutečnosti. Nyní už snadno dopočítáme řešení, nejlépe, uvědomíme-li si, že je nalezené řešení jednoznačné a že bylo zadání úlohy symetrické. Nakonec vyjde jediné řešení: Bod K (resp. L, M, N) leží ve dvou pětinách těžnice CC_1 (resp. XD, C_1A, XB) měřeno od její paty. (C_1 je střed hrany BD, X střed hrany CA.) (Pro ty, kterým se nedaří přehledné náčrtky, je v úlohách 2, 3, 4 a podobných vhodná metoda slepovaných špejlí či sirek.)

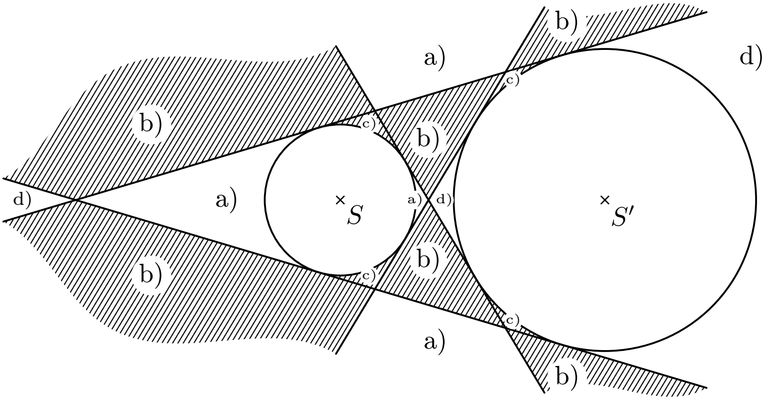
5. ÚLOHA

Koule označme K, K', jejich středy S, S'. Mějme bod X vně obou koulí. Všechny tečny vedené bodem X ke kouli K tvoří povrch kužele Q, který je bodem X rozdělen na dvě části. Nyní rozlišme několik případů:

(a) Koule K' neprotíná žádnou z těchto přímek.
(b) Koule K' protíná některé přímky v jedné části kužele a jiné ne.
(c) Koule K' protíná některé přímky v jedné části kužele, jiné v druhé části kužele a jiné ne.
(d) Koule K' protíná všechny přímky (lze jen v jedné části).
(e) Hraniční případy mezi (a), (b), (c), (d) (nebudeme je počítat do těchto případů.)

V případech (a) a (d) se koule K' nebude dotýkat žádné ze zmíněných přímek, neboli X neleží v M. V případech (b) a (c) koule K' jednu z přímek protíná a jinou ne, budu tedy přímkou otáčet kolem osy XS tak dlouho, než přejde ve druhou a v jednom okamžiku musela projít polohou, kdy se koule K' pouze dotýkala, čili X patří do množiny M. (rozmyslete si, proč platí poznámka u případu (d)). Hraniční případy se snadno rozeberou. Bod (e) vlastně popisuje část hranice množiny M, zbytek hranice leží na površích koulí, ale celá se dá zařadit mezi body (b) a (c), takže M je uzavřená.

Množina M bude zřejmě invariantní vůči libovolné rotaci kolem osy SS', takže stačí prozkoumat, jak bude vypadat její řez libovolnou rovinou, která obsahuje osu SS'. V této rovině vytnou koule dvě kružnice. Přikreslíme-li všechny jejich 4 společné tečny, rozpadne se tím rovina na několik oblastí a v každé z nich nestane maximálně jeden z případů (a), (b), (c), (d). Uvnitř koulí bod X nemůže být. Situace pak vypadá tak, jak je to vidět na obrázku.



Obrázek k řešení páté úlohy.