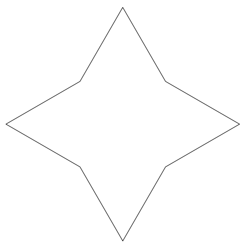
Austrálie

1. podzimní série | Termín odeslání: 1. října 2018

Úloha 1. (3 body)

Na australské pláži se válí hvězdice, jejíž tvar vidíte na obrázku[1]. Rozřežte ji čtyřmi přímkami na třináct částí.



Úloha 2. (3 body)

Rodinka 2018 koalů leží na přímce, přičemž vzdálenost každých dvou sousedních je 1. Na jednom z krajních koalů sedí blecha. Dokažte, že blecha umí postupně kousnout každého koalu, pokud použije pouze skoky délky $1, 2, \ldots, 2017$, každý právě jednou.

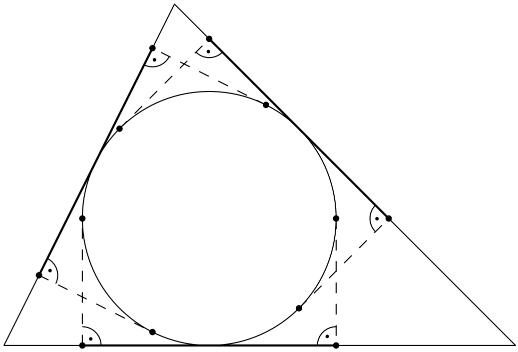
Úloha 3. (3 body)

Na šachovnici 100×100 je rozmístěno 50 ježur, které se pohybují jako šachoví králové. Pak se na dalším neobsazeném políčku objeví Štěpán, který se pohybuje jako šachová věž, ježury však nemůže vyhazovat ani přeskakovat. Nejdříve se najednou pohne všech 50 ježur, poté Štěpán – to se opakuje, dokud není Štěpán vyhozen. Ukažte, že ať jsou ježury a Štěpán na začátku rozmístění jakkoli, existuje pro ježury strategie, se kterou Štěpána vždy vyhodí.

Úloha 4. (5 bodů)

Z vrcholu hory Uluru si Petr přinesl kámen s vyrytým tajuplným obrazcem. Je na něm trojúhelník a úsečky vzniklé kolmými průměty jeho kružnice vepsané na jednotlivé strany. Dokažte, že koncové body těchto průmětů leží všechny na jedné kružnici.

[1] Na obrázku je čtverec s čtyřmi rovnostrannými trojúhelníky na jeho stranách.



Úloha 5. (5 bodů)

Marian na svém pozemku nakreslil tabulku se dvěma řádky a jedenácti sloupci. Na každé políčko spodního řádku postavil jednoho klokana. Klokany očísloval postupně zleva doprava jako $-5, -4, \ldots, 4, 5$. Následně začal tleskat. Po každém tlesknutí právě jeden klokan přeskočil na některé políčko sousedící hranou s tím, na kterém stál. V žádném kroku nebyli dva klokani na jednom políčku. Kolikrát nejméně musel Marian tlesknout, aby na konci každý klokan stál na místě, na kterém na začátku stál klokan s opačným číslem?

Úloha 6. (5 bodů)

Dingo, klokan a ptakopysk se potkali u limonády a bavili se o svých oblíbených prvočíslech d, k, p. Pak zjistili, že ta splňují vztah $\frac{d}{k} - \frac{4}{p+1} = 1$. Určete všechny možné trojice d, k, p.

Úloha 7. (5 bodů)

V každém vrcholu pravidelného 2018úhelníku seděl ráno jeden termit. Tito termiti byli v nějakém pořadí označení čísly 1 až 2018 (každé číslo bylo použito). Večer se každý termit nacházel ve vrcholu naproti tomu, v němž začínal. Jediné, co termiti umějí, je vyměnit si místo se svým sousedem. Dokažte, že se někdy v průběhu dne prohodili dva termiti se součtem čísel 2019.

Úloha 8. (5 bodů)

Chrabrý Hedvules se vydal na dovolenou do Austrálie. Uprostřed buše potkal hydru sestávající ze spousty hlav, z nichž některé byly spojené krky[2]. Poté, co na něj hydra zaútočila, praštil Hedvules hydru do jedné z jejích hlav. I stala se zvláštní věc: zmizely všechny krky vyrůstající z této hlavy, ale naopak z ní vyrostly krky do všech hlav, s nimiž tato hlava předtím nebyla spojena. Kolik takových ran mu určitě stačí na to, aby se hydra rozpadla na alespoň dvě části, když víme jen to, že hydra měla na začátku právě 100 krků?

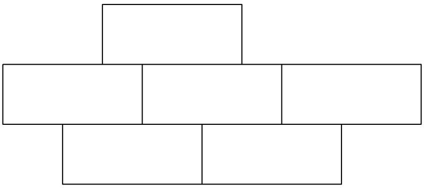
[2] Každý krk vždy spojuje právě dvě hlavy.

Obdélníky

2. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. LISTOPADU 2018

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Viki si koupil šest shodných obdélníkových dlaždiček o obvodu 38 cm a spojil je do jednoho obrazce znázorněného na obrázku. Jaký obvod má výsledný útvar?



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Obdélník $ABCD$ má strany o délkách $|AB| = 4$ a $|AD| = 2$. Na úsečce AB leží bod P tak, že $|AP| = 1$. Ukažte, že přímka DP je kolmá na AC.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

V tabulce 8×8 je začerněno sedm políček. Najděte největší a takové, že v obrazci budeme vždy schopni najít nezačerněný obdélník[1] složený z alespoň a políček, ať už byla začerněná kterákoliv sedmice.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Uvnitř obdélníku $ABCD$ o obsahu S se nachází bod P. Ukažte, že

$$|PA| \cdot |PB| + |PC| \cdot |PD| \geq S.$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Áďa našla konvexní mnohoúhelník M a délku h. Nad každou stranou mnohoúhelníku nakreslila obdélník s druhou stranou délky h, který je namířený dovnitř mnohoúhelníku. Všimla si, že součet obsahů všech těchto obdélníků je roven dvojnásobku obsahu M. Ukažte, že tyto obdélníky určitě pokrývají M.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)

Honza si vyrobil dvojici obdélníků $ABCD$ a $DEFG$ takovou, že úsečky AE a CG obě procházejí bodem D a čtyřúhelník $ACEG$ je tětivový. Druhý průsečík úsečky BC s kružnicí opsanou čtyřúhelníku $ACEG$ nazveme X a druhý průsečík úsečky EF s toutéž kružnicí označíme Y. Ukažte, že obsah čtyřúhelníku $AXYG$ je roven součtu obsahů obdélníků $ABCD$ a $DEFG$.

[1] Čtverec také považujeme za obdélník.

Úloha 7. (5 bodů)

V trojúhelníku ABC se kružnice vepsaná dotýká stran AB a BC v bodech X a Y. Kružnice vepsaná trojúhelníku XBY se dotýká stran XB a BY v bodech P a Q. Tyto dvě kružnice vepsané se protínají v bodech R a S tak, že P, Q, R a S leží na kružnici v tomto pořadí. Ukažte, že $PQRS$ je obdélník právě tehdy, když je poměr poloměrů těchto kružnic vepsaných roven $3:2$.

Úloha 8. (5 bodů)

Nad stranami trojúhelníka ABC sestrojíme (ne nutně podobné) obdélníky $ABDE$, $BCFG$ a $CAHI$, které s daným trojúhelníkem sdílí pouze stranu. Ukažte, že osy úseček HE, DG a FI se protínají v jednom bodě.