Kombinatorické počítání

2. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. LISTOPADU 2017

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Štěpán vytvořil posloupnost cifer tak, že za sebe napsal čísla $1, 2, 3, \ldots, 99$ v tomto pořadí. Pak náhodně ukázal na jednu z osmiček. Jaká je pravděpodobnost, že oba její sousedé jsou čtyřky?

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Napište na stěny dvou šestistěnných kostek přirozená čísla tak, aby při všech možných hodech byl součet padlých čísel mezi 2 a 13 (včetně) a aby všechny tyto součty padaly stejně často.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Kuba zapomněl svůj PIN. Samozřejmě ví, že je složený ze čtyř číslic. Jinak si ale vzpomíná jen na to, že součet cifer je dělitelný třemi. Kolik kombinací musí v nejhorším případě vyzkoušet?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Kolika způsoby lze na šachovnici 9×9 obarvenou klasickým způsobem rozmístit devět věží tak, aby se žádné dvě neohrožovaly a všechny stály na stejné barvě?

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Dva prváci Pavel a Filip se zúčastnili šachového turnaje druháků. V turnaji hrál každý s každým právě jednou. Za každou výhru dostal hráč jeden bod a za prohru žádný. V případě remízy dostali oba hráči po půlbodu. Turnaj dopadl tak, že druháci měli všichni stejně bodů a Filip s Pavlem měli dohromady osm bodů. Kolik druháků se mohlo zúčastnit turnaje?

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Verča si do sešitu vypsala všechny uspořádané dvojice (A, B) podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2017\}$. Následně si pro každou takovou dvojici zapsala velikost množiny $A \cap B$ a všechny tyto velikosti sečetla. Kolik jí vyšlo?

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Jinému Kubovi na zahrádce roste strom[1], který má ve svých 2017 vrcholech napsaná čísla 1 až 2017. Kuba přitom umí čarovat – když ukáže na nějakou hranu stromu, čísla v jejích vrcholech se prohodí. Jednoho dne se Kuba rozhodl postupně v nějakém pořadí ukázat na všechny hrany stromu (na každou právě jednou) a rozmyslel si, že v závislosti na zvoleném pořadí mu takto může nakonec vzniknout m různých očíslování. Kolik nejméně prvočíselných dělitelů počítaných včetně násobnosti[2] může mít m?

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Nechť $a_1, a_2, \ldots$ je posloupnost celých čísel, která pro každé přirozené n splňuje $\sum_{d|n} a_d = 2017^n$. Ukažte, že $n \mid a_n$ pro každé přirozené n.

[1] Viz http://mks.mff.cuni.cz/archive/34/serial.pdf, kapitola *Stromy*.

[2] Tedy například u 12 bychom získali tři – jednu trojku a dvě dvojky.

Rovnostranné trojúhelníky

3. podzimní série | Termín odeslání: 4. prosince 2017

Úloha 1. (3 body)

Je dán rovnostranný trojúhelník. Dokreslete do obrázku dvě přímky tak, aby se v něm pak nacházely čtyři rovnostranné trojúhelníky (mohou se překrývat).

Úloha 2. (3 body)

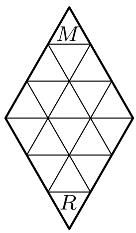
Je dán čtverec $ABCD$. V něm je vyznačený bod P takový, že je trojúhelník ABP rovnostranný. Mimo čtverec zvolme bod Q tak, aby byl trojúhelník ADQ rovnostranný. Dokažte, že body Q, P a C leží na jedné přímce.

Úloha 3. (3 body)

V rovině leží pět shodných rovnostranných trojúhelníků, které mohou být různě natočené. Dokažte, že pro každý z nich lze zbylé trojúhelníky bez otáčení posunout tak, aby ho celý zakrývaly. Trojúhelníky se mohou překrývat.

Úloha 4. (5 bodů)

Michal a Rado hráli hru. Nejprve k sobě stranou slepili dva rovnostranné trojúhelníky a potom na ně nakreslili pravidelnou trojúhelníkovou síť tak, že políčka měla n-krát kratší stranu než původní trojúhelníky. Následně si stoupli do protilehlých vrcholových políček. V každém tahu si každý z kluků vybral nějaké políčko, které sousedilo stranou s políčkem, na němž právě stál, a posunul se na něj. Hráči se střídali po tahu a Michal začínal. Předem se dohodli, že zvítězí ten, kdo buď jako první stoupne na políčko, kde už stojí ten druhý, nebo jako první dorazí na místo, odkud ten druhý vyrážel. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii[3].

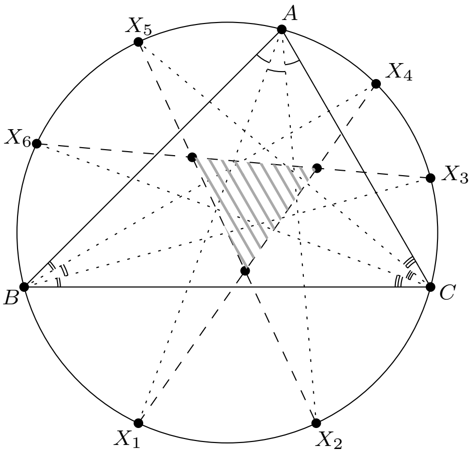


Situace na začátku hry pro $n = 3$

[3]Hráč má vyhrávající strategii, pokud umí vyhrát nezávisle na tom, jak táhne jeho protivník.

Úloha 5. (5 bodů)

Do kružnice k je vepsán trojúhelník ABC. Přímky procházející vrcholem A, které dělí úhel $\sphericalangle BAC$ na třetiny, protínají kružnici k podruhé v bodech X_1 a X_2. Body X_3 až X_6 jsou definované podobně pomocí vrcholů B a C. Navíc body $X_1, X_2, \ldots, X_6$ leží na k v tomto pořadí proti směru hodinových ručiček. Dokažte, že přímky X_1X_4, X_2X_5 a X_3X_6 určují rovnostranný trojúhelník.



Úloha 6. (5 bodů)

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod P. Označme postupně X, Y, Z průsečíky přímek AP, BP, CP se stranami trojúhelníku ABC. Ukažte, že $|PX| + |PY| + |PZ| < |AB|$.

Úloha 7. (5 bodů)

V sešitě je nakreslený trojúhelník ABC, pro který platí, že úhel při vrcholu A je dvojnásobkem úhlu při vrcholu B. Anička v něm vyznačila bod P a pak si všimla, že vzdálenosti bodu P od bodů A a B jsou stejné. Navíc je délka úsečky AC stejná jako délka úsečky CP. Dokažte, že přímka CP dělí úhel při vrcholu C v poměru $2 : 1$.

Úloha 8. (5 bodů)

V různostranném trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 60°$. Osy úhlů CAB, BCA protínají protější strany v bodech X, Y a sebe navzájem v I. Nad úsečkou XY sestrojíme dva rovnostranné trojúhelníky XYP a XYQ. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku BPQ. Ukažte, že $OI \perp AC$.

Teorie grup I – Moc abstrakce

1. seriálová série Termín odeslání: 4. prosince 2017

Úloha 1. (5 bodů)
Mějme grupu G, ve které pro každý prvek g platí $g^2 = e$. Ukažte, že G je abelovská.

Úloha 2. (5 bodů)
Uvažte následující dvě grupy: G je grupa, jejíž prvky jsou všechna kladná racionální čísla s binární operací jejich klasického násobení. Naproti tomu H je grupa všech polynomů v jedné proměnné s celočíselnými koeficienty a její binární operací je běžné sčítání polynomů. Ukažte, že $G \simeq H$.

Úloha 3. (5 bodů)
Nechť G je grupa a N nějaká její normální podgrupa, přičemž faktorgrupa G/N je nekonečná cyklická. Dokažte, že pak pro každé přirozené n existuje podgrupa $H \leq G$ s indexem n.

Integers

4^{TH} AUTUMN SERIES — DATE DUE: 8^{TH} JANUARY 2018

Pozor, u této série přijímáme pouze řešení napsaná anglicky!

PROBLEM 1. (3 POINTS)

Consider a pair of integers with the following properties:

(i) Their decimal representations do not contain zeros.
(ii) We can remove ten digits from the decimal representation of each of them to get identical numbers (not necessarily the same ten digits for both numbers).

Show that we can insert ten digits to the decimal representations of the two original numbers to obtain identical numbers.

PROBLEM 2. (3 POINTS)

A knight encountered a hundred-headed dragon. A sign in front of the cave says that knight can cut only 3, 5 or 8 heads in one swing. If he cuts off 3 of its heads, 9 new will grow. If he cuts off 5 heads, 2 new will grow and if he cuts off 8 heads, 11 new heads will grow. However, if the dragon loses its last head, it dies and no heads will regrow. Prove that the knight cannot kill the dragon.

PROBLEM 3. (3 POINTS)

Sir Filip and Madam Verča each picked a positive integer and secretly told Štěpán what their choice was. Štěpán wrote the product of the two numbers on one piece of paper and their sum on another one. Then he picked one of the pieces and showed it to Filip and Verča. It read 462. Filip said that he cannot determine Verča's number. After considering Filip's answer for a while Verča still couldn't find his number. What is Verča's number?

PROBLEM 4. (5 POINTS)

Let $s(x)$ denote the sum of the digits in the decimal expansion of x. Find all positive integers n such that[4] $s(n!) = 9$.

PROBLEM 5. (5 POINTS)

Anička and Bára have two sacks, one with m balls and the other with n balls. They decided to play a game with the following rules: They will take turns with Anička starting. In each turn, the player has to either remove a ball from one or both of the sacks, or move a ball from one sack to the other. If a ball is moved from one sack to another, it cannot be moved back in the very next move by the other player. Whoever removes the last ball, wins. With respect to m and n, who has the winning strategy[5]?

[4] For a positive integer n we define $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ and we call this number *factorial of n*.

[5] A player has a winning strategy if he can achieve a win regardless of the moves of the other player.

Problem 6. (5 points)

Let n be a positive integer. Suppose that we have a partition of all positive integers into n sets such that if two distinct numbers belong to the same set, so does their sum. What is the highest number which can be an element of a singleton[6]?

Problem 7. (5 points)

Find all pairs of positive integers (n, k) satisfying the equation

$$n^k = (n-1)! + 1.$$

Problem 8. (5 points)

Consider a 2018×2018 checkerboard covered with 2×1 rectangular tiles. Prove that it is possible to fill in all 1×1 squares with positive integers in such a way that:

(i) The sum of the two numbers on every tile is always the same.
(ii) Two neighbouring numbers, whose corresponding squares share a side, are coprime if and only if they belong to the same tile.

[6] *Singleton* is a set which contains exactly one element.