

Finální myšmaš

4. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 14. KVĚTNA 2018

ÚLOHA 1.

(a) David má doma v řadě za sebou položených pět krabic. Každou noc spí v jedné z nich, ale odmítá komukoli říct ve které. David moc rád vstává brzo, a protože jak známo *ranní ptáče dál doskáče*, každé ráno přeskočí do sousední krabice, ve které zůstane až do následujícího rána. Kačka by ráda Davida zase spatřila. Každé poledne se může podívat do jedné z krabic a zjistit, jestli v ní David je. Nalezněte strategii, díky níž Kačka časem otevře krabici, ve které se David zrovna schovává. (2 BODY)

(b) Bitevní pole má tvar tabulky $n \times n$, kde n je přirozené číslo. Na každém políčku před bitvou stojí jeden voják. Vojáci se nepohybují, v průběhu bitvy ale můžeme opakovaně provádět následující taktickou operaci – vybereme si libovolné políčko a na všech políčkách sousedících s ním hranou (ale ne v něm samotném) všechny vojiny povýšíme na generály a všechny generály naopak degradujeme na vojiny. Určete, pro která n lze docílit toho, aby *po bitvě byl každý generálem*. (3 BODY)

ÚLOHA 2.

(a) Rado vyhrál v tombole několik tříprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Pro každé dvě jeho množiny A a B , které nejsou stejné, platí $|A \cap B| \leq 1$. Dokažte, že Rado nemá víc než $\frac{n(n-1)}{6}$ množin. (2 BODY)

(b) Od své výhry v tombole Rado nepřestal o oné množině $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ přemýšlet. Proto se jeho rodiče rozhodli, že mu její co největší podmnožinu X zakážou. Zároveň mu ale nechtěli zkazit radost z výhry, a tak se dohodli, že zakážou jen takové prvky, aby žádná z Radových tříprvkových podmnožin neměla všechny své prvky zakázané. Dokažte, že mohou vybrat podmnožinu X s alespoň $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ prvky.¹ (3 BODY)

ÚLOHA 3.

Mějme rovnostranný trojúhelník ABC a bod Q uvnitř něj. Označme P_a, P_b, P_c paty kolmic vedených z bodu Q na strany BC, AC, AB . Ukažte, že obě trojice trojúhelníků AP_cQ, BP_aQ, CP_bQ a P_cBQ, P_aCQ, P_bAQ

(a) mají stejný součet obsahů, (2 BODY)

(b) mají stejný součet poloměrů kružnic vepsaných. (3 BODY)

ÚLOHA 4.

(a) Ukažte, že pro každé přirozené číslo n existuje n přirozených čísel a_1, a_2, \dots, a_n , jejichž součet je druhou mocninou přirozeného čísla a součin třetí mocninou přirozeného čísla. (2 BODY)

(b) Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takových, že $n^2 + 3m$ i $m^2 + 3n$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. (3 BODY)

¹Pro $n \in \mathbb{N}$ značíme $\lfloor n \rfloor$ dolní celou část čísla n , tedy největší přirozené číslo, které není větší než n .

ÚLOHA 5.

- (a) Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel a_1, a_2, \dots taková, že pro žádná dvě přirozená čísla $i \neq j$ nejsou zároveň $a_i + j$ a $a_j + i$ dělitelná 2017? (2 BODY)
- (b) Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel a_1, a_2, \dots taková, že pro každá dvě přirozená čísla $i \neq j$ jsou $a_i + j$ a $a_j + i$ nesoudělná? (3 BODY)

ÚLOHA 6.

- (a) Na rovině leží krychle o hraně délky jedna. V dané výšce h nad touto rovinou ($h > 1$) je zdroj světla. Jakou nejmenší plochu může mít stín, který krychle vrhá na rovinu? Do plochy stínu počítáme i spodní podstavu krychle. (2 BODY)
- (b) Slunce svítí rovnoběžnými paprsky kolmo na rovinu. Nad touto rovinou se v prostoru vznášejí krychle o hraně délky jedna, kterou je možné libovolně otáčet. Určete, jaký největší stín může tato krychle na rovinu vrhat? (3 BODY)

ÚLOHA 7.

- (a) Na kružnici o poloměru jedna leží naproti sobě body A a B . Zároveň je na ní začerveno několik dalších bodů. Nechť a je geometrický průměr² délek všech úseček vedených z A do červených bodů a b je geometrický průměr délek všech úseček z B do červených bodů. Ukažte, že alespoň jedno z čísel a, b je menší nebo rovno $\sqrt{2}$. (2 BODY)
- (b) Určete nejmenší kladné reálné číslo t takové, že pro všechna kladná reálná čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} \geq t\sqrt{ab} + (1-t)\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

(3 BODY)

²Geometrický průměr nezáporných čísel a_1, a_2, \dots, a_n je definován jako $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.