Mnohoúhelníky

3. podzimní série Termín odeslání: 5. prosince 2016

Mnohoúhelník o n vrcholech je omezená část roviny ohraničená uzavřenou lomenou čarou, která samu sebe neprotíná a je složená z n úseků (a n zlomů). Konvexní mnohoúhelník je takový mnohoúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou menší než $180°$. Pokud má úsečka krajní body uvnitř konvexního mnohoúhelníku, pak je v něm obsažena celá.

Úloha 1. (3 body)

Nalezněte takový mnohoúhelník, aby každá jeho strana prodloužená na přímku protínala právě jednu další stranu v jejím vnitřním bodě.

Úloha 2. (3 body)

Červenáčkovi došly omalovánky, a tak vzal svůj oblíbený pravidelný 2016úhelník a začal jeho vrcholy barvit načerveno. Dokažte, že když jich obarvil 1010, některé čtyři červené body tvořily vrcholy obdélníku[1].

Úloha 3. (3 body)

Najděte šestiúhelník, který lze rozdělit rovným řezem na čtyři shodné trojúhelníky.

Úloha 4. (5 bodů)

Rozhodněte, zda pro nějaký stoúhelník platí, že pro žádné $n < 100$ není možné vybrat n jeho stran a složit z nich n-úhelník.

Úloha 5. (5 bodů)

Upovídaná ovečka se každý den pase na některém vrcholu daného 2017úhelníku. Zlý vlk chce ovečku sežrat. Aby to mohl udělat, musí být nějaký den ve stejném vrcholu 2017úhelníku jako ovečka, přičemž i-tou noc se musí přesunout po obvodu mnohoúhelníku o právě i vrcholů, počínaje první nocí. Naštěstí pro vlka je ovečka upovídaná, a tak všechna zvířátka (včetně vlka) dopředu vědí, kde se který den bude pást. Kolik nejméně dní potřebuje vlk, aby byl ovečku vždy schopen chytit nezávisle na tom, ve kterém vrcholu se sám první den nachází?

Úloha 6. (5 bodů)

Dva shodné pravidelné n-úhelníky se překrývají tak, že jejich průnik je $2n$-úhelník (ne nutně pravidelný), jehož hrany postupně dokola očíslujeme čísly 1 až $2n$. Dokažte, že součet délek jeho sudě očíslovaných stran je stejný jako součet délek jeho stran s lichým číslem.

Úloha 7. (5 bodů)

Pro $n \geq 3$ je dán konvexní n-úhelník K, jehož žádné čtyři vrcholy neleží na jedné kružnici. Trojúhelník daný trojicí vrcholů n-úhelníku K nazveme *pokrývací*, pokud jemu opsaný kruh pokrývá K. Dokažte, že pokrývacích trojúhelníků je přesně $n - 2$.

[1] Obdélníkem je i čtverec.

Úloha 8. (5 bodů)

Rado a kaktus hrají logickou hru s pravidelným $(2n+1)$-úhelníkem, kde $n > 1$ je přirozené číslo. Hrají střídavě, přičemž Rado začíná a každý z nich ve svém tahu začerní jeden dosud nezačerněný vrchol. Vyhraje ten, po jehož tahu na papíře nezbude žádný ostroúhlý trojúhelník s vrcholy v nezačerněných vrcholech původního $(2n+1)$-úhelníku. V závislosti na n určete, kdo má vyhrávající strategii.

Geometrie trojúhelníka I

1. seriálová série Termín odeslání: 5. prosince 2016

Úloha 1. (5 bodů)
Na straně BC daného trojúhelníka ABC se pohybují body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Označíme-li M střed úsečky AD, dokažte, že přímka ME prochází pevným bodem (nezávislým na poloze bodů D, E).

Úloha 2. (5 bodů)
V trojúhelníku ABC s opsištěm O, těžištěm T a kolmištěm H označme O_a osový obraz O podle strany BC a analogicky sestrojme body O_b a O_c. Dále označme X střed úsečky HT. Dokažte, že přímky AH, O_aX a O_bO_c procházejí jedním bodem.

Úloha 3. (5 bodů)
Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, ve kterém $AB \parallel CD$. Kružnice vepsaná trojúhelníku BCD se dotýká strany CD v bodě P. Buď Q bod na vnitřní ose úhlu CAD takový, že $QP \perp CD$. Druhý průsečík kružnice opsané trojúhelníku QCA s přímkou CD nazvěme X. Ukažte, že trojúhelník QAX je rovnoramenný.

Functions

4TH AUTUMN SERIES　　　DATE DUE: 3RD JANUARY 2017

Pozor, u této série přijímáme pouze řešení napsaná anglicky!

PROBLEM 1. (3 POINTS)
David found the quadratic function $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty), f(x) = x^2$ and a function $g : \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$. For each of the compositions $f \circ g$ or $g \circ f$ decide whether it may be injective.

PROBLEM 2. (3 POINTS)
Is there a function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $f(f(n)) < f(n)$ for all positive integers n?

PROBLEM 3. (3 POINTS)
Find a function $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ such that $f^{(n)}$ has exactly n roots for all positive integers n.

PROBLEM 4. (5 POINTS)
Find all functions $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ satisfying $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

PROBLEM 5. (5 POINTS)
Let $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be a function that satisfies $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$ for all $x, y \in \mathbb{R}^+$. Show that f is nonincreasing.

PROBLEM 6. (5 POINTS)
Lucien had a dream about a nonzero polynomial P with nonnegative integer coefficients. If Áďa says an integer z, Lucien tells her the value $P(z)$. What is the lowest number of questions Áďa has to ask to be able to figure out what Lucien's polynomial is?

PROBLEM 7. (5 POINTS)
A function $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ is said to be *cruelstrict* if $f^{(f(k))}(k) = k$ for all positive integers k. Prove that any cruelstrict function has at least $P(n) + 1$ fixed points, where $P(n)$ is the number of primes in $(\sqrt{n}, n\rangle$.

PROBLEM 8. (5 POINTS)
Let $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ be a function given by $f(n) = \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots (n-1)\sqrt{n}}}}$ for all positive integers $n > 1$. Prove that f is bounded by 3.