Rozdělování

1. jarní série | Termín odeslání: 6. února 2017

Úloha 1. (3 body)
V lese je několik mravenišť. Hloubavý biolog si do notýsku zapsal množství mravenců v každém mraveništi, čímž získal k různých nenulových hodnot. Potom se ale do lesa přestěhoval zlý mravenečník, který každý den snědl jednoho mravence z každého mraveniště, ve kterém ještě nějací mravenci zbývali. Každý den si poznamenal, kolik jich snědl, přičemž nuly z lenosti nezapisoval. Ukažte, že jím napsaná čísla nabývají právě k různých hodnot.[1]

Úloha 2. (3 body)
Máme bílý a černý trojúhelník, které jsou si podobné. Oba rozdělíme na dva trojúhelníky. Jeden ze vzniklých bílých trojúhelníků je podobný jednomu černému. Musí být podobné i zbylé dva?

Úloha 3. (3 body)
V zemi je $n \geq 2$ měst a každá dvě jsou spojena silnicí. Dva silničáři Syp a Posyp je mají za úkol posypat štěrkem, ale jsou líní, a proto si práci rozdělí tak, aby:

(1) Každou silnici prošel právě jeden z nich.
(2) Oba skončili v tom městě, ve kterém začali, a mezitím do něj nevkročili.
(3) Každý po cestě navštívil každé město kromě počátečního právě jednou.

Kolik měst v zemi bylo?

Úloha 4. (5 bodů)
Myška si koupila 2017 ne nutně stejných kousků sýra. Ukažte, že nějaký z nich mohla rozříznout na dvě části a vzniklých 2018 kousků rozdělit do dvou skupin, které budou mít stejný počet dílků i stejnou hmotnost.

Úloha 5. (5 bodů)
Dokažte, že když jakkoliv rozdělíme přirozená čísla do konečně mnoha skupin, pak alespoň v jedné z nich bude nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla.

Úloha 6. (5 bodů)
Jedenáct organizátorů schovalo do trezoru zadání letošního myšmaše. Zamkli ho na n zámků a každý z nich si vzal několik klíčů. Jeden klíč si mohlo vzít víc organizátorů. Přitom chtěli, aby každá šestice byla schopna otevřít trezor (tedy odemknout všechny jeho zámky), ale žádná pětice se dovnitř nedostala. Kolik nejméně zámků potřebovali?

Úloha 7. (5 bodů)
Na kruhovém ostrově je v písku nakreslen n-úhelník se stejně dlouhými stranami. Ve středu každé strany čekají zády k sobě dva ptakopysci. Najednou se všichni rozběhnou po stranách, na kterých stojí, a po přímce pokračují až k pobřeží. Ukažte, že můžeme ptakopysky rozdělit do dvou skupin tak, že součet uběhnutých vzdáleností v obou skupinách bude stejný.

[1] Mravenci se nerozmnožují.

Úloha 8. (5 bodů)

V PraSeStánu se vláda rozhodla zřídit 2017 okresů o stejné rozloze. Své návrhy na rozdělení podaly dvě politické strany. Dokažte, že lze vybudovat 2017 okresních úřadů tak, aby byl v každém okrese právě jeden, ať už vláda poté zvolí kteroukoli variantu.

Stereometrie

2. jarní série — Termín odeslání: 6. března 2017

Úloha 1. (3 body)
Stěnové úhlopříčky kvádru mají délky a, b a c. Jakou délku má jeho tělesová úhlopříčka?

Úloha 2. (3 body)
Když Mirek umřel, rozhodla se mu ostatní PraSátka postavit monumentální hrobku ve tvaru „pravoúhlé pyramidy“, tedy čtyřbokého jehlanu se všemi trojúhelníkovými stěnami pravoúhlými. Poraďte jim, jak by taková pyramida měla vypadat. Tedy pokud takové pyramidy existují, určete délky hran jedné z nich, jinak vysvětlete, proč neexistují.

Úloha 3. (3 body)
Když si Kuba hrál se svým oblíbeným pravidelným čtyřstěnem, všiml si, že na zem vrhá čtvercový stín. Je to možné, nebo měl jen halucinace? Svou odpověď podrobně dokažte. Předpokládejte, že máme jeden zdroj světla umístěný v nekonečnu, takže jsou světelné paprsky rovnoběžné.

Úloha 4. (5 bodů)
Kolem Slunce obíhalo do roku 2006 devět planet. Slunce považujeme za kouli, planety za body v prostoru. Ukažte, že na Slunci existoval bod, z nějž byly vidět nejvýše tři planety.[2]

Úloha 5. (5 bodů)
Ježibaba Zuzka dala princi Pepovi za úkol rozdělit pětiboký kolmý hranol na jehlany s podstavami v podstavách daného hranolu. Podaří se mu to a zachrání princeznu, nebo jí propadne hrdlem?

Úloha 6. (5 bodů)
V prostoru se vznáší kružnice k a bod A mimo rovinu danou kružnicí k. Označme B kolmou projekci bodu A do dané roviny. Uvažme libovolný bod C kružnice k a kolmou projekci D bodu B na přímku AC. Ukažte, že existuje kružnice l taková, že nezávisle na volbě bodu C bude bod D ležet na l.

Úloha 7. (5 bodů)
Mějme dánu sféru[3] a body A, B, C a D takové, že každá z úseček AB, BC, CD, DA se dané sféry dotýká. Dokažte, že tyto čtyři body dotyku leží v jedné rovině.

Úloha 8. (5 bodů)
Mějme konvexní mnohostěn s devíti vrcholy. Zvolíme jeden jeho vrchol a mnohostěn osmkrát posuneme tak, že při každém posunutí se tento vrchol přesune do nějakého jiného vrcholu zadaného tělesa. Rozhodněte, zda nějaké dva ze vzniklých devíti shodných mnohostěnů musí mít průnik s nenulovým objemem.

---

[2] Planeta je viditelná z bodu A na povrchu Slunce, pokud se nalézá v poloprostoru, který má hraniční rovinu tečnou ke Slunci v bodě A a neobsahuje Slunce. Do poloprostoru zahrnujeme i hraniční rovinu.

[3] Sféra se středem v bodě S a poloměrem r je množina bodů v prostoru, které mají od S vzdálenost r.

Geometrie trojúhelníka 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 6. ÚNORA 2017

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Nechť I_A a I_C jsou postupně A-připsiště a C-připsiště trojúhelníka ABC. Na kružnici jemu opsané zvolme libovolný bod P různý od B. Dokažte, že střed úsečky, jejíž krajní body jsou opsiště trojúhelníků I_ABP a I_CBP, je opsištěm trojúhelníka ABC.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Konvexní pětiúhelník $AXYZB$ je vepsán do půlkružnice s průměrem AB. Označme postupně P, Q, R, S paty kolmic vedených bodem Y k přímkám AX, BX, AZ, BZ. Dokažte, že velikost ostrého úhlu svíraného přímkami PQ a RS je rovna polovině velikosti úhlu XOZ, kde O je střed úsečky AB.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Paty kolmic z bodu P na strany BC, CA a AB označme postupně D, E a F. Dále nechť V je kolmiště trojúhelníku AEF. Dokažte, že pokud $DE \perp DF$, pak platí

$$|\sphericalangle BPC| + |\sphericalangle BVC| = 180^\circ + \alpha.$$