Cifry

3. jarní série — Termín odeslání: 10. dubna 2017

Pokud není řečeno jinak, pro zápis čísel používáme desítkovou soustavu. V celé sérii jsou proměnné k a n přirozená čísla.

Úloha 1. (3 body)
Nechť $S(k)$ značí ciferný součet čísla k. Nalezněte číslo n takové, že[1] $(S(n) + 2017) \mid n$.

Úloha 2. (3 body)
Existuje přirozené číslo, které má právě deset přirozených dělitelů, přičemž tito dělitelé mají navzájem různé poslední cifry?

Úloha 3. (3 body)
Nechť $S(k)$ stále ještě značí ciferný součet čísla k. Najděte číslo n, pro které jsou $S(n)$ i $S(n+1)$ dělitelná sedmi.

Úloha 4. (5 bodů)
Dokažte, že pro každé číslo n nesoudělné[2] s deseti existuje číslo složené ze samých jedniček, které je dělitelné n.

Úloha 5. (5 bodů)
Matěj s Bárou čekali na přednášku a oba se nudili. Matěj napsal na tabuli přirozené číslo. Potom každých pět minut Bára z čísla na tabuli vybrala nenulovou cifru, číslo smazala a místo něj napsala součet tohoto čísla se zvolenou cifrou. Dokažte, že se časem na tabuli muselo objevit sudé číslo.

Úloha 6. (5 bodů)
Na sto hřebících jsou popořadě zavěšená „dvojciferná“ čísla $00, 01, 02, \ldots, 10, \ldots, 99$. Áďa je mezi sebou přeskládala tak, aby se sousední čísla lišila právě v jedné cifře, a to o jedničku (tj. vedle 19 může být 09, 29 a 18, ale například 10 ne). Kolik nejvíce čísel mohlo zůstat na svém místě?

Úloha 7. (5 bodů)
Přirozené číslo nazveme *k-kruté*, pokud každý souvislý úsek jeho ciferného zápisu v soustavě o základu k je prvočíslo (zapsané v téže soustavě). Dokažte, že pro každé $k \geq 2$ existuje jen konečně mnoho k-krutých čísel.

Úloha 8. (5 bodů)
Pepa se Štěpánem vymysleli čistě matematické kouzlo. Pepa požádá diváka, aby husím brkem napsal na kus pergamenu jakýkoliv řetězec N arabských číslic. Potom Pepa zakryje některou dvojici sousedních cifer dalším kusem pergamenu. Teprve nyní přichází na scénu Štěpán, podívá se na neschované číslice a oznámí, které dvě cifry Pepa zakryl (včetně jejich pořadí). Pro jaké nejmenší N je takový trik možné provést?

---

[1] O celých číslech a a b řekneme, že *a dělí b*, píšeme $a \mid b$, pokud existuje celé číslo l takové, že $b = al$.

[2] O k, n řekneme, že jsou *nesoudělná*, pokud jejich největší společný dělitel je jedna.

Geometrie trojúhelníka 3

3. seriálová série Termín odeslání: 10. dubna 2017

Úloha 1. (5 bodů)

Je dán ostroúhlý nerovnostranný trojúhelník ABC. Tečny k jeho kružnici opsané vedené vrcholy B a C se protínají v bodě, který označíme A' a podobně definujeme body B' a C'. Označme O ospiště trojúhelníku ABC, L jeho Lemoinův bod a O' opsiště trojúhelníku $A'B'C'$. Obraz přímky LA' podle osy úhlu $B'A'C'$ označme l_A a podobně definujeme přímky l_B a l_C. Dokažte, že přímky l_A, l_B, l_C a OO' procházejí jedním bodem.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC s kružnicí opsanou Γ a Feuerbachovou kružnicí γ. Buď X bod na Γ. Nechť Y a Z jsou dva různé body na Γ takové, že středy úseček XY a XZ leží na γ. Navíc platí, že trojúhelník XYZ je ostroúhlý. Ukažte, že střed YZ leží na γ.

Úloha 3. (5 bodů)

Nechť ABC je různostranný trojúhelník s kolmištěm H a opsištěm O. Paty výšek na strany BC, CA a AB označme popořadě A_1, B_1 a C_1. Přímka OH protíná přímky B_1C_1, C_1A_1 a A_1B_1 postupně v bodech X, Y a Z. Ukažte, že kružnice nad průměry A_1X, B_1Y a C_1Z mají všechny společný bod.

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 9. KVĚTNA 2017

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

ÚLOHA 1.
Anička o prázdninách navštívila muzeum, ve kterém byla vystavena starodávná tabulka o n řádcích a 2017 sloupcích vyplněná reálnými čísly. Součty čísel ve všech jejích sloupcích byly navzájem různé. Anička tabulku omylem shodila a všechna políčka z ní vypadala. Teď by ráda čísla vrátila zpátky tak, aby součty nejen ve všech sloupcích, ale i ve všech řádcích byly navzájem různé.[3] Podaří se jí to pro jakákoliv čísla v tabulce, pokud

(a) $n = 2$, (2 BODY)

(b) $n = 2017$? (3 BODY)

ÚLOHA 2.
(a) Tonda narazil na n po sobě jdoucích přirozených čísel, jejichž součtem je prvočíslo. Určete všechny možné hodnoty n. (2 BODY)

(b) Orgové PraSátka na schůzce debatovali o tom, kam se půjde na PraSečí výlet. Zaznělo několik nápadů a každý z nich podporovalo právě k organizátorů z celkově $2k$ přítomných. Ukázalo se, že pro libovolnou $(k-1)$-člennou skupinu organizátorů existuje právě jeden návrh, který podporuje celá skupina. Dokažte, že potom $(k+1)$ je prvočíslo. (3 BODY)

ÚLOHA 3.
(a) Na bleším trhu si Honza koupil hodinový ciferník s obvykle umístěnými čísly od jedné do dvanácti. Zvláštní je ale tím, že se s čísly dá hrát. Honza každé ráno buď vyměnil dvě protilehlá čísla, nebo dvě sousední o jedna zvýšil. Kdyby žil dost dlouho, mohl by po konečně mnoha dnech mít na ciferníku dvanáct stejných čísel?

(2 BODY)

(b) Na ostrově je n nor a v každé z nich žije jeden ptakopysk. Je známo, že každému ptakopyskovi se líbí jedna nora, a ta se nelíbí žádnému jinému. Po velkém ptakopysčím zasedání bylo rozhodnuto, že se všichni ptakopysci přestěhují do nor, které se jim líbí. Probíhá to následovně: Během jednoho dne si může každý ptakopysk vyměnit noru s jediným dalším. Určete nejmenší počet dní, který jim ke stěhování stačí, ať už je situace sebezapeklitější. (3 BODY)

ÚLOHA 4.
(a) Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y splňující

$$f(x+y) < f(xy).$$

(2 BODY)

[3] Součet čísel v nějakém řádku se ale může rovnat součtu čísel v některém sloupci.

(b) Rozhodněte, zda existuje funkce $f : \langle -1, 1\rangle \to \langle -1, 1\rangle$ splňující pro každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ vztah

$$f(f(x)) = -x.$$

(3 BODY)

ÚLOHA 5.

(a) Na skalní římse leží tři hromádky o 51, 49 a 5 kamenech. V každém kroku můžeme buď sloučit dvě hromádky, nebo rozdělit hromádku se sudým počtem kamenů na dvě stejně velké. Můžeme takto vytvořit 105 hromádek po jednom kameni? (2 BODY)

(b) Čtverec je rozdělen dvěma navzájem kolmými přímkami na čtyři části. Dokažte, že pokud tři z nich mají stejný obsah, pak už nutně mají stejný obsah všechny čtyři. (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Kuba našel pravidelný čtyřstěn s hranou délky jedna. Nelenil a hned na jeho povrch nakreslil devět bodů. Dokažte, že mezi nakreslenými body vždy najdeme nějaké dva, jejichž vzdálenost v prostoru je nejvýše $\frac{1}{2}$. (2 BODY)

(b) Čtyřboký jehlan $SABCD$ má podstavu tvořenou lichoběžníkem $ABCD$ s rovnoběžnými stranami AD a BC, přičemž $|AD| > |BC|$. Středy úseček AB a SD označme po řadě M a N, průsečík roviny ABN s přímkou SC nazvěme E. Dokažte, že přímky BE a MN jsou rovnoběžné.

(3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Existuje přirozené číslo a takové, že součet počtů cifer a a a^3 je roven 2017? (2 BODY)

(b) Nechť $S(k)$ značí ciferný součet přirozeného čísla k. Pro které nejmenší přirozené n platí

$$S(n) = S(2n) = \cdots = S(2017n)?$$

(3 BODY)