Rozdělování

1. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

V lese je několik mravenišť. Hloubavý biolog si do notýsku zapsal množství mravenců v každém mraveništi, čímž získal k různých nenulových hodnot. Potom se ale do lesa přestěhoval zlý mravenečník, který každý den snědl jednoho mravence z každého mraveniště, ve kterém ještě nějací mravenci zbývali. Každý den si poznamenal, kolik jich snědl, přičemž nuly z lenosti nezapisoval. Ukažte, že jím napsaná čísla nabývají právě k různých hodnot.[1]

(David Hruška)

ŘEŠENÍ:

Počty snědených mravenců v jednotlivých dnech tvoří nerostoucí posloupnost a mění se, právě když se mění počet nedojedených mravenišť. Tato situace nastane právě jednou pro každé číslo v biologově zápisníku (tj. pro každou ze zastoupených hodnot velikostí mravenišť), protože stejně velká mraveniště se vyprázdní ve stejný den. Počet snědených mravenců (neboli počet neprázdných mravenišť) se tedy k-krát změnil, čili v průběhu celého mravenečníkova pobytu v lese nabýval právě $k+1$ hodnot. Poslední z nich je ale nulová, takže si mravenečník zapsal právě k různých hodnot.

POZNÁMKY:

Nejprve bych se rád omluvil za nejasné zadání úlohy. Sousloví „ … čímž získal k různých nenulových hodnot“ z první věty zadání se totiž zřejmě dá interpretovat dvěma způsoby. Jednak tak, že mravenišť je opravdu k a jsou různě velká, jednak tak, že mravenišť může být více než k a počty mravenců v nich se mohou opakovat. Posledně jmenovaný význam byl ten námi zamýšlený, řešitelé se ale v této otázce rozdělili na dvě zhruba stejně velké části. Vzhledem k tomu jsem uznával obě interpretace zadání. Ve druhém (původně zamýšleném) případě je úloha obecnější a dle mého soudu relativně o dost zajímavější, řešení je na druhou stranu v obou případech takřka totožné.

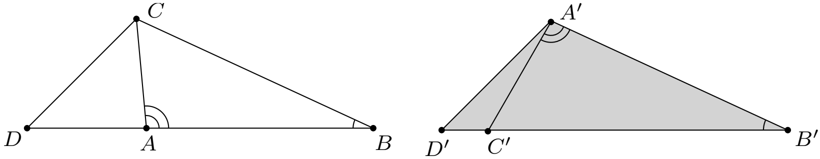
(David Hruška)

Úloha 2.

Máme bílý a černý trojúhelník, které jsou si podobné. Oba rozdělíme na dva trojúhelníky. Jeden ze vzniklých bílých trojúhelníků je podobný jednomu černému. Musí být podobné i zbylé dva?

ŘEŠENÍ:

Správná odpověď je, že si trojúhelníky podobné být nemusejí. Stačilo najít jeden protipříklad.



[1] Mravenci se nerozmnožují.

Vezměme trojúhelníky jako na obrázku. Trojúhelníky BCD a $B'A'D'$ jsou si podobné a trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ taktéž, kdežto trojúhelníky DAC a $D'C'A'$ si podobné nejsou, neboť trojúhelník DAC je ostroúhlý, zatímco trojúhelník $D'C'A'$ tupoúhlý.

Poznámky:
Řešení přišla spousta a většina byla správně. Uznala jsem všechna řešení, kde autor našel konkrétní případ vzájemně nepodobných trojúhelníků nebo kde si uvědomil, že ostroúhlý a tupoúhlý trojúhelník nemohou být podobné. Ti, kteří se naopak snažili dokázat, že odřezky trojúhelníků podobné být musejí, si neuvědomili, že řezy můžeme vést různými směry. *(Adéla Kostelecká)*

Úloha 3.

V zemi je $n \geq 2$ měst a každá dvě jsou spojena silnicí. Dva silničáři Syp a Posyp je mají za úkol posypat štěrkem, ale jsou líní, a proto si práci rozdělí tak, aby:

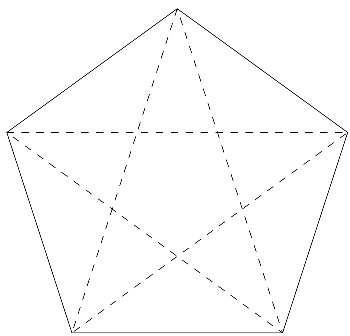
(1) *Každou silnici prošel právě jeden z nich.*
(2) *Oba skončili v tom městě, ve kterém začali, a mezitím do něj nevkročili.*
(3) *Každý po cestě navštívil každé město kromě počátečního právě jednou.*

Kolik měst v zemi bylo?

(Martin „E.T.“ Sýkora)

Řešení:
Silničář do každého města po nějaké cestě přišel, a po nějaké jiné z něj odešel, a to vždy právě jednou. Totéž platí i pro počáteční město, jen v opačném pořadí. Protože máme silničáře dva a posypali všechny silnice, z každého města vedou právě čtyři cesty. Nakonec víme, že v naší zemi je každé město spojeno se všemi ostatními cestou, čili žijeme v zemi s pěti městy.

Příkladem jsou města umístěná ve vrcholech pětiúhelníku, která Syp obejde po obvodu a Posyp po úhlopříčkách, tedy po hranách pěticípé hvězdy.



Poznámky:
Úloha byla jednoduchá, takřka všichni ji vyřešili. Pár nesprávných řešení bylo nejspíš způsobeno nepozorností při čtení zadání. Chtěla bych pochválit ty, kteří kromě správného okomentování, že měst může být jedině pět, náčrtkem či popisem tras cestářů dokázali, že jsou pak opravdu splněny všechny podmínky. Kdyby se zadání ptalo, pro kolik měst se silničářům mohlo podařit rozdělit si práci, byla by to nepostradatelná součást řešení. *(Bára Kociánová)*

Úloha 4.

Myška si koupila 2017 ne nutně stejných kousků sýra. Ukažte, že nějaký z nich mohla rozříznout na dvě části a vzniklých 2018 kousků rozdělit do dvou skupin, které budou mít stejný počet dílků i stejnou hmotnost.

(Anh Dung „Tonda" Le)

ŘEŠENÍ:
Seřaďme si jednotlivé kousky sýra dle velikosti a jejich hmotnosti označme postupně od nejlehčího sýra x_1 až po nejtěžší x_{2017}. Nyní rozdělme prvních 2016 sýrů do dvou skupin tak, že do první skupiny dáme sýry s lichým indexem a do druhé se sudým. Hmotnost první skupiny označme m_1, hmotnost druhé m_2. Ze způsobu rozdělení sýrů plyne, že $m_2 \geq m_1$. Nyní nám stačí dokázat, že $x_{2017} > m_2 - m_1$. Poté budeme schopni rozdělit poslední, nejtěžší kousek sýra na dva tak, aby kousek daný do první skupiny měl hmotnost o $m_2 - m_1$ větší než ten daný do druhé skupiny.

Rozdíl hmotností skupin můžeme vyjádřit jako $m_2-m_1 = x_2-x_1+x_4-x_3+\cdots+x_{2016}-x_{2015}$. Dále platí

$$\begin{aligned} 0 &< x_1, \\ x_2 &\leq x_3, \\ &\vdots \\ x_{2016} &\leq x_{2017}. \end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 + \cdots + x_{2016} &< x_1 + x_3 + \cdots + x_{2017}, \\ x_2 - x_1 + x_4 - x_3 + \cdots + x_{2016} - x_{2015} &< x_{2017}, \end{aligned}$$

tedy $m_2 - m_1 < x_{2017}$.

Protože je rozdíl $m_2 - m_1 < x_{2017}$, můžeme poslední kousek rozdělit na dva o hmotnostech $\frac{1}{2}(x_{2017} - (m_2 - m_1))$ a $\frac{1}{2}(x_{2017} + (m_2 - m_1))$, a tedy rozdělit sýry do dvou stejně hmotných skupin se stejným počtem sýrů.

POZNÁMKY:
Úloha byla pro většinu řešitelů pětibodovou. Řešení byla založena na rozmisťování kousků do hromádek. Často se vyskytovala řešení, ve kterých se přehazovaly dvojice sýrů mezi hromádkami. Taková řešení jsem hodnotil plným počtem bodů, když dotyčný dostatečně vysvětlil svůj algoritmus a to, že je schopen získat prohazováním rozdíl hmotností skupin menší, než jaká je hmotnost nejtěžšího kousku sýra. Pokud tento důkaz chyběl, nebo byl nedostatečný či nejasný, strhával jsem bod až dva. Řešení, která se věnovala pouze jednomu nějakému speciálnímu případu bez náznaku algoritmu či postupu, jsem hodnotil nulou. *(Jan Kadlec)*

Úloha 5.

Dokažte, že když jakkoliv rozdělíme přirozená čísla do konečně mnoha skupin, pak alespoň v jedné z nich bude nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla.

(Honza Krejčí)

ŘEŠENÍ:
Množinu přirozených čísel rozdělíme do n skupin, které označíme S_i $(1 \leq i \leq n)$. Pro spor předpokládejme, že v každé skupině S_i existuje přirozené číslo t_i takové, že S_i obsahuje jen konečně násobků tohoto čísla. Označíme si K součin všech těchto čísel t_i. Násobků K je zřejmě v každé ze skupin konečně mnoho (protože jsou to zároveň násobky t_i). Jelikož skupin je konečně mnoho, tak přirozená čísla obsahují jen konečně mnoho násobků čísla K, což je spor s tím, že přirozená čísla obsahují nekonečný počet násobků každého přirozeného čísla.

Poznámky:
Úlohu se většině řešitelů podařilo bez problémů vyřešit. Způsobů řešení bylo hned několik, většina řešitelů se rozhodla pro důkaz sporem. Několik řešitelů dokázalo, že některá ze skupin musí být nekonečná, z toho ale bohužel neplyne, že obsahuje nekonečně mnoho násobků každého přirozeného čísla (protipříkladem je například skupina prvočísel, která neobsahuje nekonečný počet násobků žádného přirozeného čísla). *(Lucien Šíma)*

Úloha 6.

Jedenáct organizátorů schovalo do trezoru zadání letošního myšmaše. Zamkli ho na n zámků a každý z nich si vzal několik klíčů. Jeden klíč si mohlo vzít víc organizátorů. Přitom chtěli, aby každá šestice byla schopna otevřít trezor (tedy odemknout všechny jeho zámky), ale žádná pětice se dovnitř nedostala. Kolik nejméně zámků potřebovali?

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:
Podle zadání každé pětici musí chybět alespoň jeden klíč. Pokud by dvěma různým pěticím chyběl stejný klíč, znamenalo by to, že by i všem orgům ze sjednocení oněch pětic chyběl onen klíč. Ale orgů ve sjednocení těchto pětic je aspoň 6, což je spor. To znamená, že klíče chybějící pěticím jsou unikátní pro každou pětici.

Tedy počet zámků můžeme zdola omezit na $\binom{11}{5} = 462$.

Tolik zámků také stačí. Za každou pětici přidáme jeden zámek a všem orgům, kteří v této pětici nejsou, dáme klíč. Pro každou šestici a každý zámek potom platí, že v šestici existuje někdo, kdo od něj má klíč, protože existuje jen pět orgů, kteří ho nemají.

Poznámky:
Úloha nebyla těžká, většinou jsem za ní rozdával plný počet bodů. *(Kuba Svoboda)*

Úloha 7.

Na kruhovém ostrově je v písku nakreslen n-úhelník se stejně dlouhými stranami. Ve středu každé strany čekají zády k sobě dva ptakopysci. Najednou se všichni rozběhnou po stranách, na kterých stojí, a po přímce pokračují až k pobřeží. Ukažte, že můžeme ptakopysky rozdělit do dvou skupin tak, že součet uběhnutých vzdáleností v obou skupinách bude stejný.

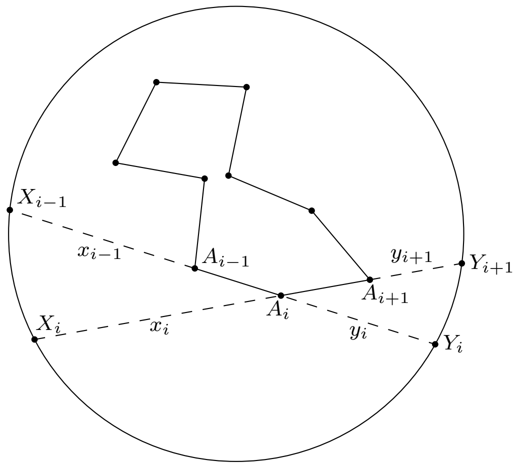
(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme si vrcholy našeho n-úhelníku jako $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Všechny indexy budeme brát modulo n. Pro každé i si průsečíky přímky A_iA_{i+1} s pobřežím označíme jako X_i a Y_{i+1} tak, že X_i, A_i, A_{i+1} a Y_{i+1} leží na přímce v tomto pořadí. Dále si označme délky úseček A_iX_i a A_iY_i jako x_i a y_i.

BÚNO nechť náš n-úhelník má strany délky 1. Z mocnosti bodu A_i ke kružnici, která tvoří pobřeží, plyne $|X_{i-1}A_i||A_iY_i| = |X_iA_i||A_iY_{i+1}|$, neboli $(x_{i-1}+1)y_i = x_i(1+y_{i+1})$. To můžeme přepsat jako $x_{i-1}y_i + y_i = x_iy_{i+1} + x_i$. Pokud sečteme všechny tyto rovnosti přes všechna i a od obou stran odečteme $\sum_{i=1}^n x_iy_{i+1}$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Nyní rozdělíme ptakopysky podle toho, zdali se po A_iA_{i+1} vydávají do A_i, nebo do A_{i+1}. Každá ze skupin nejprve v součtu ujde $\frac{n}{2}$, po čemž se všichni ptakopysci dostanou do vrcholů mnohoúhelníku. Ptakopysk jdoucí po A_iA_{i+1} následně ujde x_i, respektive y_{i+1}, podle toho, jestli patří do první, či druhé skupiny. Ale to znamená, že první skupina v součtu ujde $\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n x_i$ a druhá $\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n y_i$, což jsou stejná čísla.



Poznámky:
Řešení se sešlo vcelku pomálu. Všechna správná víceméně kopírovala vzorák. Řešení se může zdát trikové, ale není to tak strašné – tipnout správné rozdělení šlo celkem dobře intuitivně, z čehož jednoduše vyšel metrický vztah. A metrické vztahy vzhledem ke kružnici takřka vždy ukazují na mocnost.

(Rado van Švarc)

Úloha 8.

V PraSeStánu se vláda rozhodla zřídit 2017 okresů o stejné rozloze. Své návrhy na rozdělení podaly dvě politické strany. Dokažte, že lze vybudovat 2017 okresních úřadů tak, aby byl v každém okrese právě jeden, ať už vláda poté zvolí kteroukoli variantu.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:
Úlohu si převedeme na hledání největšího párování[2] v bipartitním grafu. Tento graf vytvoříme tak, že vezmeme jako jednu partitu okresy v jednom návrhu a jako druhou partitu okresy v druhém. Hrana povede mezi dvěma vrcholy právě tehdy, když příslušné navržené okresy mají průnik s nenulovým obsahem. Graf si označíme G.

Nyní si všimneme, že pokud najdeme v tomto grafu párování obsahující všechny vrcholy, tak můžeme pro každé dva spárované okresy (které budou nutně z různých návrhů) postavit okresní úřad právě v jejich průniku. Vzhledem k tomu, že mezi nimi vede hrana, je tento průnik z definice G neprázdný.

Toto párování nalezneme pomocí Hallovy věty. Ta říká, že bipartitní graf s partitami A a B má párování obsahující všechny vrcholy partity A právě tehdy, když každá podmnožina F vrcholů partity A je spojena hranami s alespoň $|F|$ vrcholy B. V našem případě tedy musíme ukázat, že libovolná množina F okresů z jednoho návrhu zasahuje do alespoň $|F|$ okresů z návrhu druhého.

Označíme si S plochu každého okresu (ta je stejná pro oba návrhy, protože je rovna $\frac{1}{2017}$ plochy celého PraSeStánu). Pro spor připusťme, že existuje podmnožina F okresů z jednoho návrhu, která zasahuje do nejvýše $|F|-1$ okresů návrhu druhého. To by ale znamenalo, že se všechny okresy z F,

[2] Párováním rozumíme podmnožinu množiny hran grafu takovou, že žádné dvě její hrany nemají společný vrchol. Největší párování M je párování takové, že každé párování v G má nejvýše $|M|$ hran.

jejichž plocha je dohromady $S \cdot |F|$, vejdou do nejvýše $|F|-1$ okresů z druhého návrhu. Plocha těchto nejvýše $|F|-1$ okresů je ale nejvýše $S \cdot (|F|-1)$, což je méně než $S \cdot |F|$. To je hledaný spor.

V G tedy existuje párování obsahující všechny vrcholy jedné partity. Protože jsou ale partity stejně velké, obsahuje toto párování všechny vrcholy.

Alternativní řešení (podle Ákose Záhorského):

Stejně jako v předchozím řešení převedeme úlohu na hledání párování obsahujícího 2017 hran.

Využijeme Königovu větu. Ta říká, že v každém bipartitním grafu je velikost největšího párování rovna velikosti nejmenšího pokrytí[3]. Nyní tedy nechť pro spor existuje v G pokrytí o nejvýše 2016 vrcholech. Tedy existuje nejvýše 2016 okresů (ne nutně všechny z toho samého návrhu) takových, že obsahují každou oblast, které odpovídá nějaká hrana. Tyto okresy však každou oblast, které odpovídá nějaká hrana, obsahují buď celou, nebo vůbec. Protože však mají dohromady plochu nejvýše $2016S$, existuje plocha velká alespoň S, která není žádným z nich pokrytá. Protože ale každé místo pokrývají okresy z obou návrhů, i v této ploše je nějaká oblast odpovídající hraně v G, což je hledaný spor.

Poznámky:

Téměř všechna řešení, která nám přišla, kopírovala vzorák. Jediné správné řešení, které nevyužívalo Hallovu větu, bylo řešení *Ákose Záhorského*, který za něj byl oceněn jedním imaginárním bodem.

(Viki Němeček)

[3]Pokrytí je taková podmnožina C množiny vrcholů grafu G, že pro každou hranu G je v C alespoň jeden její koncový vrchol.