Přísloví

1. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Rado dostal od Davida 50 *krabiček. Uvnitř některých z nich je schováno po jednom kousku bronzu, ostatní jsou prázdné. Rado by rád zjistil, kolik kousků bronzu je ve všech krabičkách dohromady. Protože mluviti stříbro, ale mlčeti zlato, zkusil to jinak. Když ukáže na libovolné tři různé krabičky, David mu prozradí, zda je v nich dohromady sudý, nebo lichý počet kousků. Ukažte, že Radovi za všech okolností stačí osmnáctkrát ukázat, aby zjistil, zda je celkem kousků bronzu sudý, či lichý počet.*

(Marian Poljak)

Řešení:

Označíme si počet bronzov v prvej krabičke x_1, v druhej krabičke x_2, atď. Úlohou je teda určiť paritu[1] čísla $x_1 + x_2 + \cdots + x_{50}$. Prvých 48 krabičiek si rozdelíme na 16 trojíc a na týchto 16 trojíc sa opýtame. Potom sa opýtame na krabičky $1, 2, 49$ a $1, 2, 50$ a všetky výsledky sčítame. Vieme, že súčet čísel je párny práve vtedy, keď majú rovnakú paritu. Tak zistíme paritu čísla $2(x_1 + x_2) + x_1 + x_2 + \cdots + x_{50}$. To je zároveň aj parita čísla $x_1 + x_2 + \cdots + x_{50}$, pretože tieto dve čísla sa líšia o $2(x_1 + x_2)$, čo je párne. Dokopy sme použili 18 otázok, takže úloha je vyriešená.

Poznámky:

Väčšina riešiteľov postupovala tak, že sa opýtala na prvých 48 krabičiek, a teda im ostali 49. a 50. krabička. Paritu týchto dvoch zistili tak, že sa opýtali na $1, 2, 49$ a $1, 2, 50$. Pokiaľ boli oba výsledky rovnaké, tak počet bronzov v 49. krabičke a 50. krabičke bol párny, a ak sa výsledky líšili, tak bol nepárny. Toto riešenie je úplne správne, ale neposkytuje taký dobrý nadhľad ako vzorové rišenie.

V podstate išlo o to, aby sa na každú krabičku pýtalo nepárny počet krát, a potom stačilo výsledky sčítať modulo 2. Na túto myšlienku prišlo len málo ľudí, a tí boli odmenení $+i$. Na druhej strane sa našli riešenia, ktoré vo väčšej alebo menšej miere rozoberali možnosti bronzov v niekoľkých škatuľkách. Takmer všetky boli správne a dosť zdĺhavé, takže v budúcnosti by mohli prísť o nejaké to i.

(Marta Kossaczká)

Úloha 2.

Na kruhovém stole o průměru jeden metr sedí 97 *much. Honza by svou čtvercovou plácačkou o hraně* 10 *centimetrů rád zabil alespoň dvě mouchy jednou ranou. Ukažte, že se mu to může povést bez ohledu na to, jak si mouchy posedaly.*

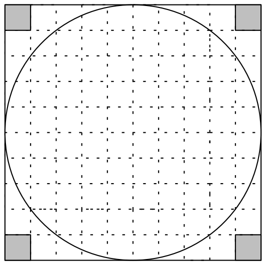
(Anička Doležalová)

[1] t.j. či je číslo párne alebo nepárne

Řešení:

Uvažujme čtverec o straně 1 metr, do kterého je vepsaný kruhový stůl. Čtverec si rozdělíme na čtvercovou síť sta čtverečků o hraně 10 centimetrů (velikost plácačky). Nyní si můžeme všimnout, že čtyři rohové čtverečky vůbec nezasahují do kruhu. To platí, protože součet délek úhlopříček dvou z těchto malých čtverečků a průměru stolu je menší než délka úhlopříčky celého čtverce: $2 \cdot 0{,}1 \cdot \sqrt{2} + 1 < \sqrt{2}$.

Celý stůl tedy dokážeme pokrýt 96 čtverečky velikosti plácačky. V nich sedí 97 much. Z toho už je jasné, že alespoň v jednom z čtverečků musí být alespoň dvě mouchy (tomuto tvrzení se často říká Dirichletův princip).



Jiné řešení:

Aby Honza mohl plácnout dvě mouchy jednou ranou, musí jejich vzdálenost být nejvýše rovna délce úhlopříčky plácačky ($10\sqrt{2}$ cm). Kolem každé mouchy si představíme kruh s poloměrem rovným polovině délky úhlopříčky ($r_m = 5\sqrt{2}$ cm). Pokud by se nějaké dva z těchto kruhů překrývaly nebo dotýkaly, znamená to, že vzdálenost much (středů kruhů) je menší nebo rovna úhlopříčce plácačky, takže tyto mouchy může Honza zabít jednou ranou. Tedy aby Honza nemohl zabít žádné dvě mouchy jednou ranou, nesmí se kruhy překrývat. Porovnáme nyní obsah stolu a obsahy kruhů kolem much, abychom zjistili, jestli se všechny mouchy (i se svými ochrannými kruhy) vejdou na stůl.

Nejprve spočítáme součet obsahů kruhů pro všech 97 much:

$$S_m = 97 \cdot \pi r_m^2 = 97 \cdot \pi (5\sqrt{2})^2 = 4850\pi \,\mathrm{cm}^2 .$$

Dále si spočítáme obsah kruhového stolu. Tady si ale musíme dát pozor na to, že některé z kruhů kolem much můžou přečnívat přes okraj stolu (když budou mouchy sedět blízko u okraje). Vyřešíme to tím, že poloměr stolu zvětšíme o poloměr ochranného kruhu.

$$S_s = \pi r_s^2 = \pi (50 + 5\sqrt{2})^2 \doteq 3257\pi \,\mathrm{cm}^2 .$$

Nyní už je zřejmé, že obsah všech ochranných kruhů kolem much je výrazně větší než obsah stolu. Proto se kruhy musí překrývat, aby si všechny mouchy mohly sednout na stůl, takže Honza určitě může *zabít dvě mouchy jednou ranou.*

Poznámky:

Většina správných došlých řešení využívala postup ukázaný v prvním ze vzorových řešení. Řešitelé často zapomínali zdůvodnit, že krajní čtverečky nezasahují do stolu, důkaz „obrázkem“ není matematicky správný. I tato řešení jsem ale hodnotil plným počtem bodů. Druhý způsob využívalo méně řešitelů. Někteří z nich však zapomněli na to, že ochranné kruhy mohou přesahovat přes okraj stolu. V tomto případě to výsledek neovlivnilo, protože rozdíl obsahů byl dostatečně velký, v jiné úloze by ale mohlo, je tedy potřeba dávat pozor. Ani za tuto chybu jsem však v první sérii body nestrhával.

(Michal Töpfer)

Úloha 3.

Aničce každý den se železnou pravidelností přijde do e-mailové schránky právě jedna nevyžádaná reklama na zdravou výživu. Jednoho dne si řekla, že zítřkem počínaje si koupí zmrzlinu každý den, kdy bude ciferný součet počtu těchto reklam dělitelný sedmi. Kdo si počká, ten se dočká, pomyslela si a od toho dne ze své schránky nesmazala žádnou zprávu. Ukažte, že si během následujících třinácti dnů koupila zmrzlinu alespoň jednou, ať už bylo počáteční množství zpráv o zdravé výživě ve složce jakékoliv.

(Lucien Šíma)

Řešení:
Ciferný součet po sobě jdoucích čísel se zvyšuje o jedna, dokud nedojde k přechodu přes desítku. Pokud ovšem k přechodu přes desítku došlo, musí mezi našimi uvažovanými dny být buď sedm dní přímo po něm, nebo sedm dní přímo před ním. V opačném případě by bylo maximálně šest dní před přechodem a šest po něm, což ale dává pouze dvanáct dní.

Ukázali jsme si tedy, že vždy můžeme najít sedm dnů, mezi nimiž nedojde k přechodu přes desítku, a příslušné ciferné součty se tedy postupně zvyšují o jedna. Protože ovšem máme pouze sedm různých zbytků po dělení sedmi, jedno z těchto čísel určitě bude sedmi dělitelné.

Poznámky:
Většina řešitelů si s úlohou bez problémů poradila. Nejčastější chybou bylo pokusit se určit, o kolik se změní ciferný součet při přechodu přes desítku. Protože nemáme omezený maximální počet reklam a nemůžeme vypsat všechny možnosti, museli bychom dokázat, že jsme opravdu postihli všechny situace. Takové řešení by ale bylo podstatně složitější než vzorové. *(Kateřina Nová)*

Úloha 4.

Marta se jednoho dne rozhodla, že si od zítřka bude každý den zapisovat počet střelených nápadů, který ten den měla. Aby se jí to nepopletlo, pro přehlednost si číslo získané i-tý den označuje jako a_i. Trpělivě teď každý den počítá součin všech rozdílů $a_i - a_j$ pro $i < j$. Hned první den se se svým počínáním neprozřetelně svěřila Honzovi. Ten sice neměl tušení, kolik hloupostí Martu který den napadne, ale přesto za ní jednoho dne přišel a sebejistě jí oznámil, že jí večer vyjde číslo dělitelné 481. *Věděl, že bude mít pravdu, protože podobně jako host a ryba třetí den smrdí, jsou n-tý den součiny rozdílů dělitelné* 481. *Určete nejmenší možné n, pro které tato moudrost vždy platí.*

(Honza Krejčí)

Řešení:
Dokážeme, že nejmenší možné n je 38. Nejprve si ukážeme, že po 38 dnech je Martin součin opravdu dělitelný 481. Platí, že $481 = 37 \cdot 13$. Protože počet zbytků po dělení číslem 37 je právě 37, musí z Dirichletova principu mezi 38 přirozenými čísly existovat dvě čísla a_k, a_l, která mají stejný zbytek po dělení 37. Pak je nutně jejich rozdíl $a_k - a_l$ dělitelný 37 a tudíž je tímto číslem dělitelný i celý Martin součin. Stejně tak mezi danými čísly z Dirichletova principu leží dvě čísla mající stejný zbytek po dělení 13, součin rozdílů všech čísel je tedy dělitelný i 13. Protože jsou čísla 13 a 37 nesoudělná, součin je pak dělitelný číslem 481.

Zbývá ukázat, že n nemůže být menší. Volme $a_i = 38 - i$ pro $i = 1, 2, \ldots, 37$. Pak pro $k < l$, $0 < a_k - a_l = l - k < 37$, z čehož plyne, že žádný z rozdílů není dělitelný číslem 37, a tedy ani číslem 481.

Poznámky:
Většina řešení byla správná, podobná autorskému řešení. V podstatné části z nich bohužel chybělo zdůvodnění proč n nemůže být menší. Za to jsem strhával jeden bod. V úlohách, kde se hledá nejmenší (největší) číslo, které splňuje zadanou podmínku, ho totiž nestačí jenom najít – je třeba také zdůvodnit, proč žádné menší (větší) neexistuje.

(Honza Krejčí)

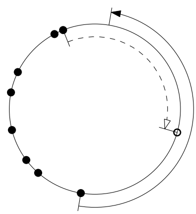
Úloha 5.

Kolem kulatého stolu sedělo v nepravidelných kladných rozestupech 2017 *nerozlišitelných ptakopysků. Přišel k nim Viki a po jednom z nich hodil své slovo. Protože na koho to slovo padne, ten musí jít z kola ven, určený ptakopysk od stolu odešel. Po chvíli za nimi přišel i Kuba, podíval se na pozice zbylých ptakopysků a pak na hraniční kružnici stolu vyznačil půlkružnici. Potom prohlásil, že chybějící ptakopysk určitě seděl na této půlkružnici*[2]*. Dokažte, že se Viki s Kubou mohli předem domluvit tak, aby se Kuba vždy trefil bez ohledu na to, jak si ptakopysci na začátku kolem stolu posedali.*

(Jakub Löwit)

Řešení:

Viki a Kuba mohou tento trik provést například následujícím způsobem. Viki najde ten nejdelší úsek bez ptakopysků (pokud je takových úseků několik, vybere libovolný z nich) a hodí slovo po ptakopyskovi na jeho pravé straně po směru hodinových ručiček. Rozestupy ptakopysků jsou kladné, takže odebráním vznikne jednoznačně určený, ostře nejdelší úsek.



Následně přijde Kuba a najde nejdelší úsek bez ptakopysků. To je ale nutně právě ten úsek, ve kterém seděl odebraný ptakopysk. Z konstrukce je navíc jasné, že tento ptakopysk nemohl sedět blíže k pravému okraji, než k levému. Kubovi pak proto na zvoleném úseku stačí vyznačit půlkružnici, která začíná na jeho pravém okraji a pokračuje proti směru hodinových ručiček. Ta vskutku pokryje alespoň polovinu úseku, neboť délka celého úseku nemůže přesáhnout obvod celého stolu. Ptakopysk tedy na zvolené půlkružnici skutečně seděl.

Poznámky:

Necelá polovina přijatých řešení byla správně, přičemž, až na výjimky, byla shodná se vzorovým. Mnoho řešitelů hledalo nejdelší úsek mezi dvěma sousedními ptakopysky. Ti, co si navíc orientovali kružnici, zpravidla získali plný počet bodů. Ovšem pouze hledáním nejdelšího úseku mohla nastat situace, kdy po odebrání ptakopyska vznikne mezera delší než půlkružnice. Kuba pak nebude vědět, kam půlkružnici umístit. Těmto řešením jsem dávala po dvou bodech. Některá řešení se snažila takové situace dořešit hledáním druhého nejdelšího úseku. Zde nastal problém, že Kuba poté nedokázal rozpoznat, zda brali nejdelší či druhý nejdelší úsek.

Pár řešitelů se pokusilo místo orientace použít pevně zvolený bod. Až na výjimku se tato řešení někde pokazila. Řešitelé pomocí toho bodu stůl rozpůlili a odebírali ptakopyska z buď méně nebo více početné půlkružnice. Zde si ale zpravidla neuvědomili, že buď všichni ptakopysci mohou být na jedné půlkružnici, nebo naopak být rozděleni 1013 ku 1014.

(Verča Hladíková)

[2] Krajní body rovněž považujeme za součást půlkružnice.

Úloha 6.

Tonda vytesal dřevěnou tabulku o rozměrech $n \times n$ a do každého políčka vypálil reálné číslo v absolutní hodnotě menší než jedna. Všiml si, že v každém jejím čtverci 2×2 je součet čísel nulový. Jednoho dne všechna čísla v tabulce sečetl a vyšlo mu číslo v absolutní hodnotě větší než n. Dokažte, že i mistr tesař se někdy utne a že Tonda čísla nesečetl správně.

(Anh Dung „Tonda“ Le)

Řešení:

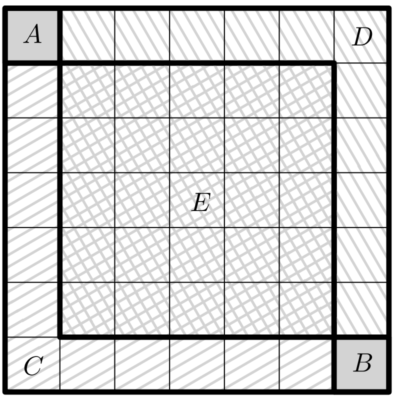
Pro sudé n je možné Tondovu tabulku pokrýt beze zbytku čtverci 2×2. Každý čtverec má součet čísel 0, takže i součet celé tabulky je nula a $|0| \leq n$.

Pro liché n využijeme matematickou indukci. Pokud $n = 1$, máme pouze jedno číslo, a to je ze zadání v absolutní hodnotě menší než jedna. Nechť tedy pro nějaké liché n platí, že součet čísel v libovolné tabulce $n \times n$ je v absolutní hodnotě vždy menší či roven n. Dokážeme, že potom pro součet S každé tabulky o hraně $n + 2$ platí $|S| \leq n + 2$.

Označme si každou buňku tabulky symbolem $K_{i,j}$, kde i značí řádek a j sloupec, na němž se buňka v tabulce nachází. V tabulce vyznačíme části A, B, C, D, E, kde součty čísel v nich jsou po řadě a, b, c, d, e. Nechť

- $A =$ čtverec o hraně jedna s umístěním $K_{1,1}$,
- $B =$ čtverec o hraně jedna na $K_{n+2,n+2}$,
- $C =$ čtverec o hraně $n + 1$, který má levý horní roh na $K_{1,2}$ a pravý dolní roh v $K_{n+1,n+2}$,
- $D =$ čtverec o hraně $n + 1$, který má levý horní roh v $K_{2,1}$ a pravý dolní roh v $K_{n+2,n+1}$.

Navíc si označíme jako E průnik C a D.



Nyní odvodíme nerovnosti pro součty čísel v jednotlivých oblastech: Ze zadání platí $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$. Čtverce C, D mají hranu sudé délky, proto $c = 0$, $d = 0$. Z indukčního předpokladu plyne, že $|e| \leq n$. Hodnota $|S|$ se dá s pomocí indukčního předpokladu a trojúhelníkové nerovnosti vyjádřit jako $|a + b + c + d - e| = |a + b - e| \leq |a| + |b| + |e| \leq 1 + 1 + n = n + 2$, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

K úloze bylo možné přistoupit i různými jinými způsoby. Použitím vhodných čtverečků 2×2 se dokonce dalo ukázat, že součet všech čísel tabulky záleží jen na prvcích na diagonále; konkrétně ho dostaneme tak, že sečteme členy na lichých pozicích úhlopříčky a odečteme od nich členy na sudých. (Tento vzorec ostatně okamžitě plyne ze vztahu $S = a + b - e$ použitím indukce.) Dobrým pozorováním bylo, že ve čtverci 2×2 je součet libovolných tří buněk v absolutní hodnotě menší než jedna. To proto, že zbývající čtvrtá buňka je také v absolutní hodnotě menší než jedna, a v součtu s ostatními třemi musí dát nulu. Pro sudá n se úlohu podařilo vyřešit většině řešitelů, pro lichá n

mnohdy chyběl důkaz. Nesprávnou cestou bylo dosadit si na místa v tabulce konkrétní hodnoty, snažit se najít „nejhorší případ“ a o něm dokázat, že má součet v absolutní hodnotě menší nebo roven n. Není totiž dost dobře možné zdůvodnit, že zkoumaný případ je skutečně nejhorší možný.

(Zuzana Svobodová)

Úloha 7.

Dokažte, že kdo hledá, ten pro každé přirozené n najde n různých přirozených čísel takových, že

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}$$

je nezáporné celé číslo.

(Marian Poljak)

Řešení (podle Martina Rašky):

Nechť $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost zadaná pomocí rekurentního vztahu $y_{i+1}=1+\prod_{j=1}^{i}y_j$ a prvního prvku $y_1=2$. Zaveďme značení $s_i=\prod_{j=1}^{i}y_j$. Jelikož je součin několika přirozených čísel vždy větší nebo roven tomu největšímu, je posloupnost $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ ostře rostoucí. Ukážeme indukcí, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}=\frac{s_n-1}{s_n}$.

Pro $n=1$ to platí zřejmě. Nyní předpokládejme, že je vztah splněn pro nějaké $n\geq 1$, a dokažme ho pro $n+1$. Upravujme:

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{y_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}+\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{s_n-1}{s_n}+\frac{1}{s_n+1}=\frac{s_n^2-1+s_n}{s_n(s_n+1)}=\frac{s_n(s_n+1)-1}{s_ny_{n+1}}=\frac{s_ny_{n+1}-1}{s_ny_{n+1}}.$$

Poslední výraz už můžeme přepsat jako $\frac{s_{n+1}-1}{s_{n+1}}$, čímž je indukční krok dokončen.

Pro $n=1$ můžeme zvolit $x_1=1$ a po dosazení do výrazu ze zadání dostaneme nulu, což je nezáporné celé číslo. Když bude $n\geq 2$, tak zvolíme $x_i=y_i$ pro všechna $i<n$ a $x_n=s_{n-1}-1$. Pro $n=2$ vychází $x_1=2$, $x_2=1$, což jsou různá přirozená čísla. U větších n dostaneme také různá čísla, protože $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost a pro $n\geq 3$ je $x_n=s_{n-1}-1\geq y_1y_{n-1}-1=2y_{n-1}-1>y_{n-1}=x_{n-1}$. Takto zvolená čísla navíc dají po dosazení do výrazu ze zadání jedničku (což je nezáporné celé číslo), neboť

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}-\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\frac{s_{n-1}-1}{s_{n-1}}+\frac{1}{s_{n-1}-1}-\frac{1}{s_{n-1}(s_{n-1}-1)}=\frac{s_{n-1}^2-2s_{n-1}+1+s_{n-1}-1}{s_{n-1}^2-s_{n-1}}=1.$$

Poznámky:

Všechna správná řešení vybrala stejná x_i jako to vzorové. Většina z nich se poté různě dlouhou indukcí dobrala k touženému výsledku. Některá zvolila jiný, trikovější postup, kde si převedla výraz na společného jmenovatele a pomocí kongruencí ukázala, že jmenovatel pro takto zvolená čísla opravdu dělí čitatel.

Ještě podotknu, že spousta řešení zapomněla zmínit, že jsou jimi zvolená čísla opravdu různá. Pro takto definovaná čísla je to sice skoro úplně jasné, ale aby bylo řešení kompletní, je třeba tuto skutečnost někde zmínit. Ukážete tím, že jste si na to dávali pozor a nevyšla vám ta čísla různá jen „náhodou“. Bod jsem však za to tentokrát nestrhával.

(Filip Bialas)

Úloha 8.

Na papíře je nakreslený ostroúhlý trojúhelník ABC. Osa úhlu ABC protíná stranu AC v bodě D a kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě E. Bodem D vede přímka ℓ, která protíná polopřímky EA a EC v bodech F a G. Martin by si rád vyříznul nějaký velký úhel. Ví ovšem, že má vždy dvakrát měřit, než začne řezat. Proto si změřil velikosti úhlů ABC a FBG. Ukažte, že úhel FBG je alespoň tak velký jako úhel ABC.

(Radovan Švarc)

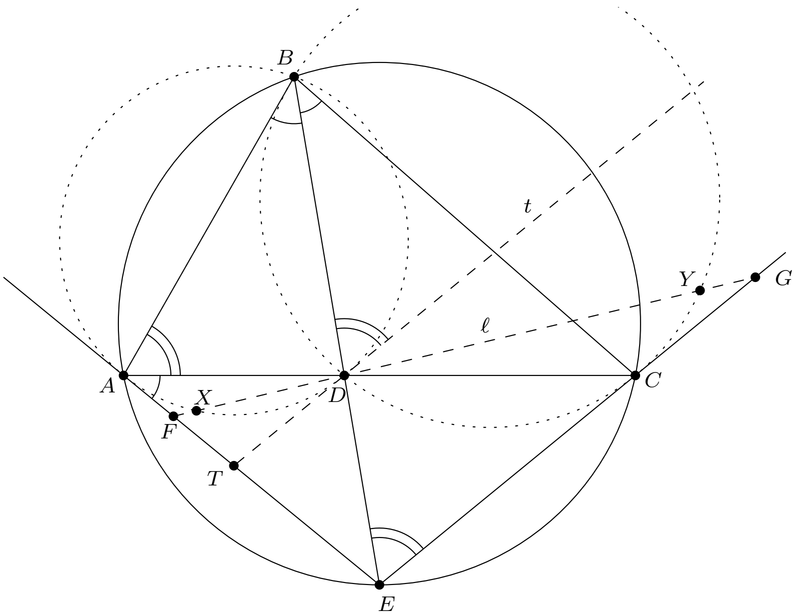
Řešení:

Nechť X a Y jsou průsečíky ℓ s kružnicemi opsanými ABD a CBD různé od D. Ukážeme, že F, X, Y, G leží na přímce ℓ v tomto pořadí a že $|\sphericalangle XBY| = |\sphericalangle ABC|$. Z toho už je pak dokazované tvrzení zřejmé.

Z obvodových úhlů platí $|\sphericalangle EAC| = |\sphericalangle EBC| = |\sphericalangle ABD|$, tedy z úsekových úhlů je FA tečna ke kružnici opsané ABD. Proto F leží vně kružnice opsané ABD. Zároveň pokud t je tečna ke kružnici opsané ABD skrze D, pak si označme bod, ve kterém protíná AE jako T. Z úsekových a obvodových úhlů platí $|\sphericalangle TDB| = 180^\circ - |\sphericalangle BAD| = 180^\circ - |\sphericalangle BEC|$, takže $t \parallel EC$. Protože FD protíná polopřímku EC a t nikoliv, platí, že T leží uvnitř úsečky FE. Zkombinováním tohoto faktu s tím, že F leží vně kružnice opsané ABD a zjevným faktem, že $|\sphericalangle BDF| > |\sphericalangle BEF|$, dostáváme, že X leží uvnitř úsečky FD. Analogicky Y leží uvnitř úsečky DG. Proto F, X, Y a G leží na ℓ v tomto pořadí.

Z obvodových úhlů je $|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle BAD|$ a $|\sphericalangle BYD| = |\sphericalangle BCD|$, takže trojúhelníky ABC a XBY jsou podobné. Proto také $|\sphericalangle XBY| = |\sphericalangle ABC|$.

Tím jsme hotovi.



Poznámky:

Většina řešení se dělila na tři části. Špatná, která se obvykle snažila tvrdit, že úhel FBG bude větší než úhel ABC jen z toho, že $|FG| > |AC|$; dobrá, která použila nějaký mlátící nástroj (obvykle sinovou větu); a dobrá syntetická, která si vysloužila $+i$. *(Rado van Švarc)*